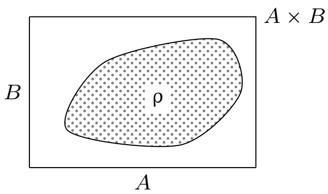
BINARNE RELACIJE

SLAVKO MOCONJA

Sadržaj

I. Uvod.

1. Definicija. *Binarna relacija između skupova A i B* je bilo koji podskup $\rho \subseteq A \times B$.



Ako par (a, b) pripada relaciji ρ, $(a, b) \in \rho$, običaj je da to zapisujemo sa $a \; \rho \; b$ i čitamo „a je u relaciji ρ sa b". Sa druge strane, ako $(a, b) \notin \rho$, običaj je da pišemo $a \not\rho \; b$ i čitamo „a nije u relaciji ρ sa b".

Ako je $A = B$, tj. ako je $\rho \subseteq A \times A$, kažemo da je ρ *binarna relacija na skupu A*.

U slučaju da su skupovi A i B konačni, relaciju ρ između skupova A i B možemo da predstavimo *matricom relacije*, tj. tablicom čije su vrste označene elementima skupa A, a kolone elementima skupa B, i u polju indeksiranim sa $a \in A$ i $b \in B$ upišemo istinitosnu vrednost (**t** ili **n**) iskaza $a \; \rho \; b$. Takođe, ρ možemo da skiciramo *grafom relacije*. Naime, ako je element $a \in A$ u relaciji ρ sa elementom $b \in B$, $a \; \rho \; b$, crtamo to kao strelicu $a \to b$, dok u slučaju $a \not\rho \; b$, ne crtamo ništa.

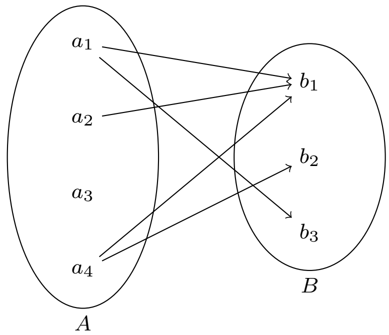
Datum trenutne verzije: 26. novembar 2023.

2. **Primer.** Neka su $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ i $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Primer relacije ρ između A i B je relacija:

$$\rho = \{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_4, b_1), (a_4, b_2)\}.$$

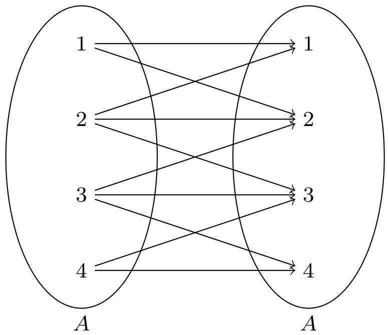
Činjenicu da npr. $(a_1, b_1) \in \rho$ zapisujemo sa $a_1 \mathrel{\rho} b_1$, a da npr. $(a_1, b_2) \notin \rho$ zapisujemo sa $a_1 \not\mathrel{\rho} b_2$. Matrica i graf prethodne relacije su:

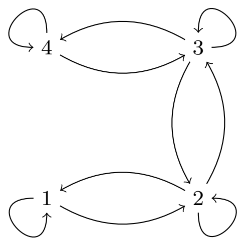
	b_1	b_2	b_3
a_1	**t**	**n**	**t**
a_2	**t**	**n**	**n**
a_3	**n**	**n**	**n**
a_4	**t**	**t**	**n**



3. **Primer.** Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i ρ relacija na A definisana sa $x \mathrel{\rho} y$ akko $|x - y| \leqslant 1$. Lako vidimo $1 \mathrel{\rho} 1$ (jer $|1 - 1| = 0 \leqslant 1$), $1 \mathrel{\rho} 2$ (jer $|1 - 2| \leqslant 1$), $1 \not\mathrel{\rho} 3$ (jer $|1 - 3| \nleqslant 1$), $1 \not\mathrel{\rho} 4$, $2 \mathrel{\rho} 1$, $2 \mathrel{\rho} 2$, $2 \mathrel{\rho} 3$, $2 \not\mathrel{\rho} 4$, $3 \not\mathrel{\rho} 1$, $3 \mathrel{\rho} 2$, $3 \mathrel{\rho} 3$, $3 \mathrel{\rho} 4$, $4 \not\mathrel{\rho} 1$, $4 \not\mathrel{\rho} 2$, $4 \mathrel{\rho} 3$ i $4 \mathrel{\rho} 4$. Matrica relacije je zapisana ispod levo. Relaciju možemo da skiciramo kao u prethodnom primeru (slika u sredini):

	1	2	3	4
1	**t**	**t**	**n**	**n**
2	**t**	**t**	**t**	**n**
3	**n**	**t**	**t**	**t**
4	**n**	**n**	**t**	**t**



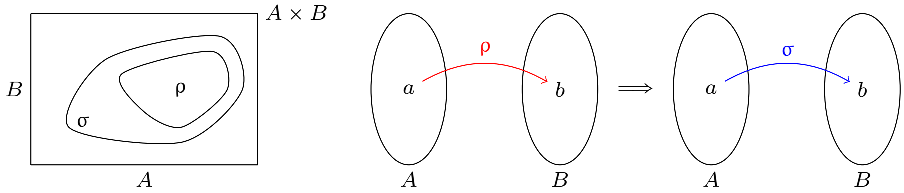


ali možemo da skiciramo kao i graf na slici desno.

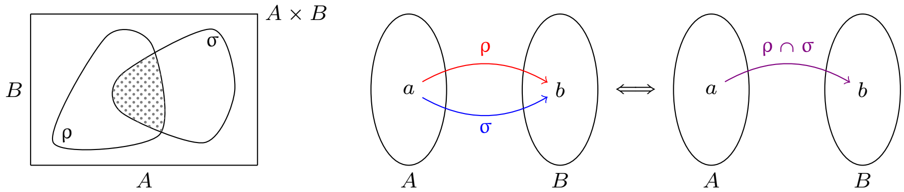
II. **Podrelacija i skupovne operacije sa relacijama.** Neka su $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ dve relacije između A i B. S obzirom da su ρ i σ pre svega skupovi, možemo govoriti o tome da li je $\rho \subseteq \sigma$, možemo govoriti o preseku $\rho \cap \sigma$, uniji $\rho \cup \sigma$, razlici $\rho \smallsetminus \sigma$, simetričnoj razlici $\rho \bigtriangleup \sigma$ i komplementu ρ^c. Iako to nije obavezno, kada govorimo o prethodnim stvarima *uvek* ćemo podrazumevati da su ρ i σ obe između A i B (nećemo posmatrati ρ između A_1 i B_1, a σ između nekog A_2 i B_2).

Do kraja ovog odeljka pretpostavljamo da su ρ i σ dve relacije između A i B.

4. **Definicija.** Ako je $\rho \subseteq \sigma$ kažemo da je ρ *grublja* od σ, odnosno da je σ *finija* od ρ. (Dakle, $\varnothing$ je najgrublja relacija između A i B, a $A \times B$ je najfinija relacija između A i B.) To znači da $a \mathrel{\rho} b$ povlači $a \mathrel{\sigma} b$, tj. ako postoji strelica $a \xrightarrow{\rho} b$, onda postoji i strelica $a \xrightarrow{\sigma} b$ (slika desno).

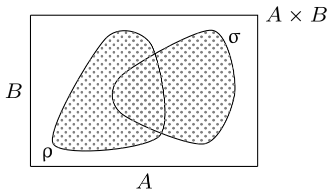


Što se tiče preseka, $\rho \cap \sigma$ su zajednički parovi, tj. strelice, relacija ρ i σ:

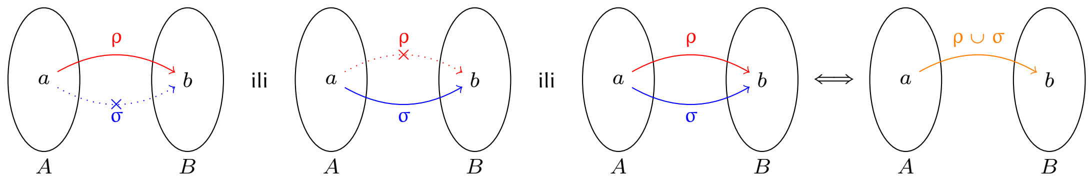


Na slici desno smo naznačili da strelica $a \xrightarrow{\rho\cap\sigma} b$ postoji ako i samo ako postoje obe strelice $a \xrightarrow{\rho} b$ i $a \xrightarrow{\sigma} b$.

Unija $\rho \cup \sigma$ su svi parovi, tj. strelice, relacije ρ i relacije σ:

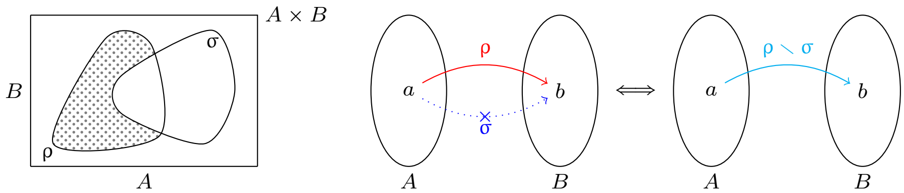


Na grafu to znači da strelica $a \xrightarrow{\rho\cup\sigma} b$ postoji ako i samo ako postoje bar jedna od strelica $a \xrightarrow{\rho} b$ i $a \xrightarrow{\sigma} b$:

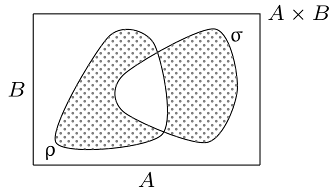


(Činjenicu sa neka strelica ne postoji naglasili smo prekriženom tačkastom strelicom.)

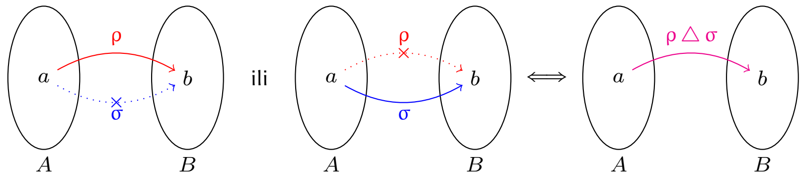
Razlika $\rho \smallsetminus \sigma$ su svi parovi, tj. strelice, koje jesu ρ, ali nisu σ:



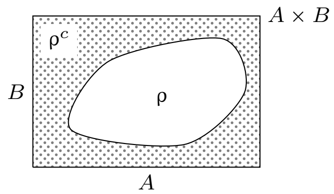
Simetrična razlika $\rho \triangle \sigma$ su svi parovi, tj. strelice, koji su u tačno jedno od relacija ρ i σ:

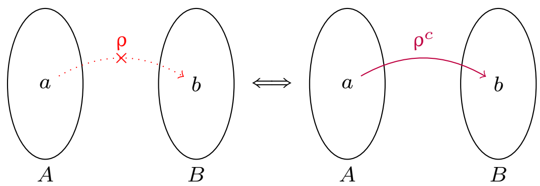


Na grafu to znači:



Konačno, komplement relacije ρ, ρ^c, su svi parovi, tj. strelice, skupa $A \times B$ koji nisu u relaciji ρ (dakle, komplement računamo relativno u odnosu na $A \times B$):

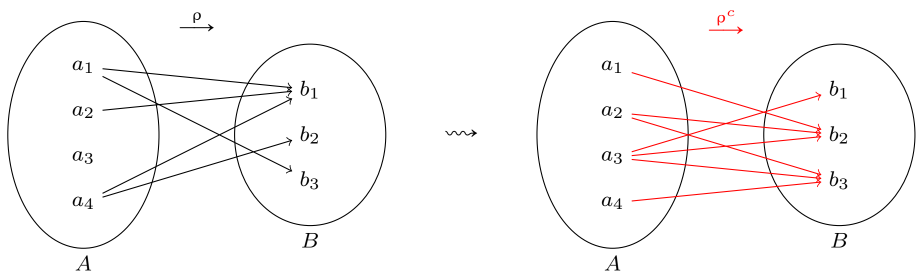




5. **Primer.** Komplement relacije ρ:

$$\rho = \{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_4, b_1), (a_4, b_2)\}$$

između $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ i $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ dobijamo uzimajući sve strelice koje nisu ρ, i samo njih:



Skupovno zapisano: $\rho^c = \{(a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_3)\}$.

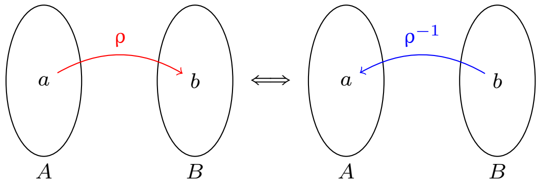
Sve osobine relacije $\subseteq$ i operacija $\cap, \cup, \smallsetminus, \triangle$ i ^{c} koje važe generalno za skupove, važe i za relacije.

III. **Inverzna relacija.**

6. **Definicija.** Neka je $\rho \subseteq A \times B$. *Inverzna relacija* relacije ρ ili *inverz* relacije ρ je relacija $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ definisana sa:

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\},$$

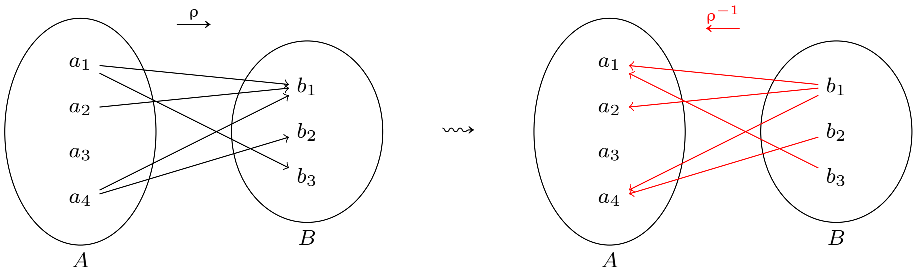
tj. data sa $b\ \rho^{-1}\ a$ akko $a\ \rho\ b$, odnosno dobijena obrtanjem svih strelica na grafu:



7. **Primer.** Inverz relacije ρ:

$$\rho = \{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_4, b_1), (a_4, b_2)\}$$

između $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ i $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ dobijamo obrtanjem svih strelica na grafu relacije ρ:

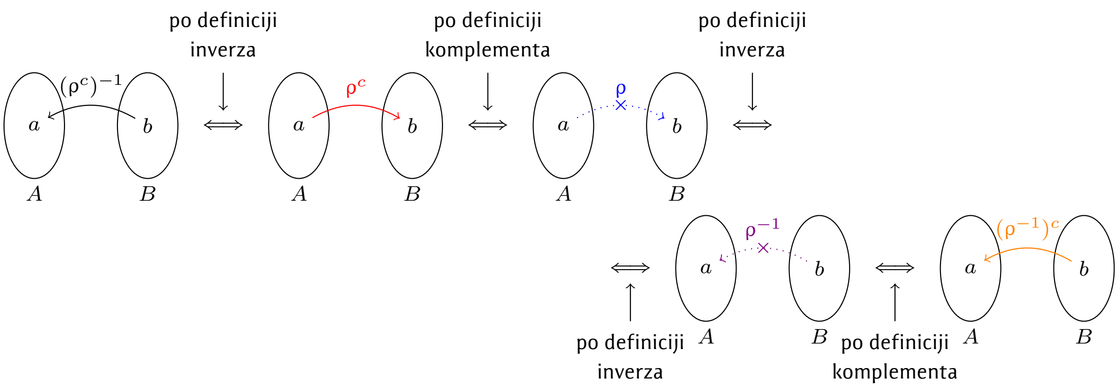


Skupovno zapisano: $\rho^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_1, a_4), (b_2, a_4), (b_3, a_1)\}$.

8. **Tvrđenje.** *Neka su* $\rho, \sigma \subseteq A \times B$. *Tada važi:*

(i) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
(ii) $\rho \subseteq \sigma$ *povlači* $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
(iii) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$;
(iv) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$;
(v) $(\rho \smallsetminus \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \smallsetminus \sigma^{-1}$;
(vi) $(\rho \triangle \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \triangle \sigma^{-1}$;
(vii) $(\rho^c)^{-1} = (\rho^{-1})^c$.

Dokaz. Dokazi svih delova su pravolinijski po definicijama. Npr. da bismo dokazali poslednji deo, $(\rho^c)^{-1} = (\rho^{-1})^c$, možemo da razmotrimo sledeću sliku:



Na slici smo različite relacije predstavili strelicama različitih boja. Prva ekvivalencija dobija se samo obrtanjem strelica po definiciji inverza. Druga ekvivalencija sledi po definiciji komplementa, tj. leva strelica postoji akko desna ne postoji. Treća ekvivalencija ponovo važi po definiciji inverza, a četvrta po definiciji komplementa. Dakle, između b i a postoji crna strelica akko postoji narandžasta strelica, pa su ove dve relacije ($(\rho^c)^{-1}$ predstavljena crnom i $(\rho^{-1})^c$ predstavljena narandžastom strelicom) jednake.

Formalno dokaz možemo da zapišemo na sledeći način: Neka su $a \in A$ i $b \in B$. Imamo:

$$\begin{aligned} b\,(\rho^c)^{-1}\,a &\iff a\,\rho^c\,b && \text{po definiciji inverza}\\ &\iff \neg\, a\,\rho\,b && \text{po definiciji komplementa}\\ &\iff \neg\, b\,\rho^{-1}\,a && \text{po definiciji inverza}\\ &\iff b\,(\rho^{-1})^c\,a && \text{po definiciji komplementa.}\end{aligned}$$

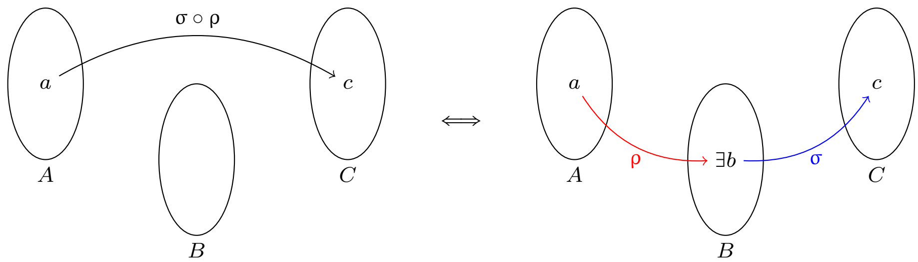
Prema tome, relacije $(\rho^c)^{-1}$ i $(\rho^{-1})^c$ sadrže iste parove, pa su jednake. Ω

IV. **Kompozicija relacija.**

9. **Definicija.** Neka su $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$ relacije. *Kompozicija* relacija ρ i σ je relacija $\sigma \circ \rho \subseteq A \times C$[1] definisana sa:

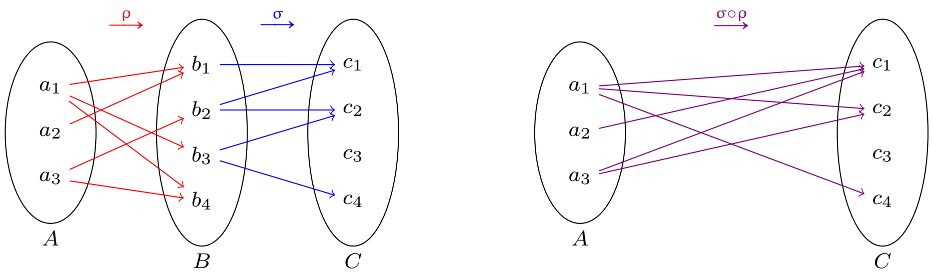
$$a\ \sigma \circ \rho\ c \quad\iff\quad (\exists b \in B)\ a\,\rho\,b \ \text{ i } \ b\,\sigma\,c,$$

za $a \in A$ i $c \in C$. Na grafu to možemo predstaviti na sledeći način:



Dakle, imamo strelicu $a \xrightarrow{\sigma\circ\rho} c$ akko imamo strelice $a \xrightarrow{\rho} b$ i $b \xrightarrow{\sigma} c$ za neki element $b \in B$.

10. **Primer.** Neka su $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ i $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, i relacije $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$ date grafovima na slici levo:



Kompoziciju $\sigma \circ \rho$ dobijamo nastavljajući strelice polazeći od elemenata iz A i završavajući u C. Npr. kako $a_1 \xrightarrow{\rho} b_1 \xrightarrow{\sigma} c_1$ imamo $a_1 \xrightarrow{\sigma\circ\rho} c_1$, kako $a_1 \xrightarrow{\rho} b_3 \xrightarrow{\sigma} c_2$ imamo $a_1 \xrightarrow{\sigma\circ\rho} c_2$, itd. Dobijamo graf na slici desno. Skupovno zapisano kompozicija relacija ρ i σ je $\sigma \circ \rho = \{(a_1, c_1), (a_1, c_2), (a_1, c_4), (a_2, c_1), (a_3, c_1), (a_3, c_2)\}$.

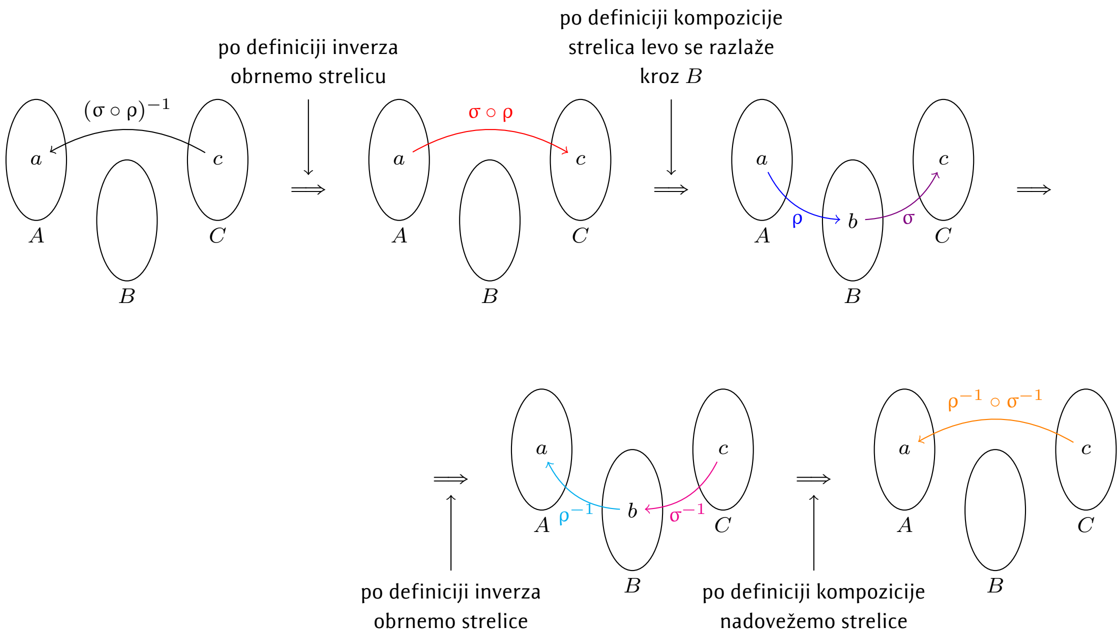
---

[1] Obratite pažnju na redosled zapisa: zapisujemo relacije s desna na levo!

11. Tvrđenje. *Neka su* $\rho \subseteq A \times B$, $\sigma \subseteq B \times C$ *i* $\tau \subseteq C \times D$ *relacije. Tada:*

(i) $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$; *(ii)* $\tau \circ (\sigma \circ \rho) = (\tau \circ \sigma) \circ \rho$.

Dokaz. (i) Najpre primetimo da su obe strane jednakosti definisane relacije iz C u A. Razmotrimo najpre inkluziju $(\subseteq)$ na grafu:

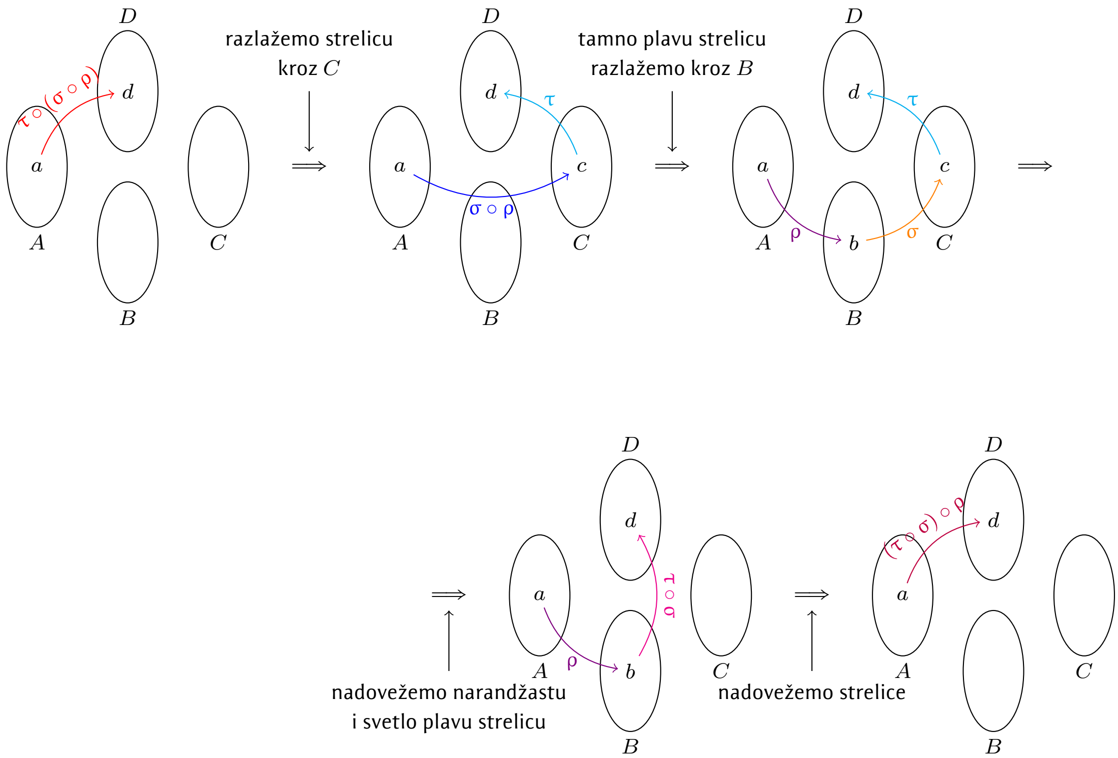


Dakle, ako imamo $(\sigma \circ \rho)^{-1}$-strelicu $c \to a$, onda imamo i $\rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$-strelicu $c \to a$, pa možemo da zaključimo $(\sigma \circ \rho)^{-1} \subseteq \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$. Nije teško videti da prethodna slika čitana zdesna na levo dokazuje i obratnu inkluziju. Sada možemo zapisati i formalan dokaz: Neka su $a \in A$ i $c \in C$ proizvoljni elementi. Tada:

$c\,(\sigma \circ \rho)^{-1}\,a$	$\iff$	$a\ \sigma \circ \rho\ c$	po definiciji inverza
	$\iff$	$a\,\rho\,b$ i $b\,\sigma\,c$, za neko $b \in B$	po definiciji kompozicije
	$\iff$	$b\,\rho^{-1}\,a$ i $c\,\sigma^{-1}\,b$, za neko $b \in B$	po definiciji inverza
	$\iff$	$c\ \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}\ a$	po definiciji kompozicije

Prema tome, $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

(ii) Opet najpre primetimo da su obe relacije $\tau \circ (\sigma \circ \rho)$ i $(\tau \circ \sigma) \circ \rho$ iz A u D, pa ima smisla da ih upoređujemo. Razmotrimo inkluziju $(\subseteq)$ na grafu:



Dakle, ako imamo $\tau \circ (\sigma \circ \rho)$-strelicu $a \to d$, onda imamo i $(\tau \circ \sigma) \circ \rho$-strelicu $a \to d$, pa $\tau \circ (\sigma \circ \rho) \subseteq (\tau \circ \sigma) \circ \rho$. Postupajući unazad, prethodno razmatranje nam daje i obratnu inkluziju. Zapišimo sada i formalno dokaz: Neka su $a \in A$ i $d \in D$ proizvoljni. Imamo:

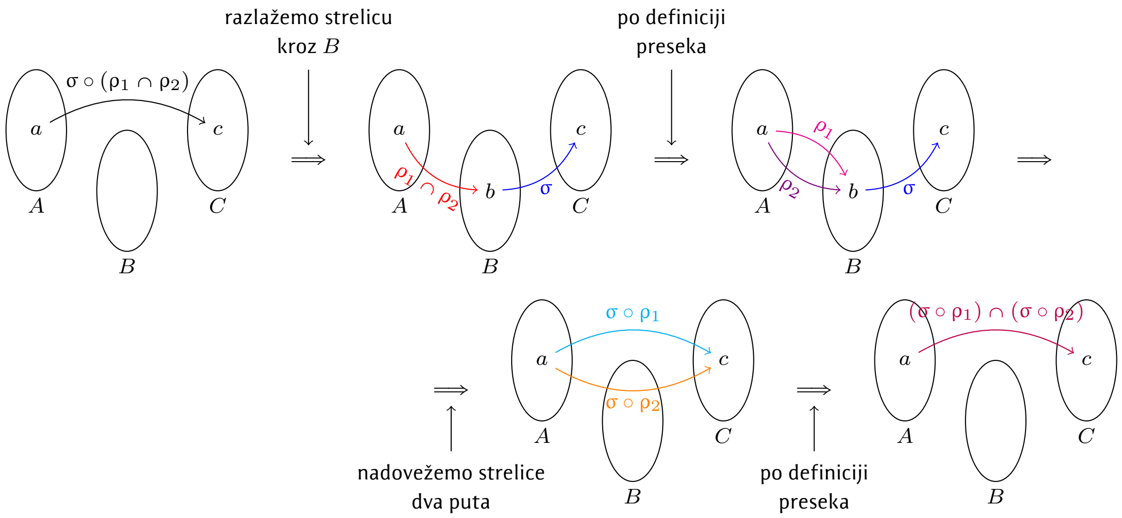
$$\begin{aligned} a \; \tau \circ (\sigma \circ \rho) \; d \quad &\iff \quad a \; \sigma \circ \rho \; c \; \text{ i } \; c \; \tau \; d, \text{ za neko } c \in C \\ &\iff \quad a \; \rho \; b \; \text{ i } \; b \; \sigma \; c \; \text{ i } \; c \; \tau \; d, \text{ za neke } b \in B, c \in C \\ &\iff \quad a \; \rho \; b \; \text{ i } \; b \; \tau \circ \sigma \; d, \text{ za neko } b \in B \\ &\iff \quad a \; (\tau \circ \sigma) \circ \rho \; d. \end{aligned}$$

Svi koraci u prethodnom nizu su po definiciji kompozicije. Prema tome, $\tau \circ (\sigma \circ \rho) = (\tau \circ \sigma) \circ \rho$. Ω

12. *Komentar*. Ako $\rho \subseteq A \times B$, $\sigma \subseteq B \times C$ i $\tau \subseteq C \times D$, prema prthodnom tvrđenju (asocijativnosti kompozicije) možemo da pišemo $\tau \circ \sigma \circ \rho$. Iz dokaza vidimo da $a \; \tau \circ \sigma \circ \rho \; d$ znači da postoje $b \in B$ i $c \in C$ tako da $a \; \rho \; b$, $b \; \sigma \; c$ i $c \; \tau \; d$, što kraće možemo da zapišemo i sa $a \; \rho \; b \; \sigma \; c \; \tau \; d$. Analogno važi i ako imamo definisanu kompoziciju više od tri relacije.

13. **Primer.** Neka $\rho_1, \rho_2 \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$. Ispitajmo u kom su odnosu relacije $\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2)$ i $(\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2)$, koje su obe između A i C.

Pretpostavimo najpre da imamo $a \; \sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \; c$ i razmotrimo graf:

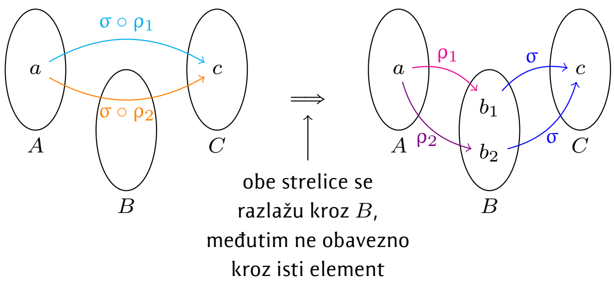


Prema tome, ako imamo $\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2)$-strelicu $a \to c$, onda imamo i $(\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2)$-strelicu $a \to c$, pa važi $\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \subseteq (\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2)$. Formalno, dokaz ove inkluzije zapisujemo sa: Neka su $a \in A$ i $c \in C$ proizvoljne. Imamo:

$$
\begin{aligned}
a\ \sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2)\ c \quad &\Longrightarrow \quad a\ \rho_1 \cap \rho_2\ b \ \text{ i } \ b\ \sigma\ c, \text{ za neko } b \in B && \text{po def. kompozicije}\\
&\Longrightarrow \quad a\ \rho_1\ b \ \text{ i } \ a\ \rho_2\ b \ \text{ i } \ b\ \sigma\ c, \text{ za neko } b \in B && \text{po def. preseka}\\
&\Longrightarrow \quad a\ \sigma \circ \rho_1\ c \ \text{ i } \ a\ \sigma \circ \rho_2\ c && \text{po def. kompozicije}\\
&\Longrightarrow \quad a\ (\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2)\ c && \text{po def. preseka.}
\end{aligned}
$$

Dakle, u opštem slučaju važi $\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \subseteq (\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2)$.

Po definiciji kompozicije, prva implikacija se može obrnuti. Takođe, po definiciji preseka, druga i četvrta implikacija se mogu obrnuti. Međutim, treća implikacija ne može. Pogledajmo graf:



Sada vidimo da ne moramo obavezno da pređemo na presek $\rho_1 \cap \rho_2$.

Poslednja sličica nam sugeriše i kontraprimer za obratnu inkluziju. Naime, uzmimo baš $A = \{a\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c\}$, $\rho_1 = \{(a, b_1)\}$, $\rho_2 = \{(a, b_2)\}$ i $\sigma = \{(b_1, c), (b_2, c)\}$. Tada je $\rho_1 \cap \rho_2 = \varnothing$, pa je i $\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) = \varnothing$. Sa druge strane, $\sigma \circ \rho_1 = \{(a, c)\}$ i $\sigma \circ \rho_2 = \{(a, c)\}$, pa je $(\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2) = \{(a, c)\}$. Dakle, imamo primer u kome važi:

$$\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \subsetneq (\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2).$$

14. **Zadatak.** Neka $\rho_1, \rho_2 \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$. Dokazati:

(i) $\rho_1 \subseteq \rho_2$ povlači $\sigma \circ \rho_1 \subseteq \sigma \circ \rho_2$;
(ii) $\sigma \circ (\rho_1 \cup \rho_2) = (\sigma \circ \rho_1) \cup (\sigma \circ \rho_2)$;
(iii) $\sigma \circ (\rho_1 \smallsetminus \rho_2) \supseteq (\sigma \circ \rho_1) \smallsetminus (\sigma \circ \rho_2)$.
(iv) Primerom pokazati da u (i) ne mora da važi obratna implikacija.
(v) Primerom pokazati da u (iii) ne mora da važi obratna inkluzija.

V. **Osobine binarnih relacija na skupu S.**

15. **Definicija.** Neka je ρ binarna relacija na skupu S. Ističemo nekoliko osobina koje relacija ρ može (i ne mora) da ima:

(R) $(\forall x \in S)\, x \,\rho\, x$; (refleksivnost)
(I) $(\forall x \in S)\, x \not\rho\, x$; (irefeksivnost)
(S) $(\forall x, y \in S)(x \,\rho\, y \to y \,\rho\, x)$; (simetričnost)
(a) $(\forall x, y \in S)(x \,\rho\, y \to y \not\rho\, x)$; (asimetričnost)
(A) $(\forall x, y \in S)(x \,\rho\, y \wedge y \,\rho\, x \to x = y)$; (antisimetričnost)
(T) $(\forall x, y, z \in S)(x \,\rho\, y \wedge y \,\rho\, z \to x \,\rho\, z)$. (tranzitivnost)

Na grafu relacije ρ uslov refleksivnosti kaže da oko svakog elementa postoji petlja, dok uslov irefleksivnosti ide u drugu krajnost: ni oko jednog elementa nema petlje. Uslov simetričnosti kaže da ako imamo strelicu $x \to y$, moramo da imamo i strelicu $y \to x$:

ako $\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left] & y \end{tikzcd}$, onda mora biti i $\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left] & y \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$.

Uslov simetričnosti odnosi se i na potencijalno jednake $x = y$, ali ne daje nikakvu informaciju (kaže samo da ako imamo petlju u x, onda imamo petlju u x, što je uvek tačna implikacija).

Uslov asimetričnosti kaže da ako imamo sterlicu $x \to y$, onda nemamo strelicu $y \to x$:

ako $\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left] & y \end{tikzcd}$, onda mora biti $\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left] & y \arrow[l, bend left, dashed, "\times" description] \end{tikzcd}$.

I uslov asimetričnosti odnosi se na potencijalno jednake x i y. U tom slučaju uslov asimetričnosti kaže da je tačna implikacija: ako postoji petlja u x, onda ne postoji petlja u x, što je tačno akko ni u jednom x nemamo petlju. Dakle, asimetričnost specijlno podrazumeva irefleksivnost.

Uslov antisimetričnosti kaže da ako imamo obe strelice $x \to y$ i $y \to x$, onda x i y moraju da budu jednaki. Drugim rečima ako $x \neq y$, nemamo sledeću situaciju:

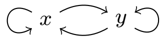
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left] & y \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Primetimo da asimetrinost povlači antisimetričnost. Oba uslova zabranjuju obe strelice između različitih elemenata. Jedina razlika je što asimetričnost zabranjuje petlje, dok antisimetričnost dozvoljava da oko nekih elemenata postoji petlja.

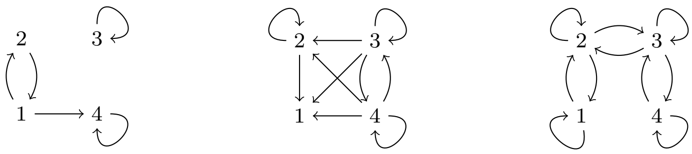
Uslov tranzitivnosti kaže da ako postoje strelice $x \to y$ i $y \to z$, mora da postoji i strelica $x \to z$:

ako $\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left] & y \arrow[r, bend left] & z \end{tikzcd}$, onda mora biti i $\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left] \arrow[rr, bend right] & y \arrow[r, bend left] & z \end{tikzcd}$.

I uslov tranzitivnosti odnosi se i na x, y, z od kojih su neki potencijalno jednaki. Ako je $x = y$ ili $y = z$, implikacija u uslovu tranzitivnosti očiglendo je zadovoljena. Ističemo slučaj $x \neq y$ i $x = z$. U ovom slučaju tranzitivnost kaže da ako imamo obe strelice između dva različita elementa x i y, moramo da imamo i obe petlje u x i y:

ako  , onda mora biti i  .

16. **Primer.** Na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$ uočimo relacije skicirane sa:



ρ σ τ

Ispitajmo koje osobine imaju ove relacije.

Relacija ρ nije refleksivna (jer nema petlje oko 1 i 2), a nije ni irefleksivna (jer ima petlje oko 3 i 4). Relacija nije simetrična jer imamo $1 \to 4$, ali nemamo $4 \to 1$. Relacija nije ni asimetrična ni antisimetrična jer imamo $1 \to 2$ i $2 \to 1$ i $1 \neq 2$; relacija nije asimetrična jer nije ni irefleksivna. Konačno ρ nije ni tranzitivna jer imamo $2 \to 1$ i $1 \to 4$, ali nemamo $2 \to 4$.

Relacija σ nije refleksivna (nema petlju oko 1) ni irefleksivna (ima sve ostale petlje). Relacija nije simetrična jer npr. $2 \to 1$ ali nije $1 \to 2$. Relacija nije asimetrična niti antisimetrična jer imamo $3 \to 4$ i $4 \to 3$. Konačno relacija jeste tranzitivna. Nije teško izračunati da je $\sigma \circ \sigma = \sigma$, što znači da σ jeste trazitivna.

Relacija τ jeste refleksivna i simetrična, ali ne zadovoljava ostale osobine.

17. **Definicija.** *Dijagonala* skupa S je relacija na S data sa $\Delta_S = \{(x, x) \mid x \in S\}$.

Primetimo da je Δ_S samo druga oznaka za relaciju jednakosti na S.

Sada možemo da damo i sledeće, skupovne karakterizacije gore uvedenih osobina. Najpre, očigledno relacija ρ na S je refleksivna akko $\Delta_S \subseteq \rho$, a ρ je irefleksivna akko $\Delta_S \cap \rho = \varnothing$.

Kako je $y \mathrel{\rho} x$ akko $x \mathrel{\rho^{-1}} y$, uslov simetričnosti ekvivalentan je sa $\rho \subseteq \rho^{-1}$. Ovo je ekvivalentno i sa $\rho = \rho^{-1}$ jer $\rho \subseteq \rho^{-1}$ povlači i $\rho^{-1} \subseteq (\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

Kako je $y \not\rho\, x$ akko $x \not\rho^{-1} y$ akko $x \mathrel{(\rho^{-1})^c} y$, uslov asimetričnosti ekvivalentan je sa $\rho \subseteq (\rho^{-1})^c$, tj. sa $\rho \cap \rho^{-1} = \varnothing$.

Sad lako vidimo i da je uslov antisimetričnosti ekvivalentan sa $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_S$.

Konačno, razmotrimo i tranzitivnost. Iskaz $(\forall x, y, z \in S)(x \mathrel{\rho} y \wedge y \mathrel{\rho} z \to x \mathrel{\rho} z)$ ekvivalentan je sa: $(\forall x, z \in S)((\exists y \in S)(x \mathrel{\rho} y \wedge y \mathrel{\rho} z) \to x \mathrel{\rho} z)$. Kako je $(\exists y \in S)(x \mathrel{\rho} y \wedge y \mathrel{\rho} z)$ ekvivalentno sa $x \mathrel{\rho \circ \rho} z$, uslov tranzitivnosti ekvivalentan je sa $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

VI. **Ekvivalencije.**

18. **Zadatak.** Na skupu $\{a, b, c\}$ konstruisati relaciju ρ koja je:

(i) refleksivna i simetrična, ali nije tranzitivna;
(ii) refleksivna i tranzitivna, ali nije simetrična;
(iii) simetrična i tranzitivna, ali nije refleksivna.

19. **Definicija.** Relacija $\approx$ na skupu S je *ekvivalencija* ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Prvi primer ekvivalencije na bilo kom skupu je jednakost na tom skupu. Izborom simbola $\approx$ naglašavamo da ekvivalencije imaju iste osnovne osobine kao i jednakost.

20. **Primer.** Neka je $m \in \mathbb{N}$. Na skupu $\mathbb{Z}$ definišemo relaciju $\equiv_m$ sa $x \equiv_m y$ akko $m \mid x-y$, tj. akko $(\exists k \in \mathbb{Z})\ x - y = mk$.

Relacija $\equiv_m$ je refleksivna jer za sve $x \in \mathbb{Z}$ važi $x - x = m \cdot 0$. Ako je $x \equiv_m y$, tj. $x - y = mk$ za neko celo k, tada je $y - x = m(-k)$ i $-k \in \mathbb{Z}$, pa $y \equiv_m x$, što znači da je $\equiv_m$ simetrična. Ako je $x \equiv_m y$ i $y \equiv_m z$, tj. $x - y = mk$ i $y - z = ml$ za neke cele k i l, sabiranjem je i $x - z = m(k + l)$ i $k + l \in \mathbb{Z}$, pa je $x \equiv_m z$, što dokazuje tranzitivnost.

Za $m = 0$, $x \equiv_0 y$ akko $x - y = 0 \cdot k$ za neko $k \in \mathbb{Z}$, akko $x = y$, pa je relacija $\equiv_0$ relacija jednakosti na skupu $\mathbb{Z}$. Za $m = 1$, $x \equiv_1 y$ akko $x - y = 1 \cdot k$ za neko $k \in \mathbb{Z}$, što je tačno za proizvoljne brojeve x i y. Dakle, $\equiv_1$ je relacija $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Zanimljivi slučajevi su kada je $m \geqslant 2$.

21. **Definicija.** Neka je $\approx$ ekvivalencija na skupu S i $a \in S$. *Klasa* elementa a je skup u oznaci $[a]_\approx$, ili samo $[a]$ ako je ekvivalencija $\approx$ jasna iz konteksta, definisan sa:

$$[a] = \{x \in S \mid x \approx a\}.$$

Zbog simetričnosti direktno imamo i $[a] = \{x \in S \mid a \approx x\}$.

22. **Tvrđenje** (Osnovne osobine klasa)**.** *Neka je $\approx$ ekvivalencija na S i $a, b \in S$. Tada:*

(i) $a \in [a]$; specijalno, $[a] \neq \varnothing$;
(ii) $a \approx b$ akko $[a] = [b]$;
(iii) $a \not\approx b$ akko $[a] \cap [b] = \varnothing$.

Dokaz. (i) Uslov $a \in [a]$ ekvivalentan je sa $a \approx a$, što jeste tačno jer je $\approx$ refleksivna.

(ii) $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo $a \approx b$. Dokažimo najpre $[a] \subseteq [b]$. Ako $x \in [a]$, tada $x \approx a$, pa kako $a \approx b$, po tranzitivnosti $x \approx b$, tj. $x \in [b]$; dakle, $[a] \subseteq [b]$. Ovime smo dokazali da $a \approx b$ povlači $[a] \subseteq [b]$. Kako $a \approx b$ zbog simetričnosti povlači i $b \approx a$, prema prethodnom imamo i $[b] \subseteq [a]$. Dakle, važi $[a] = [b]$.

$(\Leftarrow)$ Pretpostavimo $[a] = [b]$. Kako $a \in [a]$ prema (i), važi i $a \in [b]$, što znači $a \approx b$.

(iii) $(\Rightarrow)$ Dokažimo kontrapoziciju. Pretpostavimo $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ i neka je $x \in [a] \cap [b]$. Tada $a \approx x$ i $x \approx b$, pa i $a \approx b$ zbog tranzitivnosti, što znači da ne važi $a \not\approx b$.

$(\Leftarrow)$ Pretpostavimo $[a] \cap [b] = \varnothing$. Kako $[a], [b] \neq \varnothing$ prema (i), to povlači $[a] \neq [b]$, odakle $a \not\approx b$ prema (ii). Ω

Prema (i) i (ii), $x \in [a]$ akko $x \approx a$ akko $[x] = [a]$, i $x \notin [a]$ akko $x \not\approx a$ akko $[x] \cap [a] = \varnothing$. Dakle, svi elementi u klasi su u relaciji samo sa elementima te klase i ni sa jednim više, i imaju tu istu klasu. Klase ekvivalencije dele skup S na međusobno disjunktne (presek je prazan) neprazne delove. Ovakva podela skupa S naziva se *particija* skupa S.

23. **Primer.** Vratimo se na primer 20 i neka je $m \geqslant 2$. Izračunajmo klase relacije $\equiv_m$. Za $a \in \mathbb{Z}$ imamo:

$$\begin{aligned} x \in [a] \quad &\Leftrightarrow \quad x \equiv_m a \\ &\Leftrightarrow \quad x - a = mk \text{ za neko } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad x = a + mk \text{ za neko } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

pa je $[a] = \{a + mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Nije teško videti da imamo m različitih klasa. Naime, klasa $[a]$ određena je ostatkom pro deljenju broja a sa m. Zaista, ako je $a = mq + r$, $0 \leqslant r < m$, tada $a \in [r]$, pa je $[a] = [r]$. Sa druge strane, za $0 \leqslant r_1 < r_2 < m$, jasno je da $m \nmid r_1 - r_2$, pa $r_1 \not\equiv_m r_2$, što znači da $[r_1] \neq [r_2]$. Dakle, imamo m različitih klasa i one su određene ostacima pri deljenju sa m: $[0], [1], \ldots, [m-1]$.

24. **Definicija.** Skup svih klasa ekvivalencije $\approx$ na skupu S zove se *količnički skup* i označava se sa $S/_{\approx}$:

$$S/_{\approx} = \{[a] \mid a \in S\}.$$

U prethodnom primeru $\mathbb{Z}/_{\equiv_m} = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\}$.

25. **Definicija.** *Transverzala* ili *skup predstavnika* ekvivalencije $\approx$ na skupu S je bilo koji podskup $T \subseteq S$ koji sadrži po tačno jedan element iz svake klase.

Npr. u gornjem primeru skup $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ je jedna prirodna transverzala ekvivalencije $\equiv_m$.

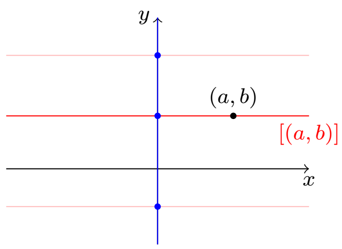
26. **Primer.** Na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definišemo relaciju $\approx$ sa:

$$(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2.$$

Nije teško videti da je $\approx$ ekvivalencija. Izračunajmo klasu tačke (a, b):

$$\begin{aligned} (x, y) \in [(a, b)] \quad &\Leftrightarrow \quad (x, y) \approx (a, b) \\ &\Leftrightarrow \quad y = b \end{aligned}$$

tj. $[(a, b)] = \{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Prethodni skup je prava kroz (a, b) paralelna sa x-osom:



Prema tome količnički skup, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/_{\approx}$, je skup svih pravih paralelnih sa x-osom. Da bismo uočili neku transverzalu treba sa svake od tih pravih da izaberemo po jednu tačku. Npr. y-osa je jedna transverzala. Ili bilo koja prava koja nije paralelna sa x-osomo. Ili graf funkcije $y = x^3$. Svi ovi skupovi seku prave paralelne sa x-osom u po jednoj tački.

27. **Primer.** Na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definišemo relaciju $\approx$ sa:

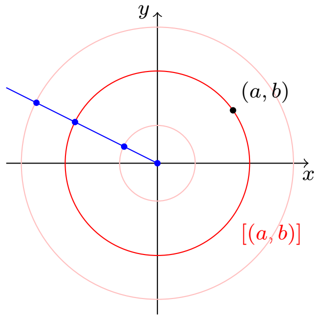
$$(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Ponovo lako vidimo da je $\approx$ ekvivalencija, i računamo klasu tačke (a, b):

$$\begin{aligned} (x, y) \in [(a, b)] \quad &\Leftrightarrow \quad (x, y) \approx (a, b) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

tj. $[(a, b)] = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}\}$.

Ako sa r označimo rastojanje (a, b) od koordinatnog početka, po Pitagorinoj teoremi je $a^2 + b^2 = r^2$, pa je prethodni skup zapravo skup tačaka (x, y) za koje je $x^2 + y^2 = r^2$, i prepoznajemo da je u pitanju kružnica sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika r, tj. koja prolazi kroz (a, b):



Prema tome količnički skup je skup svih kružnica sa centrom u koordinatnom početku (uključujući i jedan degenerisan slučaj, $[(0, 0)] = \{(0, 0)\}$, što možemo da razumemo kao kružnicu sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 0). Sa svake takve kružnice treba da odaberemo po jednu tačku da bismo odredili jednu transverzalu, i jedan prirodan način je da uzmemo bilo koju polupravu sa temenom u koordinatnom početku.

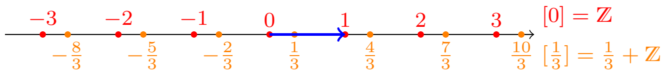
28. **Primer.** Na skupu $\mathbb{R}$ data je relacija $\approx$ sa:

$$x \approx y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}.$$

Ova relacija takođe jeste ekvivalencija, a klasa broja a je:

$$\begin{aligned} x \in [a] \quad &\Leftrightarrow \quad x \approx a \\ &\Leftrightarrow \quad x - a \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad x = a + k \text{ za neko } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

tj. $[a] = \{a + k \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + \mathbb{Z}$. Dakle, klasa elementa a je skup $\mathbb{Z}$ transliran za a:



Primetimo da svaka klasa ima jedinstvenog predstavnika u intervalu $[0, 1)$. Zaista, za klasu $[a]$ to je $a - \lfloor a \rfloor \in [0, 1)$. Prema tome jedna prirodna transverzala je interval $[0, 1)$.

29. **Primer.** Na skupu $\mathbb{R}$ data je relacija $\approx$ sa:

$$x \approx y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

I ova relacija jeste ekvivalencija, a klasa broja a je, slično kao u prethodnom primeru, skup $\mathbb{Q}$ transliran za a: $[a] = a + \mathbb{Q}$. Do sada smo imali prirodne načine da odaberemo transverzale, međutim u ovom slučaju, ako se malo udubimo, videćemo da to nije tako. I zaista, može se pokazati da ne postoji prirodan način da konstruišemo transverzalu.

S obzirom da ne postoji način da konstruišemo prethodnu transverzalu, prirodno je pitanje da li ona postoji. Odgovor daje *aksioma izbora*.

30. **Aksioma** (Aksioma izbora)**.** Svaka ekvivalencija ima transverzalu.

Specijalne transverzale relacije iz primera 29 nazivaju se Vitalijevi skupovi, i već kod njih vidimo prve čudne posledice aksiome izbora. Pogledajte odeljak VIII.

VII. **Uređenja.**

31. **Definicija.** Relacija $\trianglelefteq$ na skupu S je *(parcijalno) uređenje (poredak)* ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Osnovni primeri uređenja su $\leqslant$ na $\mathbb{R}$ ili $\subseteq$ na familijama skupova. Primetimo da za uređenja koristimo oznaku $\trianglelefteq$ koja bi trebalo da nas podseća na osnovne primere. Ako $a \trianglelefteq b$, element a doživljavamo kao manji (ili jednak) od b, a b veći (ili jednak) od a. Treba da naglasimo jednu bitnu razliku između proizvoljnog uređenja i primera $\leqslant$ na $\mathbb{R}$. Naime, $\leqslant$ na $\mathbb{R}$ ima i dodatnu osobinu *linearnosti*:

(L) $(\forall x, y \in S)(x \trianglelefteq y \vee y \trianglelefteq x)$ (linearnost)

koja kaže da za svaka dva elementa možemo da uporedimo koji je manji, a koji veći. Ovo u opštem slučaju ne važi, i npr. $\subseteq$ u opštem slučaju nema ovu osobinu. Npr. na skupu $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$, skupove $\{a\}$ i $\{b\}$, ili $\{a\}$ i $\{b,c\}$, ili $\{a,b\}$ i $\{a,c\}$ ne možemo da uporedimo sa $\subseteq$. Kad smo kod ovog primera, naglasimo i da uređenja možemo da skiciramo na sledeći način:

$$\begin{tikzcd}
 & \{a,b,c\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{a,b\} \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \{a,c\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \{b,c\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
\{a\} \arrow[dr, dash] & \{b\} \arrow[d, dash] & \{c\} \arrow[dl, dash] \\
 & \varnothing &
\end{tikzcd}$$

Na prethodnom dijagramu crtamo manje skupove ispod većih i crticom naglašavamo koji skup je neposredno iznad nekog drugog. Kad god je moguće, ovako ćemo skicirati i druga uređenja. Na prethodnom dijagramu lako uočavamo i odgovarajuće parove neuporediivh elemenata.

Ako uređenje $\trianglelefteq$ zadovoljava i uslov linearnosti, kažemo da je $\trianglelefteq$ *linearno uređenje*.

32. **Definicija.** Relacija $\triangleleft$ na skupu S je *strogo (parcijalno) uređenje (poredak)* ako je irefleksivna, asimetrična i tranzitivna (ekvalentno samo irefleksivna i tranzitivna, ekvivalentno samo asimetrična i tranzitivna).

Osnovni primeri strogog uređenja su $<$ na $\mathbb{R}$ ili $\subsetneq$ na familijama skupova. Strogo uređenje je *linearno* ako zadovoljava odgovarajući uslov linearnosti:

(L) $(\forall x, y \in S)(x \lhd y \vee x = y \vee y \lhd x)$ (linearnost)

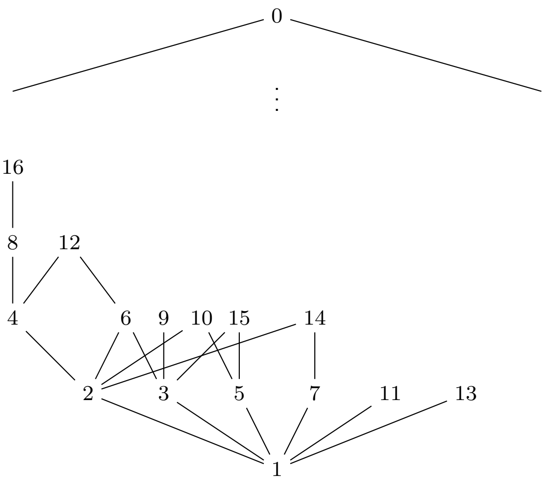
Svako uređenje ima prirodno pridruženo strogo uređenje, i obratno. Pridruživanje je dato na sledeći način:

uređenje	$\leftrightsquigarrow$	strogo uređenje
dato $\trianglelefteq$	$\rightsquigarrow$	$x \lhd y \;:\Leftrightarrow\; x \trianglelefteq y \wedge x \neq y$
$x \trianglelefteq y \;:\Leftrightarrow\; x \lhd y \vee x = y$	$\leftsquigarrow$	dato $\lhd$

Pridruženo (strogo) uređenje ima očekivane osobine. Npr. ako imamo uređenje $\trianglelefteq$ i pridruženo strogo uređenje $\lhd$, ako $a \trianglelefteq b$ i $b \lhd c$, onda $a \lhd c$, itd.

33. **Primer.** Relacija deljivosti $\mid$ na $\mathbb{N}$ definisana sa $a \mid b$ akko $b = ak$ za neko $k \in \mathbb{N}$ je uređenje. Refleksivnost, $a \mid a$, važi jer $a = a \cdot 1$. Tranzitivnost važi jer $a \mid b$ i $b \mid c$ povlači $b = ak$ i $c = bl$ za neke $k, l \in \mathbb{N}$, pa $c = a(kl)$ i $kl \in \mathbb{N}$ povlače $a \mid c$. Konačno, za antisimetričnost pretpostavimo $a \mid b$ i $b \mid a$, tj. $b = ak$ i $a = bl$ za neke $k, l \in \mathbb{N}$. Tada je $b = b(kl)$, tj. $b(1 - kl) = 0$. Ako je $b = 0$, onda je i $a = bl = 0$, i važi $a = b$, a ako je $1 - kl = 0$, tada je $kl = 1$, pa je $k = l = 1$ jer $k, l \in \mathbb{N}$; opet $a = bl = b$.

Primetimo da u smislu relacije deljivosti $a \mid b$ znači da je a manji a b veći element. Primetimo dve osobine. Za svako a važi $1 \mid a$ jer $a = 1 \cdot a$, kao i $a \mid 0$ jer $0 = a \cdot 0$. Dijagram ovog uređenja predstavljamo na sledeći način:



Naglasimo da je 0 na vrhu, veća od svih drugih elemenata.

34. **Definicija.** Neka je $\trianglelefteq$ uređenje na S, $A \subseteq S$ i $a \in S$.

Element a je *najmanji* element skupa A ako $a \in A$ i $(\forall x \in A)\; a \trianglelefteq x$.[2]

Element a je *minimalni* element skupa A ako $a \in A$ i $(\forall x \in A)\; x \ntriangleleft a$.[3]

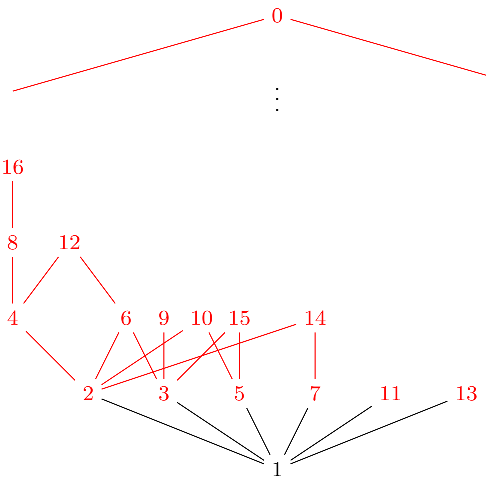
Dualno defininešemo pojmove *najvećeg* i *maksimalnog* elementa.

[2]Najmanji element u skupu je onaj koji je manji (ili jednak) od svih u tom skupu.

[3]Minimalni element u skupu je onaj od kojeg nijedan element iz tog skupa nije strogo manji.

35. **Primer.** Vratimo se na primer 33. Skup $A = \mathbb{N}$ ima najmanji element 1 jer $1 \mid a$ za sve $a \in \mathbb{N}$, kao i najveći element 0 jer $a \mid 0$ za sve $a \in \mathbb{N}$. Nijedan drugi element $a \neq 1$ nije najmanji jer ne deli 1, i nijedan drugi element $a \neq 0$ nije najveći jer ga ne deli 0. Takođe, jedino „ispod” 1 ne postoje drugi elementi, što znači da je 1 i jedini minimalni element, kao i jedino „iznad” 0 ne postoje drugi elementi, što znači da je 0 jedini maksimalni element.

Neka je sada $B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$:



Skup B nema više najmanji element jer bilo koji $a \neq 1$ ne deli sve preostale elemente u B, npr. $a \nmid a+1$. Međutim skup B ima beskonačno mnogo minimalnih elemenata: to su prosti brojevi. Jedino ispod njih nema drugih „crvenih” elemenata.

Skup $C = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nema najveći element, ali nema ni maksimalne elemente. Zaista, za $a \neq 0$ važi $a \mid 2a$ i $a \neq 2a$, pa a nije veći od $2a$, što znači da a nije najveći, i od a je strogo veći $2a$, što znači da a nije maksimalan.

36. **Tvrđenje.** *Neka je $\trianglelefteq$ uređenje na S i $A \subseteq S$.*

(i) Najmanji element skupa A, ako postoji, jedinstven je.

(ii) Najmanji element skupa A, ako postoji, je jedini minimalni element skupa A.

(iii) Ako je A lanac[4], minimalni element skupa A, ako postoji, je i najmanji element skupa A.

Analogno važi i ako termine najmanji/minimalni zamenimo sa najveći/maksimalni.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da su $a, b \in A$ najmanji elementi. Tada je $a \trianglelefteq b$ jer je a najmanji, pa je manji i od b, i $b \trianglelefteq a$ jer je b najmanji, pa je manji i od a. Zbog asimetričnosti $a = b$. Dakle, ako postoji, najmanji element je jedinstven.

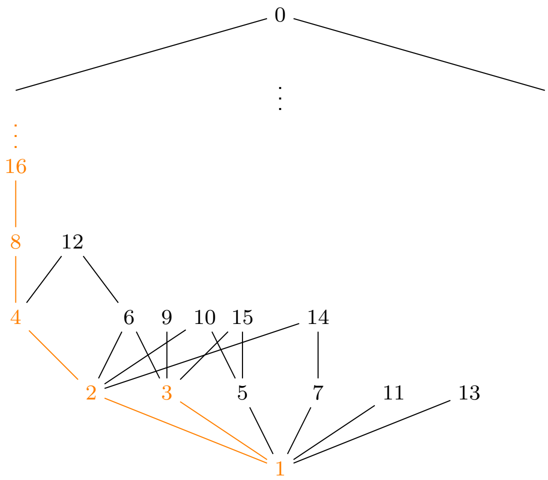
(ii) Pretpostavimo da je $a \in A$ najmanji element. Za svako $x \in A$ tada važi $a \trianglelefteq x$, pa nije $x \triangleleft a$, što znači da a jeste minimalan. Da bismo videli da je jedini minimalan pretpostavimo da je $b \in A$ minimalan element. Tada je $a \trianglelefteq b$ jer je a najmanji, pa je manji i od b, ali $a \not\triangleleft b$ jer je b minimalni pa ništa, ni a, nije strogo manje od njega. Prema tome $a = b$ i zaključujemo da je a jedini minimalni u A.

[4]Skup A je lanac ako su svaka dva njegova elementa uporediva.

(iii) Pretpostavimo da je A lanac i da je $a \in A$ minimalni element. Tada za sve $x \in A$ važi $x \ntriangleleft a$, ali kako je A lanac, x je uporediv sa a, pa mora biti $a \trianglelefteq x$. Dakle, a je najmanji u A. Ω

37. **Definicija.** Ako postoji, najmanji element skupa A obeležavamo sa $\min(A)$, a najveći element sa $\max(A)$.[5]

38. **Primer.** Prethodno tvrđenje povlači da ako skup A nema minimalne (maksimalne) elemente, ili ima bar dva minimalna (maksimalna) elementa, onda A ne može da ima najmanji (najveći) element. Ostaje otvoreno pitanje da li je moguće da A ima jedinstveni minimalni (maksimalni) element, a da ipak nema najmanji (najveći). Odgovor je pozitivan. Npr. uočimo u primeru 33 skup $A = \{2^n \mid n \geqslant 0\} \cup \{3\}$:



Skup A ima jedinstveni maksimalni element 3, ali on nije najveći.

39. **Tvrđenje.** *Neka je $\trianglelefteq$ uređenje na S i $A \subseteq S$ je neprazan konačan podskup. Tada A ima minimalan element (i slično, ima i maksimalan element).*

Dokaz. Dokaz možemo izvesti indukcijom po broju elemenata n u skupu A. Ako je $n = 1$, tj. $A = \{a\}$, a je očigledno minimalan element u A. Pretpostavimo da A ima $n+1$ element i izaberimo proizvoljni element $a \in A$. Ako je a slučajno minimalan, završili smo posao. Pretpostavimo da a nije minimalan, pa postoji $a' \in A$ takav da $a' \triangleleft a$. Po indukcijskoj hipotezi skup $A \smallsetminus \{a\}$ ima minimalan element b, što znači da nijedan element u A različit od a nije strogo manji od b. Prema tome $a' \ntriangleleft b$, pa kako $a' \triangleleft a$, mora biti i $a \ntriangleleft b$. To znači da nijedan element u A nije strogo manji od b (za elemente različite od a to važi po izboru b, a sad smo videli da važi i za a), pa je b minimalan u A. Ω

40. **Definicija.** Neka je $\trianglelefteq$ uređenje na S i $A \subseteq S$.

Element $a \in S$ je *donje ograničenje* za A ako $(\forall x \in A)\, a \trianglelefteq x$. Skup svih donjih ograničenja skupa A obeležavamo sa A^-.

[5]Oznake min i max su skraćenice za *minimum* i *maksimum*, što su sinonimi za najmanji i najveći element, i ne treba mešati ove termine sa minimalan i maksimalan.

Element $a \in S$ je *infimum* skupa A ako je najveće donje ograničenje, tj. $a = \max(A^-)$.
Dualno definišemo pojam *gornjeg ograničenja*, skup A^+ i pojam *supremuma*.

41. *Komentar*. Po definiciji ako neko donje ograničenje od A pripada A, ono je najmanji element skupa A. Takođe, ako infimum skupa A postoji, mora biti jedinstven (jer je $\max(A^-)$ jedinstven). Infimum skupa A obeležavamo sa $\inf(A)$; supremum skupa A obeležavamo sa $\sup(A)$.

Dakle, po definiciji, $\inf(A) = \max(A^-)$ i $\sup(A) = \min(A^+)$.

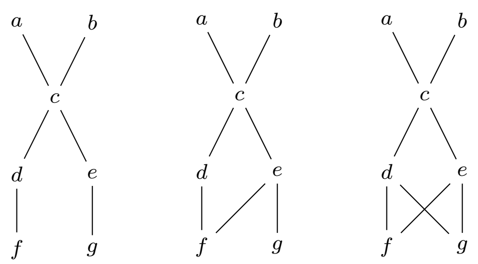
42. **Zadatak.** Neka je $\trianglelefteqslant$ uređenje na S i $A \subseteq S$.

(i) Ako postoji $\min(A)$, onda je $\inf(A) = \min(A)$.
(ii) Ako postoji $\inf(A)$ i $\inf(A) \in A$, onda je $\min(A) = \inf(A)$.

Analogno važi i ako min / inf zamenimo sa max / sup.

43. **Primer.** Vratimo se na primer 33. Uočimo $A = \{4, 6\}$. Tada je A^- skup zajedničkih delioca brojeva 4 i 6, $A^- = \{1, 2\}$, pa je $\inf(A) = \max(A^-) = 2$. Naglasimo da je infimum od A najveći među donjim ograničeninjima, tj. zajedničkim deliocima, od A, pa je $\inf(A)$ zapravo NZD brojeva 4 i 6. Slično, gornja ograničenja skupa A su zajednički sadržaoci brojeva 4 i 6, tj. $A^+ = \{12n \mid n \in \mathbb{N}\}$, pa je $\sup(A) = \min(A) = 12$, što je NZS brojeva 4 i 6.

44. **Primer.** Na skupu $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ imamo tri uređenja data dijagramima:



$\trianglelefteqslant$ $\quad$ $\trianglelefteqslant'$ $\quad$ $\trianglelefteqslant''$

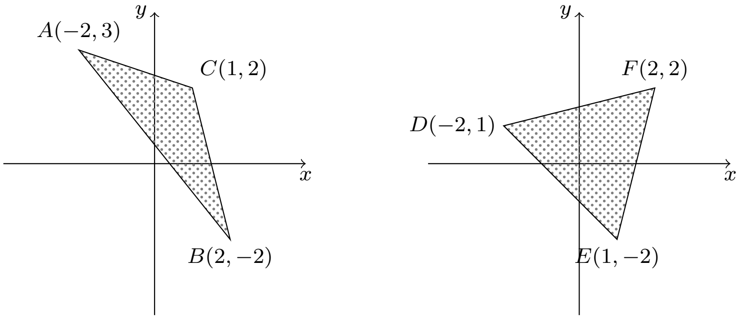
U sva tri slučaja, skup $A = \{c, d, e\}$ ima najveći element $\max(A) = c$ i dva minimalna elementa d i e. Skup $A^+ = \{a, b, c\}$ i on ima najmanji element c, pa je $\sup(A) = \min(A^+) = c = \max(A)$.

Što se tiče donjih ograničenja $A^-_{\trianglelefteqslant} = \varnothing$, $A^-_{\trianglelefteqslant'} = \{f\}$ i $A^-_{\trianglelefteqslant''} = \{f, g\}$. Prema tome $\inf_{\trianglelefteqslant}(A)$ ne postoji jer je $A^-_{\trianglelefteqslant}$ prazan, $\inf_{\trianglelefteqslant'}(A) = \max(A^-_{\trianglelefteqslant'}) = f$, a $\inf_{\trianglelefteqslant''}(A)$ ponovo ne postoji jer $A^-_{\trianglelefteqslant''}$, iako neprazan, nema najveći element (ima dva maksimalna elementa).

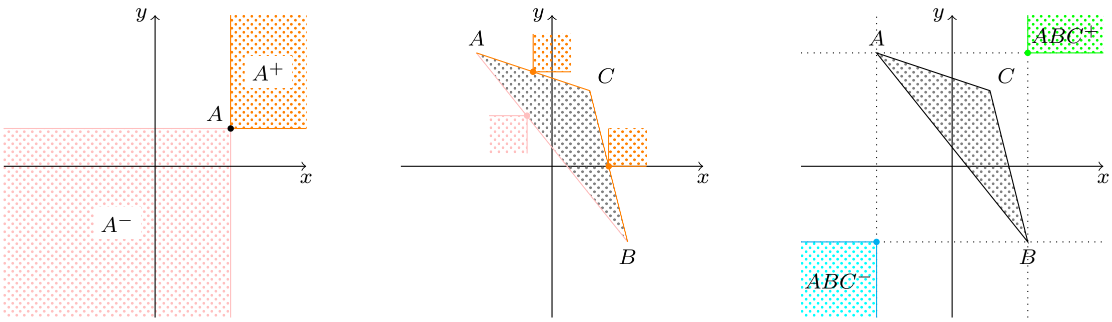
45. **Primer.** U realnoj ravni definišemo uređenje $\trianglelefteqslant$ sa:

$$(x_1, y_1) \trianglelefteqslant (x_2, y_2) \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 \leqslant x_2 \wedge y_1 \leqslant y_2.$$

(Nije teško videti da je $\trianglelefteqslant$ zaista uređenje na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.) Odredimo značajne tačke trouglova:



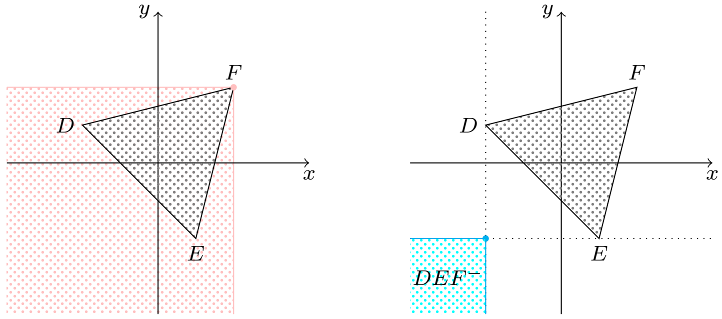
Šta na slici znači da je tačka A manja od tačke B? To znači da je A „levo-dole" u odnosu na B jer su joj obe koordinate manje od koordinata tačke B. Dakle, skup manjih tačaka od A, A^-, i skup većih tačaka od A, A^+ su (slika levo):



Pogledajmo sliku u sredini. Primetimo da od tačaka na stranici AB, i samo od njih, nijedna tačka trougla nije storgo manja, kao i da od tačaka na stranicama AC i BC, i samo od njih, nijedna tačka trougla nije strogo veća. To znači da su tačke duži AB minimalni elementi trougla ABC u našem uređenju, a da su tačke duži AC i BC maksimalni elementi trougla ABC. Prema tome trougao ABC nema ni najmanji ni najveći element jer ima beskonačno mnogo minimalnih i maksimalnih elemenata. Primetimo i da su tačke A i B dve tačke trougla koje su ujedno i minimalne i maksimalne.

Da bismo sračunali infimum i supremum trougla ABC treba da sračunamo ABC^- i ABC^+. Pogledjamo sliku desno. Donje ograničenje trougla ABC mora da bude levlje od njegove najlevlje tačke i ispod od njegove najniže tačke, pa vidimo da je $ABC^- = \{(x,y) \mid x \leqslant -2,\ y \leqslant -2\}$. Ovaj skup ima najveći element i to je baš tačka $(-2,-2)$, pa je $\inf(ABC) = (-2,-2)$. Na sličan način vidimo da je $\sup(ABC) = (2,3)$.

Što se tiče trougla DEF, slično kao malopre vidimo da su njegovi minimalni elementi tačke stranice DE, pa najmanji element ne postoji. Sa druge strane, teme F jeste najveći element trougla DEF, pa i jedini makismalni i supremum trougla (slika levo):



Infimum računamo slično kao kod trougla ABC i vidimo inf$(DEF) = (-2, -2)$.

VIII. **Dodatak za UML: Vitalijev skup.** Vratimo se na primer 29. Na $\mathbb{R}$ imamo definisanu ekvivalenciju $\approx$ sa $x \approx y$ akko $x - y \in \mathbb{Q}$. Po aksiomi izbora ova relacija ima bar jednu transverzalu T. Možemo da pretpostavimo da je $T \subseteq [0, 1)$. Zaista, izabranog predstavnika svoje klase $t \in T$ možemo zameniti sa predstavnikom iste klase $t - \lfloor t \rfloor \in [0, 1)$ (primetimo $t \approx t - \lfloor t \rfloor$ jer $t - (t - \lfloor t \rfloor) = \lfloor t \rfloor \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$), pa zamenom T sa $\{t - \lfloor t \rfloor \mid t \in T\}$ možemo pretpostaviti $T \subseteq [0, 1)$.

Želimo da odgovorimo na sledeće pitanje: Da li je moguće izračunati dužinu skupa T?

Nećemo ulaziti u zasnivanje pojma mere (konkretno dužine), navešćemo samo nekoliko prirodnih osobina koje bi dužina trebalo da ima, a biće nam dovoljni da završimo ovaj primer. Označimo sa $\lambda(S)$ dužinu skupa $S \subseteq \mathbb{R}$; jasno je da $\lambda(S) \in [0, +\infty]$. Razne podskupove od $\mathbb{R}$ merimo na prirodan način. Uzimamo da je svaka tačka dužine nula. Dužina intervala (a, b) je $\lambda((a, b)) = b - a$. Prirodno uzimamo da je dužina konačno mnogo disjunktnih skupova jednaka zbiru njihovih dužina: $\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} S_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(S_i)$ ako su S_i međusobno disjunktni. Takođe, prirodno uzimamo da je dužina translatorno invarijantna, što znači da je dužina skupa $a + S$, koji je dobijen translacijom skupa S za a, jednaka dužini skupa S: $\lambda(a + S) = \lambda(S)$. Konačno, podskupovi nekog skupa bi prirodno trebalo da su manje dužine: ako $S \subseteq S'$ onda $\lambda(S) \leqslant \lambda(S')$.

Skrećemo pažnju na još jednu činjenicu. Pretpostavimo da imamo međusobno disjunktne skupove $S_1, S_2, S_3, \ldots$. Kako smo već naglasili dužina skupa $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ jednaka je $\sum_{i=1}^{n} \lambda(S_i)$, pa je prirodno da je dužina skupa $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ jednaka

$$\lambda(S) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\bigcup_{i=1}^{n} S_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda(S_i).$$

Sve prethodno važi pod pretpostavkom da su odgovarajuće dužine definisane.

Vratimo se na transverzalu $T \subseteq [0, 1)$ ekvivalencije $\approx$. Dokazaćemo da ne možemo da izmerimo dužinu skupa T. Pretpostavimo suprotno, $\lambda(T) = \varepsilon$; jasno $\varepsilon \geqslant 0$, kao i $\varepsilon \leqslant 1$ jer $T \subseteq [0, 1)$.

Neka je $\mathbb{Q} \cap (-1,1) = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$.[6] Neka je $T_i = q_i + T$ – skup T transliran za q_i; za sve i je $\lambda(T_i) = \lambda(q_i + T) = \lambda(T) = \varepsilon$. Primetimo da za različite i, j imamo $T_i \cap T_j = \varnothing$. Zaista, ako $x \in T_i \cap T_j$, tada je $x = q_i + t' = q_j + t''$ za neke $t', t'' \in T$, pa je $t' - t'' = q_j - q_i \in \mathbb{Q}$, odakle $t' \approx t''$, pa kako je T transverzala mora biti $t' = t''$, odakle je i $q_i = q_j$, pa i $i = j$. Prema tome, $\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} T_i) = n\varepsilon$. Uočimo skup $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$. Njegova dužina je $\lambda(S) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\bigcup_{i=1}^{n} S_i) = \lim_{n\to\infty} n\varepsilon$, što je 0 ako je $\varepsilon = 0$ i ∞ ako je $\varepsilon > 0$.

Primetimo da je $(0,1) \subseteq S$. Zaista, ako $x \in (0,1)$, izaberimo $t \in T$ tako da $x \approx t$. Tada je $x - t \in \mathbb{Q}$. Kako je jasno i $x - t \in (-1,1)$, $x - t$ jednak je nekom q_i, pa je $x = q_i + t \in T_i$, odakle, $x \in S$. Ovo znači da je $\lambda(S) \geqslant 1$, što eliminiše slučaj $\varepsilon = 0$.

Sa druge strane, kako je $T \subseteq [0,1)$ i svaki $q_i \in (-1,1)$, translat $T_i = q_i + T$ sadržan je u $(-1,2)$. Prema tome i cela unija S sadržana je u ovom intervalu, a to znači da $\lambda(S) \leqslant 3$. Ovo eliminiše slučaj $\varepsilon > 0$.

Dakle, ako pretpostavimo da možemo da izmerimo dužinu od T, dolazimo do kontradikcije, pa zaključujemo da skup T ne može da ima definisanu dužinu.

Skup T zove se *Vitalijev skup*.

---

[6] Videćemo da je skup $\mathbb{Q} \cap (-1,1)$ *prebrojiv*, što znači da možemo nabrojati njegove elemente.