Matematička logika u računarstvu

3. i 4. čas: Konzistentnost i Henkinova konstrukcija.

Naravno da sam nekonzistentan! Samo su logičari i kreteni konzistentni!

Tom Robins, *I kaubojke mogu da plaču*

Pravila PD

$$\frac{\varphi}{\varphi}R \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}MP \qquad \frac{\begin{array}{|l}\varphi \quad \text{pp}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}D \qquad \frac{\begin{array}{|l}\neg\varphi \quad \text{pp}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}RAA$$

Pravila PD

$$
\frac{(\forall x)\,\varphi}{\varphi[t/x]}\,I \quad \text{i} \quad \frac{\begin{array}{|ll} \boxed{u} & \text{nova promenljiva} \\ \vdots & \\ \varphi[u/x] & \end{array}}{(\forall x)\,\varphi}\,G
$$

U I, t je term takav da je smena $\varphi[t/x]$ regularna.

U G, u je nova (nekorišćena) promenljiva.

$$
\frac{}{t = t}\,r \quad \text{i} \quad \frac{t = s \quad \varphi[t/x]}{\varphi[s/x]}\,S
$$

U S, t i s su termi takvi da su smene $\varphi[t/x]$ i $\varphi[s/x]$ regularne.

Teorema saglasnosti

Lema

Neka su $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ i $\varphi \in \mathcal{L}$. Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda za svaku $\mathcal{L}$-strukturu $\mathcal{M}$ i valuaciju v u $\mathcal{M}$ važi $(\mathcal{M}, v) \models \Sigma$ povlači $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$.

Posledica

$\Sigma \vdash \varphi \implies \Sigma \models \varphi$.

Konzistentnost i konačan karakter

Definicija

Skup Σ je *konzistentan* ako $\Sigma \nvdash \bot$.

Komentari

- $\Sigma \vdash \varphi \iff \left(\exists \Sigma_0 \underset{kon.}{\subseteq} \Sigma\right) \Sigma_0 \vdash \varphi$;
- Σ je konzistentan $\iff \left(\forall \Sigma_0 \underset{kon.}{\subseteq} \Sigma\right) \Sigma_0$ je konzistentan.

Teorema saglasnosti

Σ je zadovoljiv $\implies$ Σ je konzistentan.

Teorije

Definicija

Skup Σ je *teorija* ako su sve formule u Σ rečenice.

Definicija

Konzistentna teorija Σ je *potpuna* ako:

$$(\forall \varphi\text{–rečenica})(\varphi \in \Sigma \vee \neg\varphi \in \Sigma).$$

Definicija

Konzistentna teorija Σ *određuje potpunu teoriju* ako:

$$(\forall \varphi\text{–rečenica})(\Sigma \vdash \varphi \vee \Sigma \vdash \neg\varphi).$$

Deduktivno zatvorenje

Komentar

U prethodne dve definicije disjunkcije su ekskluzivne.

Komentar

Ako Σ određuje potpunu teoriju, Σ ima jedinstveno potpuno proširenje:

$$\Sigma^d = \{\varphi\text{–rečenica} \mid \Sigma \vdash \varphi\}.$$

Lindenbaumova teorema

Svaka konzistentna teorija Σ ima potpuno proširenje.

Henkinova teorija

Definicija

Konzistentna $\mathcal{L}$-teorija je *Henkinova* ako za svaku $\mathcal{L}$-formulu φ sa jednom slobodnom promenljivom x postoji $c \in \mathcal{C}$ tako da:

$$\Sigma \vdash (\exists x)\, \varphi \rightarrow \varphi[c/x].$$

Lema

Neka je Σ konzistentna $\mathcal{L}$-teorija. Tada postoji proširenje jezika $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ konstantama i konzistentno $\mathcal{L}'$-proširenje Σ' teorije Σ tako da za svaku $\mathcal{L}$-formulu sa jednom slobodnom promenljivom x postoji $c \in \mathcal{C}'$ tako da:

$$\Sigma' \vdash (\exists x)\, \varphi \rightarrow \varphi[c/x].$$

Štaviše, proširenje jezika možemo da izaberemo tako da $|\mathcal{L}'| = |\mathcal{L}|$.

Henkinova konstrukcija

Lema

Neka je Σ konzistentna $\mathcal{L}$-teorija. Tada postoji proširenje jezika $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ konstantama i Henkinovo $\mathcal{L}^*$-proširenje Σ^* teorije Σ.

Štaviše, proširenje jezika možemo da izaberemo tako da $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}|$.

Teorema (Henkinova konstrukcija)

Neka je Σ potpuna i Henkinova $\mathcal{L}$-teorija. Tada Σ je zadovoljiva. Štaviše, Σ ima model kardinalnosti najviše $|\mathcal{L}|$.

Gedelova teorema potpunosti

Teorija Σ je konzistentna akko Σ je zadovoljiva.

Posledica

Za teoriju Σ i rečenicu φ važi: $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.