Matematička logika u računarstvu

12. čas: Slučajan graf.

Teorija slučajnog grafa

Na jeziku $\mathcal{L} = \{E\}$, E je binaran relacijski simbol uočimo teoriju RG koja sadrži sledeće rečenice:

- $(\forall x)\ \neg E(x,x)$;
- $(\forall x,y)(E(x,y) \rightarrow E(y,x))$;
- za sve $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(\forall \underbrace{x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n}_{\text{svi različiti}})(\exists z)\left(\bigwedge_{i=1}^{m} E(z,x_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \neg E(z,y_j)\right).$$

Prve dve osobine kažu da je model RG neusmeren graf. Poslednja osobina kaže da kad god u modelu imamo različite čvorove $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n$, imamo i čvor koji je povezan sa svim a_i i nepovezan sa svim b_j.

RG je konzistentna

Teorema. *RG* je konzistentna teorija.

Dokaz. Neka je $M = \mathcal{P}_{fin.}(\mathbb{N})$ i neka je $\beta : \mathcal{P}_{fin.}(\mathbb{N}) \xrightarrow{bij.} \mathbb{N}$ data sa $\beta(X) := \sum_{n \in X} 2^n$ (specijalno, $\beta(\emptyset) := 0$).

Primetimo da $\beta(X) > \max(X)$ (uzimamo $\max(\emptyset) = -1$).

Definišimo $\mathcal{M}$ na M sa: $E^{\mathcal{M}}(X, Y) \;\Leftrightarrow\; \beta(X) \in Y \vee \beta(Y) \in X$. Jasno, ovaj model zadovoljava prve dve aksiome.

Za treću aksiomu: Neka su $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ međusobno različiti. Neka je $Y := \{\beta(Y_1), \ldots, \beta(Y_n)\}$ i $Z := \{\beta(X_1), \ldots, \beta(X_m), \beta(Y)\}$; Z je traženi čvor. $\square$

RG određuje potpunu teoriju

Teorema. RG je $\aleph_0$-kategorična.

Dokaz. Tamo-amo argument... $\square$

Posledica. RG određuje potpunu teoriju.

Posledica dokaza. Prebrojiv $G \models RG$ je ultrahomogen.

Eliminacija kvantifikatora

Teorema. RG ima eliminaciju kvantifikatora.

Osobine

Neka je $G \models RG$.

Tvrđenje 0. G je povezan i dijametar mu je 2.

Tvrđenje 1. Neka su $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots b_n \in G$ različiti čvorovi. Tada podgraf:

$$H := \{c \in G \mid \bigwedge E(c, a_i) \wedge \bigwedge \neg E(c, b_j)\} \models RG.$$

Tvrđenje 2. Ako $A \subseteq_{kon.} G$, tada podgraf $G \setminus A \models RG$.

Tvrđenje 3. Ako u G dodamo konačno mnogo ivica i obrišemo konačno mnogo ivica, dobijamo $G' \models RG$.

Osobine

Tvrđenje 4. Ako je $A \subseteq_{kon.} G$ i obrnemo sve ivice između A i $G \setminus A$ (postojeće ivice obrišemo, a nepostojeće nacrtamo), dobijamo $G' \models RG$.

Bitno je da je A konačan!

Tvrđenje 5. Ako je $G = G_1 \cup \cdots \cup G_n$ particija, bar jedan od delova je model za RG.

Tvrđenje 6. Ako je H konačan graf, onda se H utapa u G.