UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU

JANUAR 1 2025: REŠENJA

1. Odrediti sve logički neekvivalentne formule $A(p,q,r)$ takve da je formula:

$$\varphi = (A \vee p \leftrightarrow (\neg r \to p)) \ \wedge \ (p \vee q \leftrightarrow p \wedge A)$$

kontradikcija.

Rešenje. Napišimo tablicu formule φ u zavisnosti od vrednosti formule A:

p	q	r	A	$(A \vee p$	$\leftrightarrow$	$(\neg r \to p))$	$\wedge$	$(p \vee q$	$\leftrightarrow$	$p \wedge A)$
N	N	N	a_1	a_1	$\neg a_1$	N	$\neg a_1$	N	T	N
N	N	T	a_2	a_2	a_2	T	a_2	N	T	N
N	T	N	a_3	a_3	$\neg a_3$	N	N	T	N	N
N	T	T	a_4	a_4	a_4	T	N	T	N	N
T	N	N	a_5	T	T	T	a_5	T	a_5	a_5
T	N	T	a_6	T	T	T	a_6	T	a_6	a_6
T	T	N	a_7	T	T	T	a_7	T	a_7	a_7
T	T	T	a_8	T	T	T	a_8	T	a_8	a_8

Kako želimo da je $\varphi \equiv \perp$ vidimo da mora biti $a_1 = T$ i $a_2 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = N$, dok a_3, a_4 mogu imati proizvoljnu vrednost. Prema tome imamo četiri neekvivalentne formule A čije su tablice:

p	q	r	A_1	A_2	A_3	A_4
N	N	N	T	T	T	T
N	N	T	N	N	N	N
N	T	N	N	N	T	T
N	T	T	N	T	N	T
T	N	N	N	N	N	N
T	N	T	N	N	N	N
T	T	N	N	N	N	N
T	T	T	N	N	N	N

Tražene formule možemo pročitati u KDNF:

- $A_1 = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$;
- $A_2 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$;
- $A_3 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$;
- $A_4 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$. ♣

2. Na dijagramu je dat model jezika $\mathcal{L} = \{q\}$, pri čemu je q binarni relacijski simbol predstavljen strelicom. Za svaki element modela napisati formulu koja ga definiše.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \arrow[loop above] & c \arrow[l] \arrow[d] \\
f \arrow[r] \arrow[ur] & e \arrow[ur] \arrow[loop below] & d \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Rešenje. Možemo da primetimo da jedino a nema ulaznu strelicu, pa ga možemo definisati sa:

- $\varphi_a(x) := \neg\exists y\, q(y, x)$.

Element b ima petlju oko sebe, ali to ga ne definiše jer i e ima petlju oko sebe. Međutim, kako smo već definisali a, možemo da primetimo da je b jedini element koji ima petlju oko sebe u kojeg ulazi strelica iz a (jedino b zadovoljava „$q(x, x) \wedge p(a, x)$”). To možemo zapisati sa:

- $\varphi_b(x) := q(x, x) \wedge \exists y(\varphi_a(y) \wedge q(y, x))$.

Slično, f je jedini element koji nema petlju a u koga ulazi strelica iz a:

- $\varphi_f(x) := \neg q(x, x) \wedge \exists y(\varphi_a(y) \wedge q(y, x))$.

Sada e možemo da definišemo kao element koji ima petlju a nije b:

- $\varphi_e(x) := q(x, x) \wedge \neg\varphi_b(x)$.

Element c je jedini koji nema petlju a u koga ulazi strelica iz e:

- $\varphi_c(x) := \neg q(x, x) \wedge \exists y(\varphi_e(y) \wedge q(y, x))$.

Konačno, d je jedini koji nije nijedan drugi:

- $\varphi_d(x) := \neg\varphi_a(x) \wedge \neg\varphi_b(x) \wedge \neg\varphi_c(x) \wedge \neg\varphi_e(x) \wedge \neg\varphi_f(x)$. ♣

3. U prirodnoj dedukciji dokazati sekvente:

a) $p \wedge q \to \neg s,\ q \wedge \neg r,\ \neg p \to (s \to r)\ \vdash\ \neg s$;

b) $\forall x\, \neg P(x),\ \forall x (Q(x) \wedge \neg R(x) \to P(x)),\ \exists x (P(x) \vee Q(x))\ \vdash\ \exists x\, R(x)$.

Rešenje. a) Jedan mogući dokaz je:

1	$p \wedge q \to \neg s$	premisa
2	$q \wedge \neg r$	premisa
3	$\neg p \to (s \to r)$	premisa
4	$\neg\neg s$	pp
5	$\neg(p \wedge q)$	MT(1,4)
6	$\neg p \vee \neg q$	DM(5)
7	q	$\wedge_E(2)$
8	$\neg\neg q$	$\neg\neg_U(7)$
9	$\neg p$	DS(6,8)
10	$s \to r$	MP(3,9)
11	s	$\neg\neg_E(4)$
12	r	MP(10,11)
13	$\neg r$	$\wedge_E(2)$
14	$\perp$	$\neg_E(12, 13)$
15	$\neg s$	RAA(4–14)

b) Jedan mogući dokaz je:

1	$\forall x \neg P(x)$	premisa
2	$\forall x (Q(x) \wedge \neg R(x) \to P(x))$	premisa
3	$\exists x (P(x) \vee Q(x))$	premisa
4	$\boxed{a}$	nova promenljiva
5	$P(a) \vee Q(a)$	pretpostavka
6	$\neg P(a)$	I(1)
7	$Q(a)$	DS(5,6)
8	$Q(a) \wedge \neg R(a) \to P(a)$	I(2)
9	$\neg(Q(a) \wedge \neg R(a))$	MT(6,8)
10	$\neg Q(a) \vee \neg\neg R(a)$	DM(9)
11	$\neg\neg Q(a)$	$\neg\neg_U(7)$
12	$\neg\neg R(a)$	DS(10,11)
13	$R(a)$	$\neg\neg_E(12)$
14	$\exists x\, R(x)$	$\exists_U(13)$
15	$P(a) \vee Q(a) \to \exists x\, R(x)$	D(5–14)
16	$\forall x (P(x) \vee Q(x) \to \exists x\, R(x))$	G(4-15)
17	$\exists x\, R(x)$	$\exists_E(3, 16)$

ili drugačije zapisano:

1	$\forall x \neg P(x)$	premisa
2	$\forall x (Q(x) \wedge \neg R(x) \to P(x))$	premisa
3	$\exists x (P(x) \vee Q(x))$	premisa
4	$\quad \boxed{a} \; P(a) \vee Q(a)$	pretpostavka
5	$\quad \neg P(a)$	I(1)
6	$\quad Q(a)$	DS(4,5)
7	$\quad Q(a) \wedge \neg R(a) \to P(a)$	I(2)
8	$\quad \neg(Q(a) \wedge \neg R(a))$	MT(5,7)
9	$\quad \neg Q(a) \vee \neg\neg R(a)$	DM(8)
10	$\quad \neg\neg Q(a)$	$\neg\neg_U(6)$
11	$\quad \neg\neg R(a)$	DS(9,10)
12	$\quad R(a)$	$\neg\neg_E(11)$
13	$\quad \exists x\, R(x)$	$\exists_U(12)$
14	$\exists x\, R(x)$	$\exists_E$(3,4–13)

Komentar. Prethodna dva izvođenja su različiti zapisi istog dokaza. Razlika proizilazi iz načina na koji je iskazano pravilo $\exists_E$. ♣

4. Dokazati da je $(A \triangle B) \cup (B \cap C) = (A \smallsetminus C) \triangle B$ ako i samo ako $A \cap C \subseteq B$.

Rešenje. I način. $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo $(A \triangle B) \cup (B \cap C) = (A \smallsetminus C) \triangle B$; treba da dokažemo $A \cap C \subseteq B$. Pretpostavimo $x \in A \cap C$; treba da dokažemo $x \in B$. Pretpostavimo suprotno, $x \notin B$. Iz $x \in A \cap C$ sledi $x \in A$ i $x \in C$. Iz $x \in A$ i $x \notin B$ sledi $x \in A \triangle B$, odakle $x \in (A \triangle B) \cup (B \cap C)$. Prema polaznoj pretpostavci, $x \in (A \smallsetminus C) \triangle B$. Odatle sledi $x \in A \smallsetminus C$ jer $x \notin B$; specijalno $x \notin C$. Kontradikcija. Dakle, $x \in B$ i završili smo dokaz.

$(\Leftarrow)$ Pretpostavimo $A \cap C \subseteq B$; treba da dokažemo $(A \triangle B) \cup (B \cap C) = (A \smallsetminus C) \triangle B$.

$(\subseteq)$ Pretpostavimo $x \in (A \triangle B) \cup (B \cap C)$; treba da dokažemo $x \in (A \smallsetminus C) \triangle B$. Iz $x \in (A \triangle B) \cup (B \cap C)$ imamo dva slučaja:

1. slučaj. $x \in A \triangle B$. Imamo dva podslučaja:

1. podslučaj. $x \in A$ i $x \notin B$. Iz $x \notin B$ i $A \cap C \subseteq B$ sledi $x \notin A \cap C$, pa kako $x \in A$ to $x \notin C$. Dakle, $x \in A \smallsetminus C$, pa i $x \in (A \smallsetminus C) \triangle B$ jer $x \notin B$.

2. podslučaj. $x \notin A$ i $x \in B$. Tada $x \notin A$ direktno povlači $x \notin A \smallsetminus C$, pa $x \in (A \smallsetminus C) \triangle B$ jer $x \in B$.

Dakle, u oba podslučaja smo zaključili $a \in (A \smallsetminus C) \triangle B$, čime je prvi slučaj završen.

2. slučaj. $x \in B \cap C$; tada $x \in B$ i $x \in C$. Tada $x \in C$ direktno povlači $x \notin A \smallsetminus C$, pa $x \in (A \smallsetminus C) \triangle B$ jer $x \in B$.

Kako smo u oba slučaja zaključili $x \in (A \smallsetminus C) \triangle B$, završili smo dokaz inkluzije $(\subseteq)$.

$(\supseteq)$ Pretpostavimo $x \in (A \smallsetminus C) \triangle B$; treba da dokažemo $x \in (A \triangle B) \cup (B \cap C)$. Ponovo možemo da posmatramo dva slučaja:

1. slučaj. $x \in A \smallsetminus C$ i $x \notin B$, tj. $x \in A$, $x \notin C$ i $x \notin B$. Tada $x \in A \triangle B$, pa i $x \in (A \triangle B) \cup (B \cap C)$.

2. slučaj. $x \notin A \smallsetminus C$ i $x \in B$. Iz $x \notin A \smallsetminus C$ imamo dva podslučaja:

1. podslučaj. $x \notin A$. Iz $x \notin A$ i $x \in B$ sledi $x \in A \triangle B$, pa i $x \in (A \triangle B) \cup (B \cap C)$.

2. podslučaj. $x \in C$. Iz $x \in B$ i $x \in C$ sledi $x \in B \cap C$, pa i $x \in (A \triangle B) \cup (B \cap C)$.

Dakle, u oba podslučaja $x \in (A \triangle B) \cup (B \cap C)$, pa smo završili drugi slučaj, kao i dokaz inkluzije $(\supseteq)$, i dokaz implikacije $(\Leftarrow)$, i rešenje zadatka.

Komentar. U dokazu $(\supseteq)$ nismo koristili pretpostavku $A \cap C \subseteq B$, što znači da uvek važi $(A \triangle B) \cup (B \cap C) \supseteq (A \smallsetminus C) \triangle B$.

II način. Žegalkinov polinom izraza $(A \triangle B) \cup (B \cap C)$ jednak je:

$$\begin{aligned} (A \triangle B) \cup (B \cap C) &= (A + B) \cup (BC) \\ &= A + B + BC + (A + B)BC \\ &= A + B + \cancel{BC} + ABC + \cancel{BC} \\ &= A + B + ABC, \end{aligned}$$

a izraza $(A \smallsetminus C) \triangle B$ jednak je:

$$(A \smallsetminus C) \triangle B = A + AC + B.$$

Dakle, $(A \triangle B) \cup (B \cap C) = (A \smallsetminus C) \triangle B$ ako i samo ako $A + B + ABC = A + AC + B$, ako i samo ako $ABC = AC$. Poslednje je ekvivalentno sa $AC + ABC = 0$, tj. $(AC) \smallsetminus B = 0$, odnosno $(A \cap C) \smallsetminus B = \emptyset$. Naravno, $(A \cap C) \smallsetminus B = \emptyset$ ako i samo ako $A \cap C \subseteq B$.

Komentar. Rešenje korišćenjem algebarske normalne forme (Žegalkinovog polinoma) je *de facto* rešenje korišćenjem karakterističnih funkcija.

III način. Koristeći iskaznu logiku, dovoljno je dokazati da je formula:

$$[(a \veebar b) \vee (b \wedge c) \leftrightarrow ((a \wedge \neg c) \veebar b)] \leftrightarrow [a \wedge c \to b]$$

tautologija, što možemo da uradimo tablicom:

a	b	c	$[(a$	$\veebar$	$b)$	$\vee$	$(b$	$\wedge$	$c)$	$\leftrightarrow$	$((a$	$\wedge$	$\neg$	$c)$	$\veebar$	$b)]$	$\leftrightarrow$	$[a$	$\wedge$	c	$\to$	$b]$
T	T	T		N		T		T		T		N	N		T		T		T		T	
T	T	N		N		N		N		T		T	T		N		T		N		T	
T	N	T		T		T		N		N		N	N		N		T		T		N	
T	N	N		T		T		N		T		T	T		T		T		N		T	
N	T	T		T		T		T		T		N	N		T		T		N		T	
N	T	N		T		T		N		T		N	T		T		T		N		T	
N	N	T		N		N		N		T		N	N		N		T		N		T	
N	N	N		N		N		N		T		N	T		N		T		N		T	

♣

5. Dokazati da konačnih podskupova skupa $\mathbb{Z}$ ima prebrojivo mnogo.

Rešenje. Označimo sa $\mathcal{K}$ familiju svih konačnih podskupova od $\mathbb{Z}$. Očigledno je $\aleph_0 \leqslant |\mathcal{K}|$ (npr. funkcija data sa $n \mapsto \{n\}$ je očigledno $\mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathcal{K}$), pa je prema KŠB teoremi dovoljno da dokažemo $|\mathcal{K}| \leqslant \aleph_0$.

<u>I način</u>. Poznato je da je $\mathbb{Z}$ prebrojiv, pa postoji bijekcija $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. Poznato je i da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva; neka je $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz prostih brojeva. Definišemo funkciju $f : \mathcal{K} \to \mathbb{N}$ sa:

$$f(S) := \begin{cases} 0 & S = \emptyset \\ \displaystyle\prod_{t\in S} p_{\iota(t)} & S \neq \emptyset \end{cases}.$$

Primetimo da je f dobro definisana jer svaki neprazan $S \in \mathcal{K}$ je konačan pa je proizvod u gornjoj definiciji neprazan i konačan. Dovoljno je da primetimo da je f 1-1. Najpre, ako je $S \neq \emptyset$ očigledno $f(S) > 0$. Ako su S i T dva različita konačna podskupa od $\mathbb{Z}$, postoji ceo broj t u njihovoj simetričnoj razlici; bez umanjenja opštosti neka $t \in S$ i $t \notin T$. S obzirom da je ι bijekcija (dovoljno je što je 1-1) i po definiciji funkcije f, $p_{\iota(t)}$ učestvuje u proizvodu u $f(S)$ i ne učestvuje u proizvodu $f(T)$; dakle, $p_{\iota(t)} \mid f(S)$ i $p_{\iota(t)} \nmid f(T)$, pa $f(S) \neq f(T)$.

<u>II način</u>. Poznato je da je $\mathbb{Q}$ prebrojiv, pa je dovoljno da napravimo $g : \mathcal{K} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Q}$. Jedan način da to uradimo je sledeći. Za $S \in \mathcal{K}$, definišimo niz $(b_t^S)_{t\in\mathbb{Z}}$ sa:

$$b_t^S := \begin{cases} 0 & t \notin S \\ 1 & t \in S \end{cases}.$$

(Dakle, u pitanju je niz indeksiran sa $\mathbb{Z}$ koji na t-tom mestu ima 0 ako $t \notin S$, odnosno 1 ako $t \in S$.) Definišimo sada:

$$g(S) := \dots b_{-2}^S\, b_{-1}^S\, b_0^S\, ,\, b_1^S\, b_2^S\, b_3^S\, b_4^S \dots$$

Ovde, $g(S)$ je realan broj u decimalnom zapisu čije su cifre i decimale b_t^S, i gde smo decimalni zarez stavili između b_0^S i b_1^S. Drugačije rečeno:

$$g(S) := \sum_{t\in\mathbb{Z}} b_t^S \cdot 10^{-t}.$$

Kako je S konačan skup, u gornjem zapisu su skoro sve cifre (sve osim njih konačno mnogo) jednake 0. S obzirom da je „levi rep” u zapisu $g(S)$ skoro ceo nula, $g(S)$ jeste realan broj, a s obzirom da je „desni rep” u zapisu $g(S)$ skoro ceo nula, broj $g(S)$ zapravo ima konačno mnogo decimala, tj. $g(S) \in \mathbb{Q}$. Dakle, g je dobro definisana funkcija. Zbog jedinstvenosti zapisa nije teško videti da je g 1-1.

<u>Zadatak</u>. Modifikovati ideju iz prethodnog rešenja i napraviti npr. bijekciju $\mathcal{K} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ♣

6. Neka su P i Q unarni relacijski simboli. Odrediti model i kontramodel formule:

$$\varphi = \exists x\, P(x) \wedge \forall x(Q(x) \to \neg P(x)) \;\to\; \exists x\, Q(x) \vee \forall x\, P(x).$$

Rešenje. Model. S obzirom da je formula φ implikacija, dovoljno je da namestimo model u kome je njena leva strana netačna ili desna strana tačna. Namestićemo da je desna strana tačna. S obzirom da je desna strana disjunkcija, dovoljno je da je jedan disjunkt tačan. Dakle, dovoljno je da namestimo da je $\exists x\, Q(x)$ formula tačna u modelu. Možemo da uzmemo bilo koji domen i bilo koji predikat na domenu koji je zadovoljen sa bar jednim elementom. Npr. možemo da posmatramo $M = (\mathbb{N}, P^M, Q^M)$, gde je $Q^M(n) :=$ „n je paran broj", i gde je P^M bilo koji predikat na $\mathbb{N}$.

Kontramodel. Potrebno je da namestimo da u kontramodelu K leva strana φ-a bude tačna, a desna netačna. S obzirom da je leva strana konjunkcija, a desna disjunkcija moramo da namestimo da:

$$(1)\ \underbrace{\exists x\, P(x)}_{T} \qquad (2)\ \underbrace{\forall x(Q(x) \to \neg P(x))}_{T} \qquad (3)\ \underbrace{\exists x\, Q(x)}_{N} \qquad (4)\ \underbrace{\forall x\, P(x)}_{N}.$$

Da bi važilo (3) Q mora da bude uvek netačan predikat. Primetimo da ovo automatski povlači da važi (2) jer je implikacija sa netačnom levom stranom tačna. Da bi važilo (1) P mora da bude zadovoljiv, ali da bi važilo (4) P ne sme da bude uvek tačan; dakle, P mora biti nekad tačan i nekad netačan. Dakle, potrebna su nam bar dva elementa u domenu, i možemo baš da uzmemo $K = (\{a, b\}, P^K, Q^K)$, gde su P^K i Q^K dati tablicom:

	a	b
P^K	T	N
Q^K	N	N

Dakle, (1) važi zbog elementa a, (4) zbog elementa b, (3) važi jer je Q^K netačan i za a i za b, i iz istog razloga važi (2), pa je K kontramodel za φ. ♣