SKUPOVI

SLAVKO MOCONJA

Sadržaj

I. Uvod 1
II. Podskup 2
III. Osnovne skupovne operacije 3
IV. Veza za iskaznom logikom 7
V. Algebarska normalna forma 10
VI. Partitivni skup 12
VII. Dekartov proizvod 12

I. **Uvod.** Pojam *skupa* je osnovni pojam u matematici. U uobičajenom formalnom zasnivanju matematike skup je prvi pojam, pojam koji nema definiciju, čije se osobine aksiomatski opisuju. Aksiomatsko zasnivanje skupova izlazi van okvira kursa za prvu godinu studija, tako da ćemo se zadržati na nečemu što je intuitivno objašnjenje skupa, uvodeći osnovne operacije za manipulaciju sa skupovima.

1. **Definicija** (Intuitivna definicija skupa)**.** *Skup* je celina koja okuplja određeni broj objekata koje nazivamo elementima tog skupa.

Činjenicu da je objekat x element skupa A zapisujemo sa $x \in A$ (čitamo „x je element od A" ili „x pripada A"); u suprotnom, ako $\neg x \in A$, pišemo $x \notin A$ („x nije element od A" ili „x ne pripada A").

Ako je skup konačan, npr. skup koji sadrži brojeve 1, 2, 5 i 8, zapisujemo koristeći vitičaste zagrade između kojih navedemo njegove elemente: $\{1, 2, 5, 8\}$. Tada $2 \in \{1, 2, 5, 8\}$ znači da 2 jeste element skupa $\{1, 2, 5, 8\}$, dok $3 \notin \{1, 2, 5, 8\}$ znači da 3 nije element ovog skupa. Ako je skup konačan, ali ima previše elemenata da bi bilo racionalno sve ih navesti, možemo da ih nabrojimo koristeći $\ldots$ ako je to moguće, tj. ako je jasan šablon po kome smo elemente nabrojali. Npr. $\{2, 3, 4, \ldots, 17\}$ je skup prirodnih brojeva između 2 i 17 (uključujući ova dva broja), $\{1, 3, 5, \ldots, 997, 999\}$ je skup svih neparnih brojeva prve hiljade. Takođe, $\ldots$ možemo da koristimo i za zapis beskonačnih skupova koje je moguće nabrojati po nekom šablonu. Npr. $\{0, 2, 4, \ldots\}$ je skup svih parnih prirodnih brojeva, $\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$ je skup svih kvadrata prirodnih brojeva, $\{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ je skup svih neparnih celih brojeva, i sl.

Datum trenutne verzije: 14. novembar 2023.

Jedan od najčešćih načina za zapis skupa je zapis koji koristi tzv. *operator okupljanja*. To znači sledeće. Ako je $p(x)$ predikat gde x ima svoj univerzum diskursa, sa:

$$\{x \mid p(x)\} \quad \text{ili} \quad \{x \in \mathcal{U}_x \mid p(x)\}$$

obeležavamo skup svih elemenata univerzuma diskursa za koje važi predikat p. Npr. skup $\{n \in \mathbb{N} \mid \ 2 \mid n\}$ je skup svih prirodnih brojeva deljivih sa dva, tj. skup svih parnih prirodnih brojeva. Iako u praksi ovu vrstu zapisa koristimo vrlo slobodno bez bilo kakvih problema, formalno bi trebalo biti oprezan. Ako je naš predikat $X \notin X$, gde je univerzum diskursa promenljive X univerzum svih skupova, možemo da uočimo skup:

$$S = \{X \mid X \notin X\}.$$

Da li $S \in S$? Ako $S \in S$, onda S zadovoljava predikat koji ga opisuje, tj. $S \notin S$. Ako $S \notin S$, onda S zadovoljava predikat $X \notin X$, pa po definiciju skupa S imamo $S \in S$. Dakle, $S \in S$ ako i samo ako $S \notin S$. Ovo je kontradikcija. Ovaj primer zove se *Raselov paradoks*, koji je poslužio kao polazna motivacija za strogo zasnivanje koncepta skupa. Razrešenje Raselovog paradoksa je sledeće. Ne možemo da dozvolimo da je kolekcija S zapisana gore skup. Strogo zasnivanje dozvoljava formiranje skupa $\{x \mid p(x)\}$, pod uslovom da je poznato da univerzum diskursa promenljive x jeste skup. S tim u vezi, univerzum svih skupova ne može da postoji (tj. ne može da bude skup), kako bismo izbegli Raselov paradoks.

Još jedan od čestih načina zapisa skupa je i sledeći. Ako za elemente x skupa S imamo neki način f da izračunamo neku vrednost $f(x)$, sa $\{f(x) \mid x \in S\}$ obeležavamo skup svih elemenata $f(x)$ kad x ***prođe*** skup S. Npr. $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je još jedan način da zapišemo skup parnih brojeva.

2. **Definicija.** Skupovi A i B su jednaki, $A = B$, ako imaju iste elemente, tj. važi iskaz:

$$(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Jednakost skupova ima očekivana svojstva:

- $(\forall A)\ A = A$;
- $(\forall A, B)(A = B \to B = A)$;
- $(\forall A, B, C)(A = B \wedge B = C \to A = C)$.

3. **Definicija.** *Prazan skup*, u oznaci $\varnothing$, je skup koji nema elemente, tj. $(\forall x)\ x \notin \varnothing$.

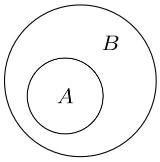
Po definiciji jednakosti dva skupa bez elemenata moraju biti jednaka, tako da je u redu da mu damo ime *prazan skup* i oznaku $\varnothing$.

II. **Podskup.**

4. **Definicija.** Neka su A i B skupovi. Kažemo da je A *podskup od* B ili B *je nadskup od* A, u oznaci $A \subseteq B$, ako su svi elementi skupa A ujedno i elementi skupa B, tj. važi iskaz:

$$(\forall x)(x \in A \to x \in B).$$

Skupovi su često zgodni za skiciranje, što u velikoj meri pomaže u razumevanju problema. Pa tako činjenicu da je $A \subseteq B$ možemo da skiciramo sa:



Skupove A i B skicirali smo kao krugove, zamišljamo da su elementi skupa A unutar kruga A, elementi skupa B unutar kruga B, pa činjenicu da je $A \subseteq B$ skiciramo tako što je krug A ceo unutar kruga B.

Po definiciji je jasno kako obično dokazujemo da je $A \subseteq B$. Najčešće uočimo proizvoljan element x, pretpostavimo $x \in A$ i ciljamo da dokažemo $x \in B$ (kombinacija postupka generalizacije i dedukcije). Možemo da dokažemo $A \subseteq B$ i kombinacijom postupka generalizacije i dedukcije kontrapozicije: uočimo proizvoljan element x, pretpostavimo $x \notin B$ i ciljamo da dokažemo $x \notin A$. Konačno, možemo da koristimo i kombinaciju postupka generalizacije i svođenja na protivrečnost: uočimo proizvoljan element x, pretpostavimo $x \in A$ i $x \notin B$, i ciljamo da nađemo kontradikciju.

Direktno po definiciji vidimo nekoliko osobina relacije podskupa:

- $(\forall A)\ \varnothing \subseteq A$;
- $(\forall A)\ A \subseteq A$;
- $(\forall A, B)(A \subseteq B \wedge B \subseteq A \leftrightarrow A = B)$;
- $(\forall A, B, C)(A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C)$.

Treća osobina nam najčešće služi za dokaz jednakosti dva skupa. Naima, ako želimo da dokažemo $A = B$, najčešće ćemo dokazati $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

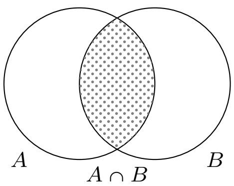
III. **Osnovne skupovne operacije.**

5. **Definicija.** *Presek* skupova A i B je skup zajedničkih elemenata skupova A i B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

tj. $x \in A \cap B$ akko $x \in A$ i $x \in B$.

Presek skupova A i B skiciramo sa (šrafiran deo):



Prethodna sličica, dva kruga koja se seku, zove se *Venov dijagram* za sva skupa. Na Venovom dijagramu možemo verno da predstavimo odnos dva skupa.

Po definiciji preseka lako vidimo nekoliko osnovnih osobina preseka:

- $(\forall A, B)\ A \cap B = B \cap A$;
- $(\forall A, B, C)\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

- $(\forall A, B)(A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B)$;
- specijalno, $(\forall A)\ \varnothing \cap A = \varnothing$ i $(\forall A)\ A \cap A = A$.

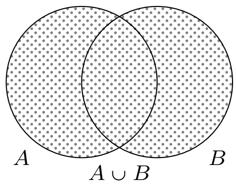
Zbog druge osobine, asocijativnosti preseka, zapis $A \cap B \cap C$, ili presek više od tri skupova, ima smisla i predstavlja skup zajedničkih elemenata svih skupova koji učestvuju u preseku.

6. **Definicija.** *Unija* skupova A i B je skup svih elemenata skupova A i B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

tj. $x \in A \cup B$ akko $x \in A$ ili $x \in B$.

Na Venovom dijagramu uniju skupova A i B skiciramo sa:



Po definiciji diretno imamo sledeće osnovne osobine unije:

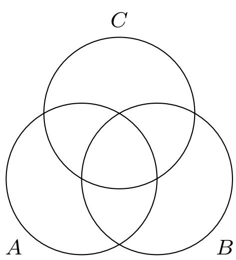
- $(\forall A, B)\ A \cup B = B \cup A$;
- $(\forall A, B, C)\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
- $(\forall A, B)(A \cup B = B \leftrightarrow A \subseteq B)$;
- specijalno, $(\forall A)\ \varnothing \cup A = A$ i $(\forall A)\ A \cup A = A$.

Zbog druge osobine, asocijativnosti unije, zapis $A \cup B \cup C$, ili unija više od tri skupova, ima smisla i predstavlja skup svih elemenata skupova koji učestvuju u uniji.

7. **Zadatak.** Dokazati sledeće osobine:

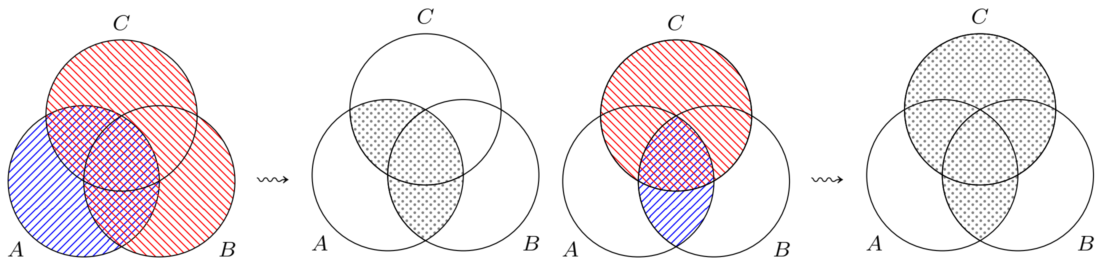
- $(\forall A, B)\ A \cap (A \cup B) = A$;
- $(\forall A, B)\ A \cup (A \cap B) = A$;
- $(\forall A, B, C)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $(\forall A, B, C)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Jednakosti u kojima učestvuju tri skupa možemo da vidimo i na Venovom dijagramu za tri skupa, koga skiciramo na sledeći način:



Svaki element možemo predstaviti na prethodnom dijagramu u jednoj od osam oblasti u zavisnosti da li pripada ili ne datim skupovima.

8. **Primer.** Za proizvoljne skupove A, B, C ispitaćemo u kom su odnosu skupovi $A \cap (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cup C$. Najpre ćemo da skiciramo ove skupove na Venovom dijagramu:



sečemo A i $B \cup C$ $\quad$ $A \cap (B \cup C)$ $\quad$ uniramo $A \cap B$ i C $\quad$ $(A \cap B) \cup C$

Venov dijagram nam sugeriše sledeću hipotezu:

$$(\forall A, B, C)\ A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C.$$

(Tj. levi skup je deo desnog skupa.) Dokažimo prethodnu inkluziju i formalno.

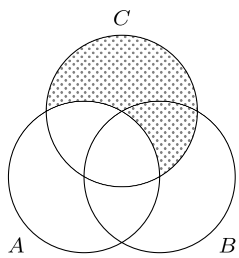
Neka su A, B, C proizvoljni skupovi, neka je x proizvoljan element i neka $x \in A \cap (B \cup C)$; cilj je da dokažemo $x \in (A \cap B) \cup C$. Iz $x \in A \cap (B \cup C)$, $x \in A$ i $x \in B \cup C$. Iz $x \in B \cup C$ imamo dva slučaja: $x \in B$ ili $x \in C$.

1° Ako $x \in B$, tada $x \in A \cap B$, pa $x \in (A \cap B) \cup C$.

2° Ako $x \in C$, tada $x \in (A \cap B) \cup C$.

U svakom slučaju $x \in (A \cap B) \cup C$, i završili smo dokaz.

Odrdedimo sada i neki jednostavan potreban i dovoljan uslov da važi jednakost $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$. Ako se vratimo na sliku, jednakost će važiti ako je sledeći skup prazan:



To znači da su jedini elementi skupa C oni koji već pripadaju skupu A, tj. $C \subseteq A$. Dakle, možemo da postavimo sledeću hipotezu:

$$(\forall A, B, C)(A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \leftrightarrow C \subseteq A).$$

Dajemo formalni dokaz. Neka su A, B, C proizvoljni skupovi.

($\Rightarrow$) Preptostavimo $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ i dokažimo $C \subseteq A$. Neka je $x \in C$ proizvoljan element, cilj je da dokažemo $x \in A$. Iz $x \in C$ sledi $x \in (A \cap B) \cup C$. Kako je $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$, imamo $x \in A \cap (B \cup C)$, pa specijalno $x \in A$. Time smo završili dokaz smera ($\Rightarrow$).

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $C \subseteq A$ i dokažimo $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$. Inkluzija ($\subseteq$) već smo dokazali u opštem slučaju, pa dokazujemo ($\supseteq$). Neka je $x \in (A \cap B) \cup C$ i cilj je da dokažemo $x \in A \cap (B \cup C)$. Iz $x \in (A \cap B) \cup C$ imamo dva slučaja $x \in A \cap B$ ili $x \in C$.

1° Ako $x \in A \cap B$, $x \in A$ i $x \in B$. Iz poslednjeg je i $x \in B \cup C$, pa imamo $x \in A \cap (B \cup C)$.

2° Ako $x \in C$, onda $x \in B \cup C$, ali i $x \in A$ jer $C \subseteq A$. Dakle, opet je $x \in A \cap (B \cup C)$.

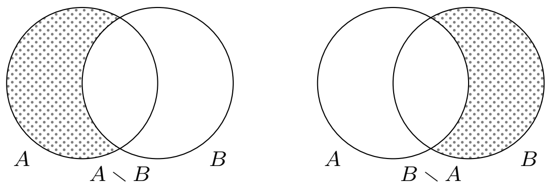
U svakom slučaju je $x \in A \cap (B \cup C)$, i završili smo dokaz.

9. **Definicija.** *Razlika* skupova A i B (tim redom) je skup elemenata iz A koji nisu u B:

$$A \smallsetminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$

tj. $x \in A \smallsetminus B$ akko $x \in A$ i $x \notin B$.

Na Venovom dijagramu razlike $A \smallsetminus B$ i $B \smallsetminus A$ skiciramo sa:



Prethodna skica već sugeriše da komutativan zakon $A \smallsetminus B = B \smallsetminus A$ ne važi u opštem slučaju (zapravo nije teško videti da $A \smallsetminus B = B \smallsetminus A$ važi akko $A = B$).

Od osnovnih osobina izdvajamo:

- $(\forall A, B)(A \smallsetminus B = \varnothing \leftrightarrow A \subseteq B)$;
- $(\forall A, B)\ A \smallsetminus B = A \smallsetminus (A \cap B) = (A \cup B) \smallsetminus B$;
- $A \smallsetminus (B \cap C) = (A \smallsetminus B) \cup (A \smallsetminus C)$;
- $A \smallsetminus (B \cup C) = (A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus C)$;
- $(A \cap B) \smallsetminus C = (A \smallsetminus C) \cap (B \smallsetminus C)$;
- $(A \cup B) \smallsetminus C = (A \smallsetminus C) \cup (B \smallsetminus C)$.

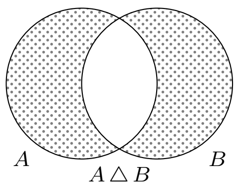
10. **Zadatak.** Ispitati u kom su odnosu skupovi $A \smallsetminus (B \smallsetminus C)$ i $(A \smallsetminus B) \smallsetminus C$ u opštem slučaju. Odrediti neki jednaostavan potreban i dovoljan uslov da važi jednakost.

11. **Definicija.** *Simetrična razlika* skupova A i B je skup onih elemenata koji su u tačnon jednom od ovih skupova:

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\},$$

tj. $x \in A \triangle B$ akko ili $x \in A$ ili $x \in B$.

Venov dijagram simetrične razlike je:



Od osnovnih osobina izdvajamo:

- $(\forall A, B)\ A \triangle B = B \triangle A$;
- $(\forall A, B, C)\ A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$;
- $(\forall A, B)\ A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

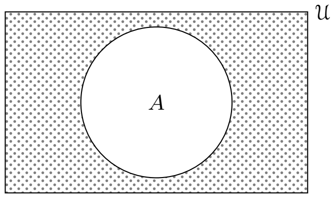
Prema drugoj osobini, asocijativnosti simetrične razlike, zapis $A \triangle B \triangle C$, kao i simetrična razlika više od tri skupova, ima smisla. Element pripada simetričnoj razlici nekog broja skupova akko je element neparno mnogo od njih.

12. **Definicija.** *Komplement* skupa A je skup svih elemenata koji nisu u A (ali jesu u unapred poznatom podrazumevanom univerzumu):

$$A^c = \{x \mid x \notin A\},$$

tj. $x \in A^c$ akko $x \notin A$, za bilo koji element x iz univerzuma. Dakle, A^c računamo relativno u odnosu na podrazumevani univerzum, i tada možemo da zapišemo $A^c = \mathcal{U} \setminus A$. U formalnom zasnivanju skupova, apsolutni komplement ne može da postoji.

Simetričnu razliku skiciramo sa:



$A^c = \mathcal{U} \setminus A$

Od osobina izdvajamo:

- $(\forall A)\ (A^c)^c = A$;
- $(\forall A, B)\ A \setminus B = A \cap B^c$;
- $(\forall A, B)\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
- $(\forall A, B)\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
- $(\forall A, B)\ (A \triangle B)^c = A^c \triangle B^c$.

IV. **Veza za iskaznom logikom.** Fiksirajmo simbole za skupove $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Skupovni izraz nad ovim simbolima rekurentno gradimo u konačno mnogo koraka na sledeći način:

- svaki simbol A_i je skupovni izraz;
- ako su σ_1 i σ_2 već izgrađeni skupovni izrazi, onda su i $\sigma_1 \cap \sigma_2$, $\sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma_1 \setminus \sigma_2$, $\sigma_1 \triangle \sigma_2$ i σ_1^c skupovni izrazi.

Složenost skupovnog izraza σ, sl(σ), je broj skupovnih operacija u izrazu σ, npr. sl$(A_1) = 0$, sl$(A_1 \setminus A_2) = 1$, sl$((A_1 \setminus A_2^c) \triangle A_1) = 3$, itd.

Svakom skupovnom izrazu σ nad simbolima $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pridružujemo iskaznu formulu $\hat{\sigma}$ nad slovima $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (iskazno slovo p_i odgovara skupovnom simbolu A_i) rekurentno na sledeći način:

- ako je $\sigma = A_i$, onda je $\hat{\sigma} = p_i$;
- ako je $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2$, onda je $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \hat{\sigma}_2$;
- ako je $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, onda je $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \vee \hat{\sigma}_2$;

- ako je $\sigma = \sigma_1 \smallsetminus \sigma_2$, onda je $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \neg\hat{\sigma}_2$;
- ako je $\sigma = \sigma_1 \triangle \sigma_2$, onda je $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \veebar \hat{\sigma}_2$;
- ako je $\sigma = \sigma_1^c$, onda je $\hat{\sigma} = \neg\hat{\sigma}_1$

Npr. izrazu $(A_1 \smallsetminus A_2^c) \triangle A_1$ pridružimo $(p_1 \wedge \neg\neg p_2) \veebar p_1$, izrazu $(A_2 \cap A_3)^c \cup A_5$ pridružimo $\neg(p_2 \wedge p_3) \vee p_5$, itd.

Fiksirajmo sada konkretne skupove $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Elementom x određena je sledeća valuacija v_x:

$$v_x(p_i) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako } x \in A_i \\ \mathbf{n} & \text{ako } x \notin A_i \end{cases}.$$

Primetimo da valuacija v_x ne zavisi samo od x, već i od izbora $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ali kako smo njih fiksirali, nećemo ih naglašavati u zapisu. Uvek će biti jasno u odnosu na koje skupove smo definisali v_x.

13. **Lema.** *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_k$ proizvoljni skupovi, x proizvoljan element i σ proizvoljan izraz nad $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Tada:*

$$x \in \sigma \iff \hat{v}_x(\hat{\sigma}) = \mathbf{t}.$$

Dokaz. Fiksirajmo $A_1, A_2, \ldots, A_k$ i x. Potpunom indukcijom po složenosti izraza σ izvodimo dokaz. Razmatramo sledeće slučajeve:

1° $\underline{\sigma = A_i}$: Tada je $\hat{\sigma} = p_i$, pa je:

$$x \in \sigma \iff x \in A_i \iff v_x(p_i) = \mathbf{t} \iff \hat{v}_x(\hat{\sigma}) = \mathbf{t},$$

i tvrđenje važi u ovom slučaju.

2° $\underline{\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2}$: Tada je $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \hat{\sigma}_2$. Po indukcijskoj hipotezi imamo $x \in \sigma_1 \iff \hat{v}_x(\hat{\sigma}_1) = \mathbf{t}$ i $x \in \sigma_2 \iff \hat{v}_x(\hat{\sigma}_2) = \mathbf{t}$, pa:

$$x \in \sigma \iff x \in \sigma_1 \text{ i } x \in \sigma_2 \iff \hat{v}_x(\hat{\sigma}_1) = \mathbf{t} \text{ i } \hat{v}_x(\hat{\sigma}_2) = \mathbf{t} \iff \hat{v}_x(\underbrace{\hat{\sigma}_1 \wedge \hat{\sigma}_2}_{=\hat{\sigma}}) = \mathbf{t},$$

i tvrđenje važi i u ovom slučaju.

Na sličan način dokazujemo da tvrđenje važi i u slučajevima 3° $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, 4° $\sigma = \sigma_1 \smallsetminus \sigma_2$, 5° $\sigma = \sigma_1 \triangle \sigma_2$ i 6° $\sigma = \sigma_1^c$, čime završavamo dokaz. Ω

14. **Zadatak.** Završiti dokaz prethodne leme.

15. **Teorema.** *Neka su σ_1 i σ_2 dva skupovna izraza nad $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Tada:*

(i) $(\forall A_1, A_2, \ldots, A_k)$ $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ *akko* $\models \hat{\sigma}_1 \to \hat{\sigma}_2$;
(ii) $(\forall A_1, A_2, \ldots, A_k)$ $\sigma_1 = \sigma_2$ *akko* $\models \hat{\sigma}_1 \leftrightarrow \hat{\sigma}_2$.

Dokaz. (i) $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo $(\forall A_1, \ldots, A_k)$ $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ i dokažimo $\models \hat{\sigma}_1 \to \hat{\sigma}_2$. Pretpostavimo suprotno, postoji valuacija v takva da $\hat{v}(\hat{\sigma}_1 \to \hat{\sigma}_2) = \mathbf{n}$, tj. $\hat{v}(\hat{\sigma}_1) = \mathbf{t}$ i $\hat{v}(\hat{\sigma}_2) = \mathbf{n}$. Izaberimo proizvoljan element x i pridružimo valuaciji v sledeće skupove $A_1, \ldots, A_k$:

$$A_i = \begin{cases} \{x\} & \text{ako } v(p_i) = \mathbf{t} \\ \varnothing & \text{ako } v(p_i) = \mathbf{n} \end{cases}.$$

Elementu x i skupovima $A_1, \ldots, A_k$ sada možemo da pridružimo valuaciju v_x kako smo opisali ranije. Primetimo $v_x = v$. (Zaista, ako je $v(p_i) = $ **t**, $A_i = \{x\}$, pa $x \in A_i$, pa je $v_x(p_i) = $ **t**; ako je $v(p_i) = $ **n**, $A_i = \emptyset$, pa $x \notin A_i$, pa je $v_x(p_i) = $ **n**. Dakle, $v(p_i) = v_x(p_i)$.)

Dakle, $\hat{v}_x(\hat{\sigma}_1) = $ **t** i $\hat{v}_x(\hat{\sigma}_2) = $ **n**, pa po lemi 13, $x \in \sigma_1$ i $x \notin \sigma_2$. To znači da $\sigma_1 \nsubseteq \sigma_2$, što nije moguće jer $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ po pretpostavci važi za proizvoljne skupove $A_1, \ldots, A_k$. Ova kontradikcija završava dokaz prvog smera.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo $\models \hat{\sigma}_1 \to \hat{\sigma}_2$ i dokažimo $(\forall A_1, \ldots, A_k)\ \sigma_1 \subseteq \sigma_2$. Neka su $A_1, \ldots, A_k$ proizvoljni skupovi, i neka je $x \in \sigma_1$ proizvoljno. Tada je $\hat{v}_x(\hat{\sigma}_1) = $ **t** po lemi 13, pa kako je $\models \hat{\sigma}_1 \to \hat{\sigma}_2$ to je i $\hat{v}_x(\hat{\sigma}_2) = $ **t**, odakle je $x \in \sigma_2$, opet po lemi 13. Prema tome, $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$.

(ii) sledi direktno prema (i) imajući u vidu da je $\sigma_1 = \sigma_2$ akko $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ i $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$, i $\models \hat{\sigma}_1 \leftrightarrow \hat{\sigma}_2$ akko $\models \hat{\sigma}_1 \to \hat{\sigma}_2$ i $\models \hat{\sigma}_2 \to \hat{\sigma}_1$. Ω

16. **Primer.** Da bismo dokazali da je $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$ za proizvoljne skupove A, B, C, prema teoremi 15 dovoljno je da dokažemo:

$$\models (p \wedge \neg q) \wedge \neg r \to p \wedge \neg(q \wedge \neg r),$$

gde skupovima A, B, C redom dodelimo slova p, q, r. Prethodno možemo da poverimo tablicom:

p	q	r	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\wedge$	$\neg$	r	$\to$	p	$\wedge$	$\neg$	$(q$	$\wedge$	$\neg$	$r)$
t	**t**	**t**		**n**	**n**		**n**	**n**		**t**		**t**	**t**		**n**	**n**	
t	**t**	**n**		**n**	**n**		**n**	**t**		**t**		**n**	**n**		**t**	**t**	
t	**n**	**t**		**t**	**t**		**n**	**n**		**t**		**t**	**t**		**n**	**n**	
t	**n**	**n**		**t**	**t**		**t**	**t**		**t**		**t**	**t**		**n**	**t**	
n	**t**	**t**		**n**	**n**		**n**	**n**		**t**		**n**	**t**		**n**	**n**	
n	**t**	**n**		**n**	**n**		**n**	**t**		**t**		**n**	**n**		**t**	**t**	
n	**n**	**t**		**n**	**t**		**n**	**n**		**t**		**n**	**t**		**n**	**n**	
n	**n**	**n**		**n**	**t**		**n**	**t**		**t**		**n**	**t**		**n**	**t**	

Razmotrimo obratnu inkluziju $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$. Formula koja joj odgovara je:

$$p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \to (p \wedge \neg q) \wedge \neg r.$$

Tablica ove formule je:

p	q	r	p	$\wedge$	$\neg$	$(q$	$\wedge$	$\neg$	$r)$	$\to$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\wedge$	$\neg$	r
t	**t**	**t**		**t**	**t**		**n**	**n**		**n**		**n**	**n**		**n**	**n**	
t	**t**	**n**		**n**	**n**		**t**	**t**		**t**		**n**	**n**		**n**	**t**	
t	**n**	**t**		**t**	**t**		**n**	**n**		**n**		**t**	**t**		**n**	**n**	
t	**n**	**n**		**t**	**t**		**n**	**t**		**t**		**t**	**t**		**t**	**t**	
n	**t**	**t**		**n**	**t**		**n**	**n**		**t**		**n**	**n**		**n**	**n**	
n	**t**	**n**		**n**	**n**		**t**	**t**		**t**		**n**	**n**		**n**	**t**	
n	**n**	**t**		**n**	**t**		**n**	**n**		**t**		**n**	**t**		**n**	**n**	
n	**n**	**n**		**n**	**t**		**n**	**t**		**t**		**n**	**t**		**n**	**t**	

Jasno je da prethodna formula nije tautologija, pa prema teoremi 15 gornja inkluzija ne važi za proizvoljne A, B, C. Međutim, tablica može da nam pomogne da odredimo neki jednostavan potreban i dovoljan uslov da inkluzija važi. Naime, pridružena formula je netačna u valuacijama $(\mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{t})$ i $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{t})$, pa prema lemi 13 ne smemo da imamo element x za koji je v_x jedna od ove dve valuacije. Dakle, ne smemo da imamo element koji je i u A i u B i u C, kao ni element koji je u A i C, ali nije u B. Dakle, ne smemo da imamo element koji je u A i C, tj. mora biti $A \cap C = \varnothing$. I zaista, sad možemo da dokažemo sledeće:

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C \iff A \cap C = \varnothing.$$

Dokaz ostavljamo za vežbu.

17. **Primer.** Koristeći teoremu 15 možemo da dokažemo i identitet $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ koji ćemo koristiti u sledećem odeljku. Dovoljno je da proverimo:

$$\models p \wedge (q \veebar r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \veebar (p \wedge r)).$$

I ovo vidimo iz tablice:

p	q	r	p	$\wedge$	$(q$	$\veebar$	$r)$	$\leftrightarrow$	$((p$	$\wedge$	$q)$	$\veebar$	$(p$	$\wedge$	$r))$
t	**t**	**t**		**n**		**n**		**t**		**t**		**n**		**t**	
t	**t**	**n**		**t**		**t**		**t**		**t**		**t**		**n**	
t	**n**	**t**		**t**		**t**		**t**		**n**		**t**		**t**	
t	**n**	**n**		**n**		**n**		**t**		**n**		**n**		**n**	
n	**t**	**t**		**n**		**n**		**t**		**n**		**n**		**n**	
n	**t**	**n**		**n**		**t**		**t**		**n**		**n**		**n**	
n	**n**	**t**		**n**		**t**		**t**		**n**		**n**		**n**	
n	**n**	**n**		**n**		**n**		**t**		**n**		**n**		**n**	

V. **Algebarska normalna forma.** Sada ćemo prikazati jedan aritmetički način za zapis i račun sa skupovnim izrazima. Najpre definišimo zbir i proizvod dva skupa:

$$\begin{aligned} A + B &:= A \triangle B \\ A \cdot B &:= A \cap B \end{aligned}$$

Takođe, definišimo $0 := \varnothing$ i $1 := \mathcal{U}$, gde $\mathcal{U}$ univerzum iz koga izdvajamo sve skupove o kojima govorimo.

Kao i obično, umesto $A \cdot B$ pišemo samo AB. Koristeći $+$ i $\cdot$ možemo da predstavimo i ostale skupovne operacije:

$$\begin{array}{rclcrcl} A^c &=& 1 + A & \text{jer} & A^c &=& \mathcal{U} \triangle A \\ A \setminus B &=& A + AB & \text{jer} & A \setminus B &=& A \triangle (A \cap B) \\ A \cup B &=& A + B + AB & \text{jer} & A \cup B &=& A \triangle B \triangle (A \cap B) \end{array}$$

Već znamo da su $+$ i $\cdot$ (tj. $\triangle$ i $\cap$) komutativne i asocijativne operacije (zbog asocijativnosti $+$ ne navodimo zagrade u gornjem zapisu), i takođe izbegavamo da pišemo zagrade podrazumevajući, kao što je i uobičajeno, da je $\cdot$ prioritetnija operacija u odnosu na $+$.

Ovako definisano množenje i sabiranje imaju sva očekivana svojstva. Pored već navedene komutativnosti i asocijativnosti naglasimo i:

$$\begin{array}{rclcrcl} A+0 &=& A & \text{jer} & A\triangle\varnothing &=& A\\ A\cdot 0 &=& 0 & \text{jer} & A\cap\varnothing &=& \varnothing\\ A\cdot 1 &=& A & \text{jer} & A\cap\mathcal{U} &=& A\\ A(B+C) &=& AB+AC & \text{jer} & A\cap(B\triangle C) &=& (A\cap B)\triangle(A\cap C)\end{array}$$

Što se tiče treće osobine, setimo se da je $\mathcal{U}$ univerzum, pa je $A\subseteq\mathcal{U}$, a što se tiče četvrte osobine, odgovarajući identitet dokazali smo na kraju prethodnog odeljka.

Pored navedenih svojstava, definisano sabiranje i množenje imaju i dodatne osobine:

$$\begin{array}{rcccccrcl} 2A &=& A+A &=& 0 & \text{jer} & A\triangle A &=& \varnothing\\ A^2 &=& A\cdot A &=& A & \text{jer} & A\cap A &=& A\end{array}$$

18. **Zadatak.** Proveriti sve navedene osobine korišćene u prethodnim pasusima.

19. **Definicija.** *Skupovni monom* nad skupovima $A_1, A_2, \ldots, A_k$ je ili 1 ili proizvod nekoliko od ovih skupova, npr. A_4, A_1A_2, $A_2A_3A_k$, itd. Skupovni izraz σ nad $A_1, A_2, \ldots, A_k$ je u *algebarskoj normalnoj formi* ili *ANF* ako je zbir različitih skupovnih monoma, npr. $1+A_1A_2$, $A_4+A_2A_3A_k$, itd. Za skupovni izraz u ANF još kažemo da je u obliku *Žegalkinovog polinoma*.

Svaki skupovni izraz može se svesti na ANF koristeći jednakosti navedene gore. Do na raspored sabiraka ANF je jedinstvena, pa možemo da dokažemo identitet $\sigma_1=\sigma_2$ ako dokažemo da su ANF izraza σ_1 i σ_2 jednake. Takođe, možemo da dokažemo $\sigma_1\subseteq\sigma_2$ ako dokažemo ekvivalentnu jedankost $\sigma_1\sigma_2=\sigma_1$.

20. **Primer.** Zapišimo ANF izraza $\sigma_1=(A\smallsetminus B)\smallsetminus C$:

$$\sigma_1=(A+AB)\smallsetminus C=A+AB+(A+AB)C=A+AB+AC+ABC.$$

Zapišimo i ANF izraza $\sigma_2=A\smallsetminus(B\smallsetminus C)$:

$$\sigma_2=A+A(B\smallsetminus C)=A+A(B+BC)=A+AB+ABC.$$

Primetimo da dobijene ANF nisu jednake, pa $\sigma_1=\sigma_2$ ne važi u opštem slučaju. Takođe primetimo da jednakost važi akko $AC=0$ (višak monom u σ_1), tj. akko $A\cap C=\varnothing$.

Pomnožimo σ_1 i σ_2:

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_2 &= (A+AB+AC+ABC)(A+AB+ABC)=\\ &= A^2+A^2B+A^2BC+A^2B+A^2B^2+A^2B^2C+\\ &\quad +A^2C+A^2BC+A^2BC^2+A^2BC+A^2B^2C+A^2B^2C^2=\\ &= A+AB+ABC+AB+AB+ABC+\\ &\quad +AC+ABC+ABC+ABC+ABC+ABC=\\ &= A+3AB+AC+7ABC=A+AB+AC+ABC=\sigma_1,\end{aligned}$$

gde smo iskoristili $A^2=A$, $B^2=B$, $C^2=C$, $2AB=0$ i $2ABC=0$. Kako je $\sigma_1\sigma_2=\sigma_1$, to znači da uvek važi $\sigma_1\subseteq\sigma_2$.

21. **Primer.** Dokažimo identitet $(A^c \cup (A^c \smallsetminus B))^c = A$ koristeći ANF. Računamo:

$$(A^c \cup (A^c \smallsetminus B))^c = 1+((1+A)\cup((1+A)\smallsetminus B)) = 1+((1+A)\cup(1+A+(1+A)B)) =$$
$$= 1+((1+A)\cup(1+A+B+AB)) = 1+1+A+1+A+B+AB+(1+A)(1+A+B+AB) =$$
$$3+2A+B+AB+1+A+B+AB+A+A+AB+AB = 4+5A+2B+4AB = A,$$

gde smo implicitno koristili $A^2 = A$, i gde $4 = 0$, $4A = 0$, $2B = 0$ i $4AB = 0$.

VI. **Partitivni skup.**

22. **Definicija.** *Partitivni skup* skupa A, $\mathcal{P}(A)$, je skup svih podskupova od A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\},$$

tj. $X \in \mathcal{P}(A)$ akko $X \subseteq A$.

Npr. podskupovi skupa $\{1, 2, 3\}$ su: prazan skup, tri jednočlana podskupa $\{1\}$, $\{2\}$ i $\{3\}$, tri dvočlana podskupa $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ i $\{2, 3\}$, i jedan tročlan podskup – ceo skup $\{1, 2, 3\}$. Dakle:

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\ \}.$$

Jedini podskup praznog skupa je prazan skup: $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Primetite da poslednji skup nije prazan, on ima jedan element – prazan skup. Skup $\{\varnothing\}$ je jednočlan, pa ima dva podskupa: $\varnothing$ i $\{\varnothing\}$, tj. $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\ \varnothing, \{\varnothing\}\ \}$. Takođe, dvočlani skup $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ ima podskupove: prazan skup, dva jednočlana podskupa $\{\varnothing\}$ i $\{\{\varnothing\}\}$ i jedan dvočlan podskup – ceo skup $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$:

$$\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\ \varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\ \}.$$

23. **Zadatak.** Dokazati da je $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

24. **Zadatak.** Dokazati da je $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, kao i da jednakost važi akko $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A$.

25. **Zadatak.** Ako je A konačan skup sa n elemenata, dokazati da $\mathcal{P}(A)$ ima 2^n elemenata.

VII. **Dekartov proizvod.**

26. **Definicija.** *Uređeni par* elemenata a i b je matematički objekat, obično obeležen sa (a, b), koji zadovoljava sledeću osobinu:

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'.$$

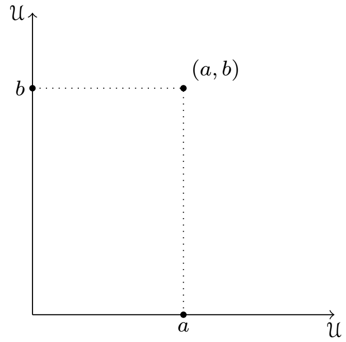
Formalno, uređeni par može da se definiše kao $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, i nije teško proveriti da ovako definisani objekat zadovoljava prethodnu osobinu, ali zaista formalna definicija uređenog para nam nije od značaja, jedino bitno je navedena osobina.

Element a u paru (a, b) je *prva koordinata* ili *prva komponenta* para, a element b je *druga koordinata* ili *druga komponenta* para.

Na sličan način definišemo i *uređenu n-torku* ili *vektor* elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$. To je objekat $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koji zadovoljava osobinu:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n.$$

Ako elementi u uređenim parovima žive u univerzumu $\mathcal{U}$, par (a, b) možemo predstaviti na uobičajen način u ravni:



Koordinatne ose su univerzum $\mathcal{U}$, a uređen par je tačka u ravni koja se projektuje u svoje koordinate na koordinatnim osama.

27. **Definicija.** *Dekartov proizvod* skupova A i B je skup:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

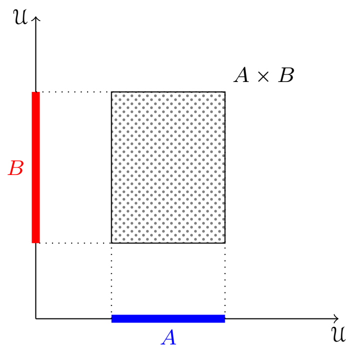
Slično, *Dekartov proizvod* skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je skup:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Npr. Ako je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b, c\}$, $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$, a $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

28. **Zadatak.** Ako skup A ima m, a skup B ima n elemenata, dokazati da $A \times B$ ima mn elemenata.

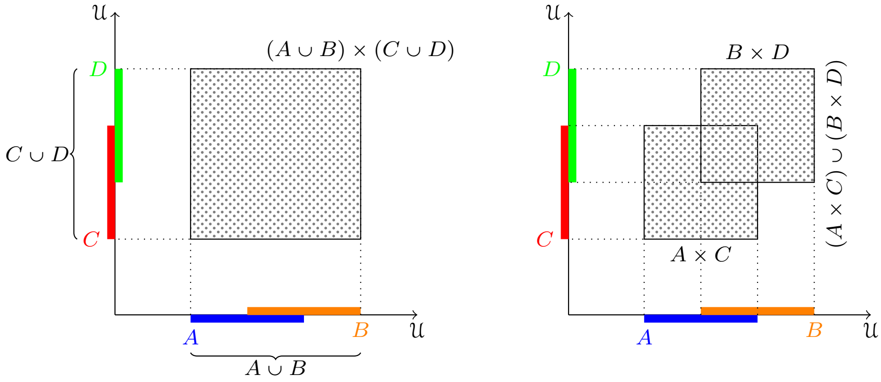
Dekartov proizvod predstavljamo na slici kao pravougaonik na sledeći način:



29. **Zadatak.** Dokazati:

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
- $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$.

30. **Primer.** Ispitajmo u kom su odnosu skupovi $(A \cup B) \times (C \cup D)$ i $(A \times C) \cup (B \times D)$. Skicirajmo date skupove:



Slika nam sugeriše sledeću hipotezu: u opštem slučaju važi:

$$(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D).$$

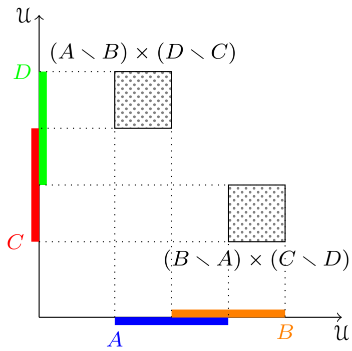
Dokažimo je i formalno. Neka je $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$ proizvoljan uređen par. Tada imamo dva slučaja: $(x, y) \in A \times C$ ili $(x, y) \in B \times D$.

1° Ako $(x, y) \in A \times C$, tada $x \in A$ i $y \in C$, pa sigurno $x \in A \cup B$ i $y \in C \cup D$, odakle $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$.

2° Ako $(x, y) \in B \times D$, tada $x \in B$ i $y \in D$, pa ponovo $x \in A \cup B$ i $y \in C \cup D$, odakle $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$.

U svakom slučaju $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$, što znači da smo dokazali željenu inkluziju.

Razmotrimo i uslove pod kojima važi jednakost. Slika nam sugeriše da bi sledeće oblasti trebalo da su prazne:



Primetimo:

$$\begin{array}{ll} & (A \setminus B) \times (D \setminus C) = \emptyset \ \text{ i } \ (B \setminus A) \times (C \setminus D) = \emptyset \\ \text{akko} & (A \setminus B = \emptyset \ \text{ ili } \ D \setminus C = \emptyset) \ \text{ i } \ (B \setminus A = \emptyset \ \text{ ili } \ C \setminus D = \emptyset) \\ \text{akko} & (A \subseteq B \ \text{ ili } \ D \subseteq C) \ \text{ i } \ (B \subseteq A \ \text{ ili } \ C \subseteq D) \\ \text{akko} & (A \subseteq B \ \text{ i } \ B \subseteq A) \ \text{ ili } \ (A \subseteq B \ \text{ i } \ C \subseteq D) \ \text{ ili } \\ & (D \subseteq C \ \text{ i } \ B \subseteq A) \ \text{ ili } \ (D \subseteq C \ \text{ i } \ C \subseteq D) \\ \text{akko} & A = B \ \text{ ili } \ (A \subseteq B \ \text{ i } \ C \subseteq D) \ \text{ ili } \ (D \subseteq C \ \text{ i } \ B \subseteq A) \ \text{ ili } \ C = D. \end{array}$$

Dakle, hipoteza je: Jednakost $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$ važi akko važi bar jedno od:

- $A = B$;
- $C = D$;
- $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$;
- $B \subseteq A$ i $D \subseteq C$.

Dokažimo je i formalno.

Smer ($\Rightarrow$) dokazaćemo kontrapozicijom. Pretpostavimo da ne važi nijedna od ponuđenih opcija. Dakle, $A \neq B$, $C \neq D$, ($A \nsubseteq B$ ili $C \nsubseteq D$) i ($B \nsubseteq A$ ili $D \nsubseteq C$). Iz $A \neq B$ preptostavićemo da imamo element x takav da $x \in A$ i $x \notin B$; obratan slučaj je simetričan. Svakako $x \in A \cup B$. Iz $C \neq D$ imamo dva slučaja:

1° Imamo element y takav da $y \in C$ i $y \notin D$; svakako $y \in C \cup D$. Iz četvrtog uslova, $B \nsubseteq A$ ili $D \nsubseteq C$ razmotrićemo dva podslučaja:

$1^\circ 1^\circ$ Važi $B \nsubseteq A$. Tada postoji i element x' takav da $x' \in B$ i $x' \notin A$; svakako $x' \in A \cup B$. Svakako $(x', y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$. Međutim, $(x', y) \notin A \times C$ jer $x' \notin A$, ali i $(x', y) \notin B \times D$ jer $y \notin D$. Prema tome, $(x', y) \notin (A \times C) \cup (B \times D)$, pa $(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$.

$1^\circ 2^\circ$ Važi $D \nsubseteq C$. Tada postoji i element y' takav da $y' \in D$ i $y' \notin C$; svakako $y' \in C \cup D$. Svakako $(x, y') \in (A \cup B) \times (C \cup D)$. Međutim, $(x, y') \notin A \times C$ jer $y' \notin C$, ali i $(x, y') \notin B \times D$ jer $x \notin B$. Prema tome, $(x, y') \notin (A \times C) \cup (B \times D)$, pa $(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$.

2° Imamo element y takav da $y \notin C$ i $y \in D$; svakako $y \in C \cup D$. Tada $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$. Međutim, $(x, y) \notin A \times C$ jer $y \notin C$, ali i $(x, y) \notin B \times D$ jer $x \notin B$. Prema tome, $(x, y) \notin (A \times C) \cup (B \times D)$, pa $(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$.

U svakom slučaju $(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$, čime smo dokazali prvi smer.

($\Leftarrow$) Inkluziju $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$ dokazali smo u opštem slučaju, pa treba da dokažemo samo obratnu inkluziju. Razmotrićemo sva četiri slučaja.

1° Pretpostavimo $A = B$. Neka je $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$ proizvoljan par. Kako je $A = B$, $x \in A \cup B$ povlači $x \in A$ i $x \in B$. Iz $y \in C \cup D$ imamo dva podslučaja:

$1^\circ 1^\circ$ Ako $y \in C$, tada $(x, y) \in A \times C$, pa i $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$.

$1^\circ 2^\circ$ Ako $y \in D$, tada $(x, y) \in B \times D$, pa i $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$.

U oba podslučaja, $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$, što završava dokaz u slučaju 1°.

2° Slučaj $C = D$ razmatramo analogno kao 1°. Detalje ostavljamo za vežbu.

3° Pretpostavimo $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$. Neka je $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$ proizvoljan par. Kako je $A \subseteq B$, $A \cup B = B$, pa $x \in B$. Kako je $C \subseteq D$, $C \cup D = D$, pa $y \in D$. Dakle, $(x, y) \in B \times D$, pa i $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$, što završava slučaj 3°.

4° Slučaj $B \subseteq A$ i $D \subseteq C$ razmatramo analogno kao 3°. Detalje ostavljamo za vežbu.

Završili smo dokaz i drugog smera.

31. **Zadatak.** Ispitati odnos između skupova:

- $(A \cap B) \times (C \cap D)$ i $(A \times C) \cap (B \times D)$;
- $(A \smallsetminus B) \times (C \smallsetminus D)$ i $(A \times C) \smallsetminus (B \times D)$;
- $(A \triangle B) \times (C \triangle D)$ i $(A \times C) \triangle (B \times D)$.