Matematička logika u računarstvu

2. čas: Prirodna dedukcija

Logičar: *Mačka ima četiri šape.*
Stariji gospodin: *Moj pas ima četiri šape.*
Logičar: *Onda je mačka.*
Stariji gospodin: *Dakle moj pas je mačka?*
Logičar: *I obratno je takođe tačno.*

Ežen Jonesko, *Nosorog*

S prethodnog časa

Ako je v valuacija u $\mathcal{M}$, x promenljiva i $a \in M$, $v_{a/x}$ je:

$$v_{a/x}(y) = \begin{cases} a & \text{ako } y = x \\ v(y) & \text{ako } y \neq x \end{cases}.$$

Lema. $(t[s/x])^{\mathcal{M}}[v] = t^{\mathcal{M}}[v_{s^{\mathcal{M}}[v]/x}]$. Ω

Tvrđenje. Tačnost formule zavisi od vrednosti njenih slobodnih promenljivih. Ω

Lema. Ako je $\varphi[s/x]$ regularna smena:

$$(\mathcal{M}, v) \models \varphi[s/x] \iff (\mathcal{M}, v_{s^{\mathcal{M}}[v]/x}) \models \varphi.$$

Definicija. Smena $\varphi[s/x]$ je *regularna* ako nakon smene nijedna nova promenljiva nije postala vezana.

Zadovoljivi skupovi

Definicija

Neka je $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$.

- $(\mathcal{M}, v) \models \Sigma$ ako $(\forall \varphi \in \Sigma)\ (\mathcal{M}, v) \models \varphi$;
- $\mathcal{M} \models \Sigma$, $\mathcal{M}$ je *model* za Σ, ako $(\forall \varphi \in \Sigma)\ \mathcal{M} \models \varphi$;
- Σ je *zadovoljiv* ako $(\exists \mathcal{M})\ \mathcal{M} \models \Sigma$;
- $\Sigma \models \varphi$, φ je *logička posledica od* Σ, ako $(\forall \mathcal{M})\ (\mathcal{M} \models \Sigma \implies \mathcal{M} \models \varphi)$.
- **Komentar.** Σ je zadovoljiv $\iff \Sigma \not\models \bot$.
- Σ je *$\mathcal{L}$-teorija* ako su sve formule iz Σ rečenice.

Pravila PD

Prirodna dedukcija je sistem za formalno dokazivanje formula iz polaznih premisa koji se bazira na uobičajenim deduktivnim postupcima matematičkog dokaza. Prva četiri pravila zaključivanja su:

$$\frac{\varphi}{\varphi}\,R \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,MP \qquad \frac{\begin{array}{|ll} \varphi & \text{pp} \\ \vdots & \\ \psi & \end{array}}{\varphi \to \psi}\,D \qquad \frac{\begin{array}{|ll} \neg\varphi & \text{pp} \\ \vdots & \\ \bot & \end{array}}{\varphi}\,RAA$$

Zovemo ih *reiteracija*, *modus ponens*, pravilo *dedukcije* i *reductio ad absurdum*.

Pravila PD

Pravila za univerzalni kvantifikator su:

$$\frac{(\forall x)\,\varphi}{\varphi[t/x]}\,I \quad \text{i} \quad \frac{\begin{array}{|ll} \boxed{u} & \text{nova promenljiva} \\ \vdots & \\ \varphi[u/x] & \end{array}}{(\forall x)\,\varphi}\,G$$

Zovemo ih *instanciranje* i *generalizacija*.

U pravilu I zahtevamo da je t term takav da je smena $\varphi[t/x]$ regularna.

U pravilu G zahtevamo da je u nova (nekorišćena) promenljiva (primetimo da je tada smena $\varphi[u/x]$ regularna); dovoljno je da zahtevamo da je u promenljiva koja u dotadašnjem dokazu nema slobodna pojavljivanja i smena $\varphi[u/x]$ je regularna.

Pravila PD

Pravila za jednakost su:

$$\frac{}{t = t}\, r \quad \text{i} \quad \frac{t = s \quad \varphi[t/x]}{\varphi[s/x]}\, S$$

Zovemo ih *refleksivnost* jednakosti i *supstitucija*.

U pravilu r, t je proizvoljan term.

U pravilu S, zahtevamo da su t i s termi takvi da su smene $\varphi[t/x]$ i $\varphi[s/x]$ regularne.

Dokaz u prirodnoj dedukciji

Neka $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ i $\varphi \in \mathcal{L}$.

Dokaz u prirodnoj dedukciji formule φ iz skupa *premisa* Σ je konačan niz koraka u kojem koristeći premise (tj. formule skupa Σ) i poštujući pravila prirodne dedukcije zaključujemo formulu φ.

Pravilo *r* možemo da koristimo u bilo kom koraku. Pravila *R*, *MP*, *I* i *S* izvode odgovarajuće zaključke iz odgovarajućih prethodno izvedenih formula.

Pravila *D* i *RAA* zahtevaju pisanje odgovarajućeg poddokaza sa dodatnom pretpostavkom (pp).

Pravilo *G* zahteva pisanje poddokaza sa uvođenjem nove promenljive.

Formule zaključene u poddokazima su lokalne, ne možemo da ih koristimo nakon završetka poddokaza.

Dokaziv sekvent

Definicija

Ako se iz premisa Σ može dokazati φ, pišemo $\Sigma \vdash \varphi$, ili kažemo *sekvent* $\Sigma \vdash \varphi$ je *dokaziv*; u suprotnom pišemo $\Sigma \nvdash \varphi$.

Umesto $\emptyset \vdash \varphi$ pišemo samo $\vdash \varphi$ i kažemo da je φ *teorema*.

Primer

$\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$, tj. imamo izvedeno pravilo:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \psi \to \theta}{\varphi \to \theta}\,HS$$

koje zovemo *hipotetički silogizam*.

Izvedena pravila: negacija, EFQ i dupla negacija

Eliminacija i uvođenje negacije:

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\neg_E \qquad \frac{\begin{array}{|l}\varphi \quad \text{pp} \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\neg_U$$

Ex falso quodlibet:

$$\frac{\bot}{\varphi}EFQ$$

Eliminacija i uvođenje duple negacije:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\neg\neg_E \quad \text{i} \quad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\neg\neg_U$$

Izvedena pravila: MT i K

Modus tollens:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\,MT$$

Kontrapozicija:

$$\frac{\varphi \to \psi}{\neg\psi \to \neg\varphi}\,K \quad \text{i} \quad \frac{\neg\psi \to \neg\varphi}{\varphi \to \psi}\,K$$

Izvedena pravila: disjunkcija, DS i TND

Uvođenje i eliminacija disjunkcije:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee_U \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee_U \qquad \text{i} \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \varphi \to \theta \quad \psi \to \theta}{\theta} \vee_E$$

Disjunktivni silogizmi:

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \neg\varphi}{\psi} DS \qquad \text{i} \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \neg\psi}{\varphi} DS$$

Tertium non datur – zakon insključenja trećeg:

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi} TND$$

Izvedena pravila: konjunkcija, ekvivalencija i DM

Eliminacija i uvođenje konjunkcije:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge_E \qquad \text{i} \qquad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge_U$$

Eliminacija i uvođenje ekvivalencije:

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \leftrightarrow_E \qquad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \rightarrow \varphi} \leftrightarrow_E \qquad \text{i} \qquad \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \psi \rightarrow \varphi}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow_U$$

De Morganova pravila:

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \vee \neg\psi} DM \quad \frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi} DM \quad \frac{\neg\varphi \vee \neg\psi}{\neg(\varphi \wedge \psi)} DM \quad \frac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg(\varphi \vee \psi)} DM$$

Izvedena pravila: jednakost, $\exists$ i DM

Simetričnost i tranzitivnost jednakosti:

$$\frac{t = s}{s = t}\,s \quad \text{i} \quad \frac{t = s \quad s = u}{t = u}\,t$$

Uvođenje i eliminacija egzistencijalnog kvantifikatora:

$$\frac{\varphi[t/x]}{(\exists x)\,\varphi}\,\exists_U \quad \text{i} \quad \frac{(\exists x)\,\varphi \quad (\forall x)(\varphi \to \psi)}{\psi}\,\exists_E$$

De Morganovi zakoni:

$$\frac{\neg(\forall x)\,\varphi}{(\exists x)\,\neg\varphi}DM \quad \frac{\neg(\exists x)\,\varphi}{(\forall x)\,\neg\varphi}DM \quad \frac{(\exists x)\,\neg\varphi}{\neg(\forall x)\,\varphi}DM \quad \frac{(\forall x)\,\neg\varphi}{\neg(\exists x)\,\varphi}DM$$

Teorema dedukcije

Tvrđenje

Neka su $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ i $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$. Tada:

$$\Sigma, \varphi \vdash \psi \quad \text{akko} \quad \Sigma \vdash \varphi \to \psi.$$

Lema o novoj konstanti

Tvrđenje

Neka je $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$, $\varphi \in \mathcal{L}$ i c simbol konstante koji se ne pojavljuje u formulama skupa Σ i φ. Ako $\Sigma \vdash \varphi[c/x]$, onda $\Sigma \vdash (\forall x)\,\varphi$.

Teorema saglasnosti

Lema

Neka su $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ i $\varphi \in \mathcal{L}$. Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda za svaku $\mathcal{L}$-strukturu $\mathcal{M}$ i valuaciju v u $\mathcal{M}$ važi $(\mathcal{M}, v) \models \Sigma$ povlači $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$.

Posledica

$\Sigma \vdash \varphi \implies \Sigma \models \varphi.$

Konzistentnost i konačan karakter

Definicija

Skup Σ je *konzistentan* ako $\Sigma \nvdash \bot$.

Komentari

- $\Sigma \vdash \varphi \iff \left(\exists \Sigma_0 \underset{kon.}{\subseteq} \Sigma\right) \Sigma_0 \vdash \varphi$;
- Σ je konzistentan $\iff \left(\forall \Sigma_0 \underset{kon.}{\subseteq} \Sigma\right) \Sigma_0$ je konzistentan.

Teorema saglasnosti

Σ je zadovoljiv $\implies$ Σ je konzistentan.