Matematička logika u računarstvu

5. čas: Teorema kompaktnosti.

Do sada...

Lindenbaumova teorema. Svaka konzistentna teorija Σ ima potpuno proširenje.

Definicija. Konzistentna $\mathcal{L}$-teorija je *Henkinova* ako za svaku $\mathcal{L}$-formulu φ sa jednom slobodnom promenljivom x postoji $c \in \mathcal{C}$ tako da:

$$\Sigma \vdash (\exists x)\, \varphi \to \varphi[c/x].$$

Lema. Neka je Σ konzistentna $\mathcal{L}$-teorija. Tada postoji proširenje jezika $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ konstantama i Henkinovo $\mathcal{L}^*$-proširenje Σ^* teorije Σ. Štaviše, proširenje jezika možemo da izaberemo tako da $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}|$.

Teorema (Henkinova konstrukcija)
Neka je Σ potpuna i Henkinova $\mathcal{L}$-teorija. Tada Σ je zadovoljiva. Štaviše, Σ ima model kardinalnosti najviše $|\mathcal{L}|$.

Henkinova konstrukcija

1. korak. Na $\mathcal{C}$ definišemo ekvivalenciju $\sim$ sa $c \sim d$ akko $\Sigma \vdash c = d$. Uzmemo $M = \{[c] \mid c \in \mathcal{C}\}$; jasno $|M| \leqslant |\mathcal{L}|$.

2. korak. Na M definišemo $\mathcal{L}$-strukturu $\mathcal{M}$ sa:

- $c^{\mathcal{M}} = [c]$;

- $f^{\mathcal{M}}([c_1], \ldots, [c_{n_f}]) = [c]$ akko $\Sigma \vdash f(c_1, \ldots, c_{n_f}) = c$;

- $([c_1], \ldots, [c_{n_R}]) \in R^{\mathcal{M}}$ akko $\Sigma \vdash R(c_1, \ldots, c_{n_R})$.

3. korak. Za term t bez promenljivih, $t^{\mathcal{M}} = [c]$ akko $\Sigma \vdash t = c$.

4. korak. Za rečenicu φ, $\mathcal{M} \models \varphi$ akko $\Sigma \vdash \varphi$.

Iz 4. koraka direktno sledi $\mathcal{M} \models \Sigma$.

Gedelova teorema potpunosti (1929.)

Teorija Σ je konzistentna akko Σ je zadovoljiva.

Predstavljen je Henkinov dokaz iz 1949.

Gedelova teorema potpunosti

Gedelova teorema potpunosti (1929.)

Teorija Σ je konzistentna akko Σ je zadovoljiva.

Predstavljen je Henkinov dokaz iz 1949.

Posledica

Za teoriju Σ i rečenicu φ važi: $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.

Gedelova teorema potpunosti (1929.)

Teorija Σ je konzistentna akko Σ je zadovoljiva.

Predstavljen je Henkinov dokaz iz 1949.

Posledica

Za teoriju Σ i rečenicu φ važi: $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.

Posledica (Donja Levenheim-Skolem-Tarski teorema)

Konzistentna $\mathcal{L}$-teorija Σ ima model kardinalnosti najviše $|\mathcal{L}|$.

Teorema kompaktnosti

Teorema kompaktnosti (Gedel 1930, Malcev 1936.)

Teorija Σ je zadovoljiva akko Σ je konačno zadovoljiva (svaka konačna podteorija od Σ je zadovoljiva).

Teorema kompaktnosti (Gedel 1930, Malcev 1936.)

Teorija Σ je zadovoljiva akko Σ je konačno zadovoljiva (svaka konačna podteorija od Σ je zadovoljiva).

Tvrđenje

Ako teorija Σ ima proizvoljno velike konačne modele, Σ ima i beskonačan model.

Teorema kompaktnosti (Gedel 1930, Malcev 1936.)

Teorija Σ je zadovoljiva akko Σ je konačno zadovoljiva (svaka konačna podteorija od Σ je zadovoljiva).

Tvrđenje

Ako teorija Σ ima proizvoljno velike konačne modele, Σ ima i beskonačan model.

Gornja Levenhajm-Skolem-Tarski teorema

Neka Σ ima beskonačan model i neka $\kappa \geqslant |\mathcal{L}|$. Tada Σ ima model kardinalnosti κ.

Primer. Graf je k-obojiv akko je svaki njegov konačan podgraf k-obojiv.

Primene kompaktnosti

Primer. Graf je k-obojiv akko je svaki njegov konačan podgraf k-obojiv.

Primer. Svako parcijalno uređenje se može proširiti do linearnog uređenja.

Primene kompaktnosti

Primer. Graf je k-obojiv akko je svaki njegov konačan podgraf k-obojiv.

Primer. Svako parcijalno uređenje se može proširiti do linearnog uređenja.

Primer. Postoji nearhimedovo uređeno polje.

Primene kompaktnosti

Primer. Graf je k-obojiv akko je svaki njegov konačan podgraf k-obojiv.

Primer. Svako parcijalno uređenje se može proširiti do linearnog uređenja.

Primer. Postoji nearhimedovo uređeno polje.

Primer. Klasa konačnih grupa nije aksiomatizabilna.

Primene kompaktnosti

Primer. Graf je k-obojiv akko je svaki njegov konačan podgraf k-obojiv.

Primer. Svako parcijalno uređenje se može proširiti do linearnog uređenja.

Primer. Postoji nearhimedovo uređeno polje.

Primer. Klasa konačnih grupa nije aksiomatizabilna.

Primer. Klasa beskonačnih grupa nije konačno aksiomatizabilna.

Primene kompaktnosti

Primer. Graf je k-obojiv akko je svaki njegov konačan podgraf k-obojiv.

Primer. Svako parcijalno uređenje se može proširiti do linearnog uređenja.

Primer. Postoji nearhimedovo uređeno polje.

Primer. Klasa konačnih grupa nije aksiomatizabilna.

Primer. Klasa beskonačnih grupa nije konačno aksiomatizabilna.

Primer. Klasa torzionih grupa nije aksiomatizabilna.

Elementarna ekvivalencija

Definicija

- *Teorija* $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ je teorija:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi\text{-rečenica} \mid \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

- $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su *elementarno ekvivalentne*, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ako $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Elementarna ekvivalencija

Definicija

- *Teorija* $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ je teorija:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi\text{-rečenica} \mid \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

- $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su *elementarno ekvivalentne*, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ako $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Komentar. Teorija Σ je potpuna akko $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ za neku strukturu $\mathcal{M}$. Takođe, $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ akko $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$.

Elementarna ekvivalencija

Definicija

- *Teorija* $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ je teorija:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi\text{-rečenica} \mid \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

- $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su *elementarno ekvivalentne*, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ako $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Komentar. Teorija Σ je potpuna akko $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ za neku strukturu $\mathcal{M}$. Takođe, $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ akko $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$.

Lema. Ako $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, onda $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Obratno važi ako je $\mathcal{M}$ konačna, i ne važi ako je $\mathcal{M}$ beskonačna.