PRIMERI PRIMENE KOMPAKTNOSTI

SLAVKO MOCONJA

Sadržaj

Ova lekcija je za dodatno čitanje za zainteresovane studente.

I. **Uvod.** Teorema kompaktnosti je sledeće tvrđenje:

1. **Teorema** (Teorema kompaktnosti)**.** *Neka je Σ skup iskaznih formula. Skup Σ je zadovoljiv akko svaki konačan podskup od Σ je zadovoljiv.*

Setimo se da je skup formula zadovoljiv ako postoji valuacija slova pri kojoj su sve formule skupa tačne:

$$\Sigma \text{ je zadovoljiv} \quad :\Leftrightarrow \quad (\exists v)(\forall \sigma \in \Sigma)\, \hat{v}(\sigma) = \mathbf{t}.$$

Ovde ćemo pokazati nekoliko primera primene teoreme 1. Generalna ideja je da polazni problem, koji se odnosi na neku beskonačnu konfiguraciju, pametno pretvorimo u problem zadovoljivosti nekog skupa iskaznih formula. Samu zadovoljivost skupa dokazujemo koristeći kompaktnost tako što proverimo da su svi njegovi konačni podskupovi zadovoljivi. Za poslednje je obično potrebno da rešimo polazni problem za konačne konfiguracije, što je ponekad mnogo lakše nego rešiti polazni problem.

II. **Izbegavanje aritmetičkog niza.** Prvi problem je sledeći:

2. **Problem.** Dokazati da se racionalni brojevi mogu poređati tako da ne postoji rastući (u smislu uočenog poretka) aritmetički niz dužine tri. Drugim rečima, moguće je definisati linearni poredak $\prec$ na $\mathbb{Q}$ tako da kadgod $a \prec b \prec c$, niz (a, b, c) nije aritmetički niz (tj. $b - a \neq c - b$).

Prethodni problem ćemo rešiti koristeći kompaktnost, za šta će nam biti potrebna sledeća (konačna) lema.

Datum trenutne verzije: 5. novembar 2023.

3. **Lema.** *Za svako $n \in \mathbb{N}$, elementi $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ se mogu poređati tako da u ovom poretku ne postoji rastući aritmetički niz dužine tri.*

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po n.

Baza. Za $n = 0$ nemamo šta da dokažemo jer imamo samo jedan element. Za $n = 1$ imamo samo dva elementa 0 i 1, pa bilo da ih poređamo $0 \prec 1$ ili $1 \prec 0$, uslov je ispunjen. Prvi zanimljiv slučaj je $n = 2$, i treba da poređamo elemente $0, 1, 2, 3$ tako da nemamo rastući aritmetički niz dužine tri. Jedan način da to uradimo je:

$$0 \prec 2 \prec 1 \prec 3.$$

Korak. Pretpostavimo da smo poređali $0, 1, \ldots, 2^n - 1$ u niz:

$$a_0 \prec a_1 \prec \cdots \prec a_{2^n-1}$$

tako da u prethodnom nizu nemamo rastući aritmetički niz dužine tri. Sada ćemo poređati $0, 1, \ldots, 2^{n+1}-1$ u niz koji zadovoljava traženi uslov. Primetimo da je $\{0, 1, \ldots, 2^{n+1}-1\} = \{2a_0, 2a_1, \ldots, 2a_{2^n-1}\} \cup \{2a_0+1, 2a_1+1, \ldots, 2a_{2^n-1}+1\}$. Trik je da ih poređamo na sledeći način:

$$2a_0 \prec 2a_1 \prec \cdots \prec 2a_{2^n-1} \prec 2a_0 + 1 \prec 2a_1 + 1 \prec \cdots \prec 2a_{2^n-1} + 1.$$

Primetimo da u prvoj polovini nemamo rastući aritmetički niz dužine tri jer za $i < j < k$, $(2a_i, 2a_j, 2a_k)$ je aritmetički niz akko (a_i, a_j, a_k) je aritmetički niz, a poslednje ne važi po indukcijskoj hipotezi. Slično, u drugoj polovini nemamo rastući aritmetički niz dužine tri jer za $i < j < k$, $(2a_i + 1, 2a_j + 1, 2a_k + 1)$ je aritmetički niz akko (a_i, a_j, a_k) je aritmetički niz. Za $i < j$ i k, niz $(2a_i, 2a_j, 2a_k + 1)$ nije aritmetički jer je razlika prva dva člana parna, a razlika druga dva neparna. Slično, za i i $j < k$, $(2a_i, 2a_j + 1, 2a_k + 1)$ nije aritmetički jer je razlika prva dva člana neparna, a razlika druga dva parna. Prema tome, poređali smo $0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$ na odgovarajući način. Ω

Iskodirajmo sada naš problem u iskaznoj logici. Uočićemo skup slova $\mathcal{P} = \{p_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq b\}$ i sledeći skup iskaznih formula:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{p_{a,b} \veebar p_{b,a} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq b\} \\ &\cup \{p_{a,b} \wedge p_{b,c} \rightarrow p_{a,c} \mid a, b, c \in \mathbb{Q},\ a \neq b \neq c \neq a\} \\ &\cup \{\neg(p_{a,b} \wedge p_{b,c}) \mid (a, b, c) \in A\}, \end{aligned}$$

gde je A skup svih nekonstantnih, racionalnih, aritmetičkih nizova dužine tri. Primetimo da ako možemo da poređamo $\mathbb{Q}$ na željeni način, onda imamo sledeću valuaciju koja zadovoljava skup Σ:

$$v(p_{a,b}) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako } a \prec b \\ \mathbf{n} & \text{ako } b \prec a \end{cases}.$$

Zaista, formule $p_{a,b} \veebar p_{b,a}$ su tačne jer važi ili $a \prec b$ ili $b \prec a$, formule $p_{a,b} \wedge p_{b,c} \rightarrow p_{a,c}$ su tačne jer $a \prec b$ i $b \prec c$ povlače $a \prec c$, i na kraju formule $\neg(p_{a,b} \wedge p_{b,c})$ su tačne jer ako $(a, b, c) \in A$, kako poredak zadovoljava željeni uslov, ne može važiti $a \prec b$ i $b \prec c$.

Sa druge strane, ako imamo valuciju v koja zadovoljava Σ, na skupu $\mathbb{Q}$ možemo definisati željeni poredak na sledeći način:

$$a \prec b \quad :\Leftrightarrow \quad v(p_{a,b}) = \mathbf{t},\ \text{za različite } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Ovo zaista jeste poredak jer v zadovoljava prva dva skupa formula, a takođe ako $(a, b, c) \in A$, kako je $p_{a,b} \wedge p_{b,c}$ netačna, niz (a, b, c) nije rastući.

Prema tome sveli smo problem na dokaz da je Σ zadovoljiv skup. Po kompaktnosti, tj. teoremi 1, dovoljno je da dokažemo da su konačni podskupovi od Σ zadovoljivi. Pa neka je Σ_0 proizvoljan konačan podskup od Σ. Samo konačno mnogo slova pojavljuje se u skupu Σ_0, pa se i samo konačno mnogo racionalnih brojeva pojavljuje kao indeksi ovih slova. Neka je $Q_0 \subseteq \mathbb{Q}$ konačan podskup racionalnih brojeva koji se pojavljuju kao indeksi slova u skupu Σ_0; dakle, imamo:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_0 & \subseteq & \{p_{a,b} \veebar p_{b,a} \mid a, b \in Q_0,\ a \neq b\} \\ & \cup & \{p_{a,b} \wedge p_{b,c} \to p_{a,c} \mid a, b, c \in Q_0,\ a \neq b \neq c \neq a\} \\ & \cup & \{\neg(p_{a,b} \wedge p_{b,c}) \mid (a, b, c) \in A \cap Q_0^3\}. \end{array}$$

Označimo sa Σ_1 skup na desnoj strani. Dovoljno je da dokažemo da je on zadovoljiv, jer je onda i manji skup Σ_0 jasno zadovoljiv. Kako je Q_0 konačan možemo da nađemo prirodan broj M takav da $Ma \in \mathbb{Z}$ za sve $a \in \mathbb{Q}$ (uzmimo M da bude NZS svih imenilaca brojeva iz Q_0 zapisanih u obliku skraćenog razlomka). Dalje nađemo prirodan broj K takav da $Ma + K \geqslant 0$ za sve $a \in Q_0$. Konačno izaberimo prirodan broj N takav da $Ma + K < 2^N$, za sve $a \in A$. Prema lemi 3, brojeve $0, 1, \ldots, 2^N - 1$ možemo da poređamo tako da u ovom poretku nemamo rastući aritmetički niz dužine tri; označimo ovaj poredak sa $\prec$. Primetimo da su brojevi $Ma + K$, $a \in Q_0$, poređani u ovom poretku. Definišimo valuaciju v slova $p_{a,b}$, $a, b \in Q_0$, $a \neq b$ sa:

$$v(p_{a,b}) = \begin{cases} \mathbf{t} & Ma + K \prec Mb + K \\ \mathbf{n} & Mb + K \prec Ma + K \end{cases},$$

i primetimo da v zadovoljava Σ_1. Zaista, formule $p_{a,b} \veebar p_{b,a}$ i $p_{a,b} \wedge p_{b,c} \to p_{a,c}$ su tačne jer su $Ma + K$, $a \in Q_0$, poređani u odnosu na $\prec$. Formule $p_{a,b} \wedge p_{b,c}$ za $(a, b, c) \in A \cap Q_0^3$ su netačne jer je niz (a, b, c) aritmetički akko je niz $(Ma + K, Mb + K, Mc + K)$ aritmetički, pa ne važi $Ma + K \prec Mb + K \prec Mc + K$.

Dakle, Σ_1 je zadovoljiv i time smo rešili problem.

4. **Zadatak.** Dokazati da se realni brojevi mogu poređati tako da ne postoji rastući aritmetički niz dužine tri. [1]

III. **Produženje relacije podskupa.**

---

[1] *Ovo je teži zadatak. Možete da pokušate da ga rešite na sledeći način. Skup $\mathbb{R}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{Q}$, pa možemo da uočimo jednu njegovu bazu nad $\mathbb{Q}$. Koristeći rezultat problema 2 i zapis realnog broja u uočenoj bazi, pokušajte da konstruišite željeni poredak.*

5. **Problem.** Dokazati da postoji strogo linerano uređenje $\prec$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tako da $A \subsetneq B$ povlači $A \prec B$ za sve $A, B \subseteq \mathbb{N}$. (Tj. dokazati da se relacija podskupa na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ može dodefinisati do linearnog uređenja.)

Ponovo najpre dokazujemo odgovarajuću konačnu verziju problema.

6. **Lema.** *Za proizvoljne $n \geqslant 1$ i $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n$ se mogu poređati tako da ako $A_i \subsetneq A_j$, onda je i $A_i \prec A_j$, za sve $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po n.

Baza. Ako je $n = 1$ nemamo šta da dokažemo. Razmotrimo i slučaj (što nije neophodno) $n = 2$. Ako imamo dva podskupa $A, B \subseteq \mathbb{N}$, postupamo na sledeći način. Ako je $A \subsetneq B$, stavili bismo $A \prec B$, a ako je $B \subsetneq A$, stavili bismo $B \prec A$. Ako nije ni $A \subsetneq B$ ni $B \subsetneq A$, možemo da definišemo bilo $A \prec B$ bilo $B \prec A$, u oba slučaja imamo zadovoljavajuće ređanje.

Korak. Pretpostavimo da imamo sada podskupove $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Njih je samo konačno mnogo, pa možemo nađemo A_i tako da $A_j \nsubseteq A_i$ za sve $j \neq i$. (Zaista, ako nijedan A_i ne zadovoljava ovaj uslov, onda za svaki A_i možemo da nađemo A_j takav da $A_j \subsetneq A_i$. Sada imamo $A_1 \supsetneq A_{j_1}$ za neko j_1, pa $A_{j_1} \supsetneq A_{j_2}$ za neko j_2, pa $A_{j_2} \supsetneq A_{j_3}$, itd. U $n+1$ koraka nalazimo niz međusobno različitih $n+2$ podskupova:

$$A_1 \supsetneq A_{j_1} \supsetneq A_{j_2} \supsetneq A_{j_3} \supsetneq \cdots \supsetneq A_{j_{n+1}},$$

što nije moguće jer imamo samo $n+1$ skupova $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$.) Po indukcijskoj hipotezi skupove $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{n+1}$ možemo da poređamo tako da $A_j \subseteq A_k$ povlači $A_j \preccurlyeq A_k$ za sve $j, k \neq i$. Sada je dovoljno da dodefinišemo ovo ređanje tako što skup A_i stavimo ispred svih. Željeni uslov očigledno je zadovoljen. Ω

Sada ćemo iskodirati problem 5 u iskaznoj logici. Uočimo skup slova $\mathcal{P} = \{p_{A,B} \mid A, B \subseteq \mathbb{N},\ A \neq B\}$ i skup iskaznih formula:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{p_{A,B} \veebar p_{B,A} \mid A, B \subseteq \mathbb{N},\ A \neq B\} \\ &\cup \{p_{A,B} \wedge p_{B,C} \rightarrow p_{A,C} \mid A, B, C \subseteq \mathbb{N},\ A \neq B \neq C \neq A\} \\ &\cup \{p_{A,B} \mid A \subsetneq B \subseteq \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Ako možemo da nađemo rešenje $\prec$ problema 5, primetimo da možemo da definišemo i valuaciju v koja zadovoljava Σ na sledeći način:

$$v(p_{A,B}) = \begin{cases} t & \text{ako } A \prec B \\ n & \text{ako } B \prec A \end{cases} \quad \text{za } A, B \in \mathbb{N},\ A \neq B.$$

Sa druge strane, ako je Σ zadovoljiv i ako je v neka valuacija koja ga zadovoljava, možemo da definišemo željeno uređenje $\prec$ na sledeći način:

$$A \prec B \quad :\Leftrightarrow \quad v(p_{A,B}) = \mathbf{t},\ \text{za } A, B \in \mathbb{N},\ A \neq B.$$

Zaista, kako su formule $p_{A,B} \veebar p_{B,A}$ tačne, za svaka dva različita skupa A i B smo odredili da li je $A \prec B$ ili je $B \prec A$. Takođe, kako su formule $p_{A,B} \wedge p_{B,C} \rightarrow p_{A,C}$ tačne, definisana relacija je i tranitivna, pa smo korektno definisali linearno uređenje. Konačno, za $A \subsetneq B \subseteq \mathbb{N}$, tačna je formula $p_{A,B}$, pa zaista važi i $A \prec B$.

Prema tome, dovoljno je da dokažemo da je Σ zadovoljiv skup formula. Po kompaktnosti (teorema 1), dovoljno je da dokažemo da je svaki konačan podskup $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ zadovoljiv, pa uočimo proizvoljan konačan $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$. Kako je Σ_0 konačan, samo konačno mnogo skupova $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{N}$ pojavljuju se kao indeksi slova u skupu Σ_0. Dakle:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &\subseteq \{p_{A_i,A_j} \veebar p_{A_j,A_i} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j\} \\ &\cup \{p_{A_i,A_j} \wedge p_{A_j,A_k} \to p_{A_i,A_k} \mid 1 \leqslant i,j,k \leqslant n,\ i \neq j \neq k \neq i\} \\ &\cup \{p_{A_i,A_j} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ A_i \subsetneq A_j\}. \end{aligned}$$

Označimo sa Σ_1 skup na desnoj strani i primetimo da je dovoljno da dokažemo da je on zadovoljiv. Prema lemi 6 možemo da uočimo linearno uređenje $\prec$ skupova $A_1, \ldots, A_n$ koje proširuje relaciju podskupa. Sada definišemo valuaciju v sa:

$$v(p_{A_i,A_i}) = \begin{cases} t & \text{ako } A_i \prec A_j \\ n & \text{ako } A_j \prec A_i \end{cases} \qquad \text{za } 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j.$$

Sada direktno vidimo da v zadovoljava skup Σ_1, što završava rešenje problema 5.

7. **Zadatak.** Dokazati da se (bilo koje) parcijalno uređenje na (bilo kom) skupu S može dodefinisati do linearnog uređenja.

IV. **Obojivost grafa.** *Graf* je (konačan ili beskonačan) skup tačaka (*čvorova* grafa) od kojih su neke povezane *ivicama*. Graf je *planaran* ako je moguće da ga nacrtamo u ravni tako da se nikoje dve ivice ne preseku. Graf je k*-obojiv* ako svaki čvor grafa možemo da obojimo u jednu od k boja tako da jednako obojeni čvorovi nisu spojeni ivicom. (Pretpostavljamo da nijedan čvor nije povezan ivicom sam sa sobom.)

8. **Problem.** Dokazati da je planaran graf 4-obojiv.

Konačni planarni grafovi jesu 4-obojivi:

9. **Teorema** (Teorema o četiri boje)**.** *Konačan planaran graf je* 4*-obojiv.*

Prethodna teorema je čuvena jer je prva teorema koja je dokazana uz pomoć računara 1976. godine.

Da bismo dokazali beskonačnu verziju teoreme, tj. u potpunosti rešili problem 8, iskoristićemo kompaktnost. Uočimo graf G koji je dat skupom čvorova V i skupom ivica E. Uočimo sledeći skup iskaznih slova:

$$\mathcal{P} = \{p_v, c_v, z_v, b_v \mid v \in V\},$$

i skup iskaznih formula:

$$\begin{aligned} \Sigma \;=\; & \left\{ \begin{array}{l} (p_v \wedge \neg c_v \wedge \neg z_v \wedge \neg b_v) \vee (\neg p_v \wedge c_v \wedge \neg z_v \wedge \neg b_v) \vee \\ \vee (\neg p_v \wedge \neg c_v \wedge z_v \wedge \neg b_v) \vee (\neg p_v \wedge \neg c_v \wedge \neg z_v \wedge b_v) \end{array} \;\middle|\; v \in V \right\} \\ \cup\; & \left\{ \neg(p_v \wedge p_w) \wedge \neg(c_v \wedge c_w) \wedge \neg(z_v \wedge z_w) \wedge \neg(b_v \wedge b_w) \;\middle|\; \begin{array}{c} v, w \in V \text{ su} \\ \text{povezani ivicom} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Ako je graf G 4-obojiv, npr. bojama plavom, crvenom, zelenom i belom, možemo da definišemo valuaciju u koja zadovoljava Σ na sledeći način:

$$u(p_v) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako je čvor } v \text{ plav} \\ \mathbf{n} & \text{inače} \end{cases}, \quad u(c_v) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako je čvor } v \text{ crven} \\ \mathbf{n} & \text{inače} \end{cases}$$
$$u(z_v) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako je čvor } v \text{ zelen} \\ \mathbf{n} & \text{inače} \end{cases}, \quad u(b_v) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako je čvor } v \text{ beo} \\ \mathbf{n} & \text{inače} \end{cases}$$

za sve $v \in V$. Formule prvog skupa su tačne jer je svaki čvor obojen u tačno jednu boju. Formule drugog skupa su tačne jer dva povezana čvora nisu obojena istom bojom.

Sa druge strane, pretpostavimo da je Σ zadovoljiv i neka je u valuacija koja ga zadovoljava. Tada možemo da bojimo graf na sledeći način. Za čvor $v \in V$ obojimo:

$$\begin{array}{llll} v \text{ je plav} & :\Leftrightarrow \; u(p_v) = \mathbf{t}, & v \text{ je crven} & :\Leftrightarrow \; u(c_v) = \mathbf{t}, \\ v \text{ je zelen} & :\Leftrightarrow \; u(z_v) = \mathbf{t}, & v \text{ je beo} & :\Leftrightarrow \; u(b_v) = \mathbf{t}. \end{array}$$

Kako su formule prvog skupa tačne, za svako v tačno je tačno jedno od slova p_v, c_v, z_v, b_v, pa smo prethodnom definicijom svakom čvoru dodeli tačno jednu boju. Takođe, kako su formule drugog skupa tačne, dva povezana čvora nismo obojili istom bojom. Prema tome, dobili smo odgovarajuće bojenje.

Dakle, dovoljno je da dokažemo da je Σ zadovoljiv. Po kompaktnosti dovoljno je da dokažemo da su konačni podskupovi od Σ zadovoljivi. Neka je $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ proizvoljan konačan podskup. Kako je Σ_0 konačan, samo konačno mnogo $v \in V$ pojavljuje se kao indeks slova u Σ_0, pa neka je $V_0 \subseteq V$ konačan podskup onih v koji se pojavljuju kao indeksi u Σ_0. Dakle:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 \;\subseteq\; & \left\{ \begin{array}{l} (p_v \wedge \neg c_v \wedge \neg z_v \wedge \neg b_v) \vee (\neg p_v \wedge c_v \wedge \neg z_v \wedge \neg b_v) \vee \\ \vee (\neg p_v \wedge \neg c_v \wedge z_v \wedge \neg b_v) \vee (\neg p_v \wedge \neg c_v \wedge \neg z_v \wedge b_v) \end{array} \;\middle|\; v \in V_0 \right\} \\ \cup \; & \left\{ \neg(p_v \wedge p_w) \wedge \neg(c_v \wedge c_w) \wedge \neg(z_v \wedge z_w) \wedge \neg(b_v \wedge b_w) \;\middle|\; \begin{array}{c} v, w \in V_0 \text{ su} \\ \text{povezani ivicom} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Neka je Σ_1 skup na desnoj strani; dovoljno je da dokažemo da je on zadovoljiv. Neka je G_0 konačan podgraf od G čiji su čvorovi V_0. Graf G_0 jasno je konačan i planaran, pa prema teoremi o četiri boje možemo da ga 4-obojimo (recimo u boje plava, crvena, zelena i bela). Sada defininišemo valuaciju u koja zadovoljava Σ_1 sa:

$$u(p_v) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako je čvor } v \text{ plav} \\ \mathbf{n} & \text{inače} \end{cases}, \quad u(c_v) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako je čvor } v \text{ crven} \\ \mathbf{n} & \text{inače} \end{cases}$$
$$u(z_v) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako je čvor } v \text{ zelen} \\ \mathbf{n} & \text{inače} \end{cases}, \quad u(b_v) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako je čvor } v \text{ beo} \\ \mathbf{n} & \text{inače} \end{cases}$$

za sve $v \in V$. Kao i gore, lako vidimo da u zaista zadovoljava Σ_1. Time smo završili rešenje problema.

10. **Zadatak.** Dokazati da je graf k-obojiv akko su svi njegovi konačni podgrafovi k-obojivi.