Uvod u matematičku logiku

1. čas: Iskazi i predikati

Iskazi

Definicija

Iskaz je rečenica ili matematički izraz koji ima istinitosnu vrednost, tj. za koji možemo da kažemo da je tačan ili netačan.

Primeri

- Ako je ceo broj n deljiv sa 6 onda je n paran. **Tačan iskaz.**
- Skup $\{1, 2\}$ ima tri elementa. **Netačan iskaz.**
- Rešiti jednačinu $x^2 - 3x + 2 = 0$ u skupu $\mathbb{R}$. **Nije iskaz.**
- Tačka T je težište $\triangle ABC$. **Nije iskaz.**
- Za beskonačno mnogo $p \in \mathbb{N}$ važi da su p i $p + 2$ prosti brojevi. **Iskaz nepoznate tačnosti.**
- Kroz tačku A prolazi tačno jedan prava paralelna sa pravom a. **Iskaz čija je tačnost zavisna od geometrije.**

Negacija

Tačno obeležavamo sa **t** / netačno sa **n**.

Definicija

Negacija iskaza p je iskaz „ne p" („nije p", „ne važi p") koji obeležavamo sa $\neg p$. Iskaz $\neg p$ ima suprotnu vrednost od p:

p	$\neg p$
t	**n**
n	**t**

Primer

Negacija iskaza „Lepa je pas." je iskaz „Lepa nije pas.".

Konjunkcija

Definicija

Konjunkcija iskaza p i q je iskaz „p i q” koji obeležavamo sa $p \wedge q$. Iskaz $p \wedge q$ je tačan jedino ako su i p i q tačni:

p	q	$p \wedge q$
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**
n	**t**	**n**
n	**n**	**n**

Primer

Konjunkcija iskaza „Lepa je pas.” i „Brka je pas.” je iskaz „Lepa i Brka su psi.”.

(Inkluzivna) disjunkcija

Definicija

Disjunkcija iskaza p i q je iskaz „p ili q" („važi bar jedno od p i q") koji obeležavamo sa $p \vee q$. Iskaz $p \vee q$ je tačan ako je bar jedan od p i q tačan:

p	q	$p \vee q$
t	**t**	**t**
t	**n**	**t**
n	**t**	**t**
n	**n**	**n**

Primer

Disjunkcija iskaza „Lepa laje." i „Brka laje." je iskaz „Laje Lepa ili Brka." (u smislu bar jedno od njih dvoje laje).

Ekskluzivna disjunkcija

Definicija

Ekskluzivna disjunkcija iskaza p i q je iskaz „ili p ili q" („važi tačno jedno od p i q") koji obeležavamo sa $p \veebar q$. Iskaz $p \veebar q$ je tačan ako je tačno jedan od p i q tačan:

p	q	$p \veebar q$
t	**t**	**n**
t	**n**	**t**
n	**t**	**t**
n	**n**	**n**

Primer

Ekskluzivna disjunkcija iskaza „Lepa laje." i „Brka laje." je iskaz „Laje ili Lepa ili Brka." (u smislu tačno jedno od njih dvoje laje).

Primeri

Označimo l: „Lepa laje.", b: „Brka laje.", u: „Lepa ujeda.".

Simbolički zapisati:

- Lepa i Brka ne laju.
- Lepa laje, ali ne ujeda.
- Lepa laje, a Brka ne.

Označimo l: „Lepa laje.", c: „Lepa cvili.", m: „Lepa maše repom.".

Pročitati:

- $(m \wedge l) \veebar c$;
- $m \wedge (l \veebar c)$;
- $\neg(m \wedge l)$.

Implikacija

Definicija

Implikacija iskaza p i q je iskaz „ako p onda q" („iz p sledi q", „p povlači q", „q, ako p", „p, samo ako q", „p je dovoljan uslov za q", „q je potreban uslov za p") koji obeležavamo sa $p \to q$. Iskaz $p \to q$ je netačan jedino ako je p tačan i q netačan:

p	q	$p \to q$
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**
n	**t**	**t**
n	**n**	**t**

Primer

Implikacija iskaza „Lepa laje." i „Brka laje." je iskaz „Ako Lepa laje, onda laje i Brka.".

Implikacija

Iskaz „Ako je broj n veći od 5, onda je n veći i od 3." je implikacija $n > 5 \rightarrow n > 3$ za koju bismo rekli da je tačna (ne pitajući se koliko je to n).

	$n > 5$	$n > 3$	$n > 5 \rightarrow n > 3$
$n = 6$	**t**	**t**	**t**
$n = 4$	**n**	**t**	**t**
$n = 2$	**n**	**n**	**t**

Posmatrajmo iskaz „Ako položiš ispit, kupiću ti telefon.". Kada možemo da kažemo da smo prekršili obećanje?

Ekvivalencija

Definicija

ekvivalencija iskaza p i q je iskaz „p ako i samo ako q" („p akko q", „p je potreban i dovoljan uslov za q") koji obeležavamo sa $p \leftrightarrow q$. Iskaz $p \leftrightarrow q$ je tačan ako su p i q jednake tačnosti:

p	q	$p \leftrightarrow q$
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**
n	**t**	**n**
n	**n**	**t**

Primer

Ekvivalencija iskaza „Lepa laje." i „Brka laje." je iskaz „Lepa laje akko Brka laje.".

Primeri

Simbolički zapisati:

- Ako Brka kasni u šetnju, Lepa leži pred vratima i cvili.
- Kad Brka trči, Lepa sedi i gleda, ili i ona trči.
- Lepa i Brka trče u isto vreme.
- Kad Lepa i Brka sednu, počnu da zavijaju.

Simbolički zapisati:

- Vuk dlaku menja, ali ćud nikada.
- Gde mačke nema, tu miševi kolo vode.
- Ko pita, ne skita.

Promenljiva i univerzum diskursa

Definicija

Promenljiva je simbol koji koristimo da predstavimo matematičke objekte.

Svaka promenljiva ima (najčešće iz konteksta) određen svoj *univerzum diskursa*, tj. skup čije elemente ta promenljiva predstavlja (u kome ta promenljiva uzima vrednosti).

Univerzum diskursa promenljive x obeležavamo sa $\mathcal{U}_x$.

Primeri

Šta su promenljive i njihovi univerzumi diskursa u sledećim matematičkim izrazima:

$$m \mid n,\ \sin x = \frac{1}{2},\ p \perp q,\ \alpha \parallel \beta,$$

$$AB = d,\ |S| = 5,\ f'(x) = e^x,\ \deg(p) = n.$$

Predikati

Definicija

Rečenica ili matematički izraz u kome figurišu jedna ili više promenljivih, a koji postane iskaz (tačan ili netačan) kada svaka promenljiva uzme konkretnu vrednost iz svog univerzuma diskursa, naziva se *predikat*.

Primeri

- x je prost broj;
- $ax^2 + bx + c = 0$;
- $m \mid n$.

Kvantifikatori

Neka je $p(x)$ predikat. Iskaz „Za svako x iz univerzuma diskursa važi p." zapisujemo:

$$(\forall x)\, p(x).$$

Iskaz „Za neko x iz univerzuma diskursa važi p." zapisujemo:

$$(\exists x)\, p(x).$$

Primeri

Dati su predikati $p(x)$: „x je pas." i $m(x)$: „x je mešanac." (univerzum diskursa je npr. skup svih životinja). Simbolički zapisati:

- Svi mešanci su psi.
- Neki pas je mešanac.
- Nisu svi psi mešanci.
- Ne postoji pas koji nije mešanac.

Primeri

Dati su predikati $m(x)$: „x je muško”, $r(x, y)$: „x je roditelj od y”, $b(x, z)$: „x je u braku sa y”. Simbolički zapisati:

- x je otac od y;
- x je ujak od y;
- x je svastika od y.

Pročitati:

- $\neg m(x) \wedge \neg r(x, y) \wedge (\exists z)(m(z) \wedge b(x, z) \wedge r(z, y))$;
- $\neg m(x) \wedge (\exists z)(z \neq x \wedge r(z, y) \wedge (\exists u)(r(u, x) \wedge r(u, z)))$;
- $\neg m(x) \wedge m(y) \wedge (\exists z)(\exists u)[z \neq x \wedge u \neq y \wedge \neg m(z) \wedge b(z, y) \wedge$ $\wedge m(u) \wedge b(u, x) \wedge (\exists v)(r(v, z) \wedge r(v, u))]$.

Ograničeni kvantifikatori

Neka je $p(x)$ predikat i $A \subseteq \mathcal{U}_x$. Sa $(\forall x \in A)\, p(x)$ kraće pišemo iskaz:

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow p(x)),$$

tj. iskaz „Za svaki objekat skupa A važi p."

Sa $(\exists x \in A)\, p(x)$ kraže pišemo iskaz:

$$(\exists x)(x \in A \wedge p(x)),$$

tj. iskaz „Za neki objekat skupa A važi p."

Ograničeni kvantifikatori

Primeri

Simbolički zapisati:

- Kvadrat svakog realnog broja većeg od 1 veći je od njega samog.
- Kvadrat relanog broja iz intervala $(0, 1)$ manji je od njega samog.
- Svaki pozitivan realan broj je kvadrat nekog negativnog broja.

Nota bene

$(\forall x \in \emptyset)\, p(x) = \mathbf{t}$ i $(\exists x \in \emptyset)\, p(x) = \mathbf{n}$.

Kvantifikator $\exists_1$

Neka je $p(x)$ predikat. Sa $(\exists_1 x)\, p(x)$ ili $(\exists! x)\, p(x)$ kraće pišemo iskaz:

$$(\exists x)(p(x) \land (\forall y)(p(y) \to y = x)),$$

tj. iskaz „Postoji jedinstven objekat za koji važi p."

Zadatak
Kako bismo zapisali kvantifikatore $\exists^{=3}$, $\exists^{\geqslant 3}$, $\exists^{\leqslant 3}$, $\exists^{<3}$ i $\exists^{>3}$?