Matematička logika u računarstvu

6. i 7. čas: Elementarna ekvivalentnost.

Teorema kompaktnosti

Teorija Σ je zadovoljiva akko Σ je konačno zadovoljiva (svaka konačna podteorija od Σ je zadovoljiva).

Primer. Svako parcijalno uređenje se može proširiti do linearnog uređenja.

Primer. Postoji nearhimedovo uređeno polje.

Primer. Klasa torzionih grupa nije aksiomatizabilna.

Definabilni skupovi

Definicija

Neka je $\mathcal{M}$ neka $\mathcal{L}$-struktura. Skup $X \subseteq M^n$ je *definabilan nad* $A \subseteq M$ ako postoji $\mathcal{L}$-formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, $|\bar{x}| = n$, i $\bar{a} \in M^{|\bar{y}|}$ tako da:

$$X = \{\bar{m} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi(\bar{m}, \bar{a})\}.$$

Definabilni skupovi

Definicija

Neka je $\mathcal{M}$ neka $\mathcal{L}$-struktura. Skup $X \subseteq M^n$ je *definabilan nad* $A \subseteq M$ ako postoji $\mathcal{L}$-formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, $|\bar{x}| = n$, i $\bar{a} \in M^{|\bar{y}|}$ tako da:

$$X = \{\bar{m} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi(\bar{m}, \bar{a})\}.$$

Primeri

- U $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ skup $\mathbb{R}^+$ je definabilan nad $\emptyset$;
- u $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ uređenje $<$ je definabilno nad $\emptyset$;
- u $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$ uređenje $<$ je definabilno nad $\emptyset$;
- u $\mathcal{M} = (\mathbb{R}[X], +, -, \cdot, 0, 1)$ skup $\mathbb{R}$ je definabilan nad $\emptyset$.

Potreban uslov za definabilnost

Tvrđenje

Neka je $\mathcal{M}$ neka $\mathcal{L}$-struktura. Ako je $X \subseteq M^n$ definabilan nad $A \subseteq M$, onda za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$ važi $\sigma[X] = X$. (Preciznije, ako je $\sigma \in \mathcal{M}$ takav da $(\forall a \in A)\, \sigma(a) = a$, onda je $\sigma[X] = X$.)

Potreban uslov za definabilnost

Tvrđenje

Neka je $\mathcal{M}$ neka $\mathcal{L}$-struktura. Ako je $X \subseteq M^n$ definabilan nad $A \subseteq M$, onda za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$ važi $\sigma[X] = X$. (Preciznije, ako je $\sigma \in \mathcal{M}$ takav da $(\forall a \in A)\, \sigma(a) = a$, onda je $\sigma[X] = X$.)

Primeri

- U $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, <)$ jednodimenzioni skupovi definabilni nad $\varnothing$ su samo $\varnothing$ i $\mathbb{Z}$;
- u $\mathcal{M} = (\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ skup $\mathbb{R}$ nije definabilan (ni nad jednim skupom);
- u $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, +, -, 0)$ skup $\mathbb{Z}$ nije definabilan nad $\varnothing$;
- u $\mathcal{M} = (\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ skup $\{i\}$ nije definabilan nad $\varnothing$.

Definabilni elementi

Definicija

Element $m \in \mathcal{M}$ je definabilan nad A ako je $\{m\}$ definabilan nad A.

Skup elemenata definabilnih nad A označavamo sa $\mathrm{dcl}(A)$ – definabilno zatvorenje od A.

Tvrđenje

- $A \subseteq \mathrm{dcl}(A)$;
- $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mathrm{dcl}(A) \subseteq \mathrm{dcl}(B)$;
- $\mathrm{dcl}(A) = \bigcup\{\mathrm{dcl}(A_0) \mid A_0 \subseteq A \text{ konačan}\}$;
- $\mathrm{dcl}(\mathrm{dcl}(A)) = \mathrm{dcl}(A)$.

Algebarski elementi

Definicija

Neka $\bar{a} \in A^{|\bar{y}|}$ i $\varphi(x, \bar{y})$ je $\mathcal{L}$-formula. Formula $\varphi(x, \bar{a})$ je *algebarska* ako definiše konačan skup.

Element $m \in \mathcal{M}$ je *algebarski nad A* ako zadovoljava neku algebarsku formulu nad A.

Skup elemenata algebarskih nad A označavamo sa $\mathrm{acl}(A)$ – algebarsko zatvorenje od A.

Tvrđenje

- $\mathrm{dcl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(A)$;
- $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(B)$;
- $\mathrm{acl}(A) = \bigcup\{\mathrm{acl}(A_0) \mid A_0 \subseteq A \text{ konačan}\}$;
- $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.

Elementarna ekvivalencija

Definicija

- *Teorija* $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ je teorija:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi\text{-rečenica} \mid \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

- $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su *elementarno ekvivalentne*, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ako $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Elementarna ekvivalencija

Definicija

- *Teorija* $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ je teorija:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi\text{-rečenica} \mid \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

- $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su *elementarno ekvivalentne*, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ako $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Komentar. Teorija Σ je potpuna akko $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ za neku strukturu $\mathcal{M}$. Takođe, $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ akko $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$.

Elementarna ekvivalencija

Definicija

- *Teorija* $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ je teorija:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi\text{-rečenica} \mid \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

- $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su *elementarno ekvivalentne*, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ako $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Komentar. Teorija Σ je potpuna akko $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ za neku strukturu $\mathcal{M}$. Takođe, $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ akko $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$.

Lema. Ako $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, onda $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Obratno važi ako je $\mathcal{M}$ konačna, i ne važi ako je $\mathcal{M}$ beskonačna.