Matematička logika u računarstvu

9. čas: Eliminacija kvantifikatora.

Tamo–amo argument

Primer. Ako su $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ dva prebrojiva gusta linearna uređenja bez krajeva, onda $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Koliko prebrojivih modela do na izomorfizam ima DLO?

Koliko prebrojivih modela ima teorija na jeziku $\{<, c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ koja kaže da je $<$ gusto linearno uređenje bez krajeva i $c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$?

Eliminacija kvantifikatora

Definicija. Teorija T ima *eliminaciju kvantifikatora* ako za svaku formulu $\varphi(\bar{x})$ postoji beskvantorna formula $\psi(\bar{x})$ takva da $T \vdash (\forall x)(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Lema. Pretpostavimo da za svaku beskvantornu formulu $\varphi(x, \bar{y})$ postoji beskvantorna formula $\psi(\bar{y})$ takva da $T \vdash (\forall \bar{y})((\exists x)\ \varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{y}))$. Tada T ima eliminaciju kvantifikatora.

Posledica. Dovoljno je eliminisati kvantifikator u:

$$(\exists x) \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x, \bar{y}),$$

gde je svaka φ_i atomska ili negacije atomske formule u kojoj x eksplicitno učestvuje.

Primeri

(a) DLO ima eliminaciju kvantifikatora;

(b) $(\mathbb{Z}, s)$ ima eliminaciju kvantifikatora;

(c) $(\mathbb{N}, s, <, 0)$ ima eliminaciju kvantifikatora;

Neka je (S, E) beskonačan skup sa ekvivalencijom E. Ako:

(d) E ima beskonačno mnogo klasa i svaka je dvočlana;

(e) E ima beskonačno mnogo klasa i svaka je beskonačna;

(f) E ima beskonačno mnogo dvočlanih i beskonačno mnogo točlanih i svaka klasa je dvočlana ili točlana;

(g) E ima po jednu n-točlanu klasu za svako $n \geqslant 1$.