Matematička logika u računarstvu

8. čas: Elementarno utapanje.

Elementarno utapanje

Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dve $\mathcal{L}$-strukture. Utapanje $\eta : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ je *elementarno* ako:

$$\mathcal{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\eta(m_1), \dots, \eta(m_n))$$

za sve formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ i sve $m_1, \dots, m_n \in M$.

Ako je $\mathcal{M} \leqslant \mathcal{N}$ i $i : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ je elementarno, onda je $\mathcal{M}$ *elementarna podstruktura* od $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

Primer. $(\mathbb{N}, <) \nprec (\mathbb{Z}, <)$, $(2\mathbb{Z}, <) \nprec (\mathbb{Z}, <)$.

Teorema (Tarski–Vot). Neka je $\mathcal{M} \leqslant \mathcal{N}$. Tada $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ akko za sve formule $\varphi(x, \bar{y})$ i $\bar{m} \in M^{|\bar{y}|}$, ako postoji $b \in N$ tako da $\mathcal{N} \models \varphi(b, \bar{m})$, onda postoji i $a \in M$ tako da $\mathcal{N} \models \varphi(a, \bar{m})$.

Primer. $(\mathbb{N}, <) \prec (\mathbb{N} + \mathbb{Z}, <)$ i $(\mathbb{Q}, <) \prec (\mathbb{R}, <)$.

Tamo–amo argument

Primer. Ako su $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ dva prebrojiva gusta linearna uređenja bez krajeva, onda $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Koliko prebrojivih modela do na izomorfizam ima *DLO*?

Koliko prebrojivih modela ima teorija na jeziku $\{<, c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ koja kaže da je $<$ gusto linearno uređenje bez krajeva i $c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$?