POREĐENJE KARDINALNOSTI

SLAVKO MOCONJA

Sadržaj

I. Definicija i osnovne osobine.

1. **Zadatak.** Neka su A i B konačni skupovi. Označimo sa $|A|$ i $|B|$ broj elemenata skupa A, odnosno B. Dokazati:

(i) $|A| \leqslant |B|$ akko postoji $A \xrightarrow{1-1} B$;

(ii) $|A| = |B|$ akko postoji $A \xrightarrow{bij.} B$.

Inspirisani prethodnim zadatkom definišemo:

2. **Definicija.** Neka su A i B proizvoljni skupovi.

(a) Skup A *je manje ili jednake kardinalnosti od* B, u oznaci $|A| \leqslant |B|$, ako postoji $A \xrightarrow{1-1} B$.

(b) Skup A *je jednake kardinalnosti kao i* B, u oznaci $|A| = |B|$, ako postoji $A \xrightarrow{bij.} B$.

(c) Skup A *je manje kardinalnosti od* B, u oznaci $|A| < |B|$, ako je $|A| \leqslant |B|$ i $|A| \neq |B|$, tj. ako postoji 1-1 funkcija, ali ne postoji bijekcija $A \to B$.

Kao i u konačnom slučaju, o $|A|$ mislimo kao o *broju elemenata* skupa A.
Uvedene oznake zadovoljavaju očekivane osobine:

3. **Tvrđenje.** *Neka su A, B, C skupovi. Tada:*

(i) ako $|A| = |B|$, onda $|A| \leqslant |B|$;

Datum trenutne verzije: 13. decembar 2023.

(ii) $|A| \leqslant |A|$ *i* $|A| = |A|$;
(iii) *ako* $A \subseteq B$, *onda* $|A| \leqslant |B|$;
(iv) *ako* $|A| \leqslant |B|$, *onda postoji* $B' \subseteq B$ *takav da* $|A| = |B'|$;
(v) *ako* $|A| = |B|$, *onda* $|B| = |A|$;
(vi) *ako* $|A| = |B|$ *i* $|B| = |C|$, *onda* $|A| = |C|$;
(vii) *ako* $|A| \leqslant |B|$ *i* $|B| \leqslant |C|$, *onda* $|A| \leqslant |C|$.

Dokaz. (i) važi jer je svaka bijekcija specijalno 1-1. (ii) važi jer je $\mathrm{id}_A : A \to A$ bijekcija (pa i 1-1). (iii) važi jer je inkluziono preslikavanje $i_{A,B} : A \to B$ dato sa $i_{A,B}(a) := a$ očigledno 1-1. (iv) Ako je $f : A \xrightarrow{1-1} B$, onda je $f' : A \to \mathrm{Im}(f)$ dato sa $f'(a) := f(a)$ očigledno bijekcija, pa možemo da uzmemo $B := \mathrm{Im}(f)$. (v) važi jer je inverz bijekcija takođe bijekcija. (vi) i (vii) važe jer je kompozicija bijekcija, odnosno 1-1 funkcija, takođe bijekcija, odnosno 1-1 funkcija. Ω

Pored navedenih osobina, definisana oznaka $\leqslant$ zadovoljavaja i (očekivane) osobine antisimetričnosti i linearnosti, međutim ti rezultati nisu trivijalni.

4. **Teorema** (Kantor, Šreder, Bernštajn (KŠB))**.** *Ako* $|A| \leqslant |B|$ *i* $|B| \leqslant |A|$, *onda* $|A| = |B|$.

Dokaz KŠB teoreme dajemo u odeljku VII.

5. **Posledica.** *Neka su* A, B, C *skupovi. Tada:*

(i) *ako* $|A| < |B|$ *i* $|B| \leqslant |C|$, *onda* $|A| < |C|$;
(ii) *ako* $|A| \leqslant |B|$ *i* $|B| < |C|$, *onda* $|A| < |C|$.

Dokaz. Dokazaćemo (i), deo (ii) dokazuje se na sličan način.

Neka je $|A| < |B|$, tj. $|A| \leqslant |B|$ i $|A| \neq |B|$, i neka je $|B| \leqslant |C|$. Prema tvrđenju 3(viii) važi $|A| \leqslant |C|$, pa treba da dokažemo $|A| \neq |C|$. Pretpostavimo suprotno, $|A| = |C|$; tada je i $|C| = |A|$, pa uočimo neku bijekciju $h : C \to A$. Uočimo i neku 1-1 funkciju $g : B \to C$ (ona postoji jer $|B| \leqslant |C|$). Tada je $h \circ g : B \to A$ 1-1 funkcija kao kompozicija 1-1 funkcija, pa je $|B| \leqslant |A|$. Kako je i $|A| \leqslant |B|$, prema KŠB teoremi zaključujemo $|A| = |B|$. Kontradikcija. Ω

6. **Teorema** (Bernštajn)**.** *Neka su* A *i* B *skupovi. Tada važi tačno jedno od* $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ *i* $|B| < |A|$.

Dokaz Bernštajnove teoreme dajemo u odeljku VIII.

Naglasimo još jednu karakterizaciju relacije $|A| \leqslant |B|$:

7. **Tvrđenje.** *Neka su* A *i* B *skupovi. Tada* $|A| \leqslant |B|$ *akko postoji* $B \xrightarrow{na} A$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $|A| \leqslant |B|$, tada postoji $f : A \xrightarrow{1-1} B$, pa postoji i njen levi inverz $g : B \to A$; $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Funkcija g je na.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da imamo $f : B \xrightarrow{na} A$. Tada f ima desni inverz $g : A \to B$; $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Funkcija g je 1-1, pa je $|A| \leqslant |B|$. Ω

Setimo se da egzistencija desnog inverza u opštem slučaju zavisi od aksiome izbora (štaviše, tvrđenje da svaka na funkcija ima desni inverz ekvivalentno je aksiomi izbora). Prema tome, gornji dokaz u smeru ($\Leftarrow$) implicitno koristi aksiomu izbora.

II. **Neke opšte (ne)jednakosti.**

8. **Tvrđenje.** *Pretpostavimo* $|A| = |A'|$ *i* $|B| = |B'|$. *Tada:*

(i) ako $A \cap B = A' \cap B' = \varnothing$, *onda je* $|A \cup B| = |A' \cup B'|$;

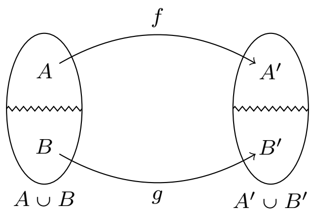
(ii) $|A \times B| = |A' \times B'|$;

(iii) $|{}^A B| = |{}^{A'} B'|$;

(iv) $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$.

Dokaz. Fiksirajmo funkcije $f : A \xrightarrow{bij.} A'$ i $g : B \xrightarrow{bij.} B'$.

(i) Skup $A \cup B$ disjunktno je podeljen na skupove A i B, i slično, skup $A' \cup B'$ disjunktno je podeljen na skupove A' i B':



Funkcija f bijektivno preslikava skup A na A', a funkcija g skup B na B'. Prema tome jasno je da ćemo bijekciju $h : A \cup B \to A' \cup B'$ dobiti „lepljenjem" bijekcija f i g. Preciznije, definišimo:

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ako } x \in A \\ g(x) & \text{ako } x \in B \end{cases}, \text{ za } x \in A \cup B.$$

Najpre primetimo da je h dobro definisana funkcija $h : A \cup B \to A' \cup B'$, tj. $h(x)$ jednoznačno je određeno jer $A \cap B = \varnothing$, i takođe je očigledno $h(x) \in A' \cup B'$.

Funkcija h je na. Neka je $y \in A' \cup B'$. Ako $y \in A'$, kako je f na, $y = f(x)$ za neko $x \in A$, pa je po definiciji i $h(x) = y$. Ako $y \in B'$, kako je g na, $y = g(x)$ za neko $x \in B$, pa je po definiciji i $h(x) = y$. Dakle, h jeste na.

Funkcija h je 1-1. Neka su $x_1, x_2 \in A \cup B$ različiti elementi. Ako $x_1, x_2 \in A$, onda je $h(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = h(x_2)$, gde nejednakost važi jer je f 1-1. Slično, ako $x_1, x_2 \in B$, $h(x_1) \neq h(x_2)$ jer je g 1-1. Poslednji slučaj je kada je $x_1 \in A$ i $x_2 \in B$ (ili obratno, što je simetrično). Tada je $h(x_1) = f(x_1) \neq g(x_2) = h(x_2)$, ali sada nejednakost važi jer $f(x_1) \in A'$, $g(x_2) \in B'$ i $A' \cap B' = \varnothing$. Dakle, f jeste 1-1.

(ii) Definišimo $h : A \times B \to A' \times B'$ sa $h(a, b) := (f(a), g(b))$. Da bismo pokazali da je h bijekcija, možemo lako da proverimo da jeste 1-1 i na, ali možemo da postupimo i na sledeći način. Definišimo i funkciju $k : A' \times B' \to A \times B$ sa $k(a', b') := (f^{-1}(a'), g^{-1}(b'))$. Dokazaćemo da je k inverz funkcije h, tj. proverićemo $k \circ h = \mathrm{id}_{A \times B}$ i $h \circ k = \mathrm{id}_{A' \times B'}$, što znači da je h bijekcija (i da je $h^{-1} = k$). Imamo:

$$k \circ h(a, b) = k(f(a), g(b)) = (f^{-1}(f(a)), g^{-1}(g(b))) = (a, b),$$

pa je zaista $k \circ h = \mathrm{id}_{A \times B}$. Slično proveravamo i drugu jednakost.

(iii) Definišimo funkciju $h : {}^{A}B \to {}^{A'}B'$ sa $h(\alpha) = g \circ \alpha \circ f^{-1}$ za $\alpha \in {}^{A}B$, i funkciju $k : {}^{A'}B' \to {}^{A}B$ sa $h(\alpha') = g^{-1} \circ \alpha' \circ f$ za $\alpha' \in {}^{A'}B'$; pogledajte dijagrame:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[d, "g"] \\ A' \arrow[u, "f^{-1}"] \arrow[r, dashed, "g \circ \alpha \circ f^{-1}"'] & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "g^{-1} \circ \alpha' \circ f"] \arrow[d, "f"'] & B \\ A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[u, "g^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

(Sa dijagrama je jasno da $h(\alpha) \in {}^{A'}B'$ i $k(\alpha') \in {}^{A}B$.)

Primetimo da je:

$$k \circ h(\alpha) = k(g \circ \alpha \circ f^{-1}) = g^{-1} \circ g \circ \alpha \circ f^{-1} \circ f = \alpha,$$

jer se $g^{-1} \circ g$ i $f^{-1} \circ f$ ponište. Dakle, $k \circ h = \mathrm{id}_{{}^{A}B}$. Slično vidimo i da je $h \circ k = \mathrm{id}_{{}^{A'}B'}$, pa su h i k međusobno inverzne bijekcije.

(iv) Definišimo $h : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A')$ sa $h(X) = f[X]$ za $X \subseteq A$, i definišimo $k : \mathcal{P}(A') \to \mathcal{P}(A)$ sa $k(Y) = f^{-1}[Y]$. Imamo da je:

$$k \circ h(X) = f^{-1}[f[X]] = X,$$

gde poslednja jednakost važi zato što je f 1-1, a:

$$h \circ k(Y) = f[f^{-1}[Y]] = Y,$$

gde poslednja jednakost važi zato što je f na. Dakle, $k \circ h = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A)}$ i $h \circ k = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A')}$, pa su h i k međusobno inverzne bijekcije. Ω

9. **Zadatak.** Pretpostavimo $|A| \leqslant |A'|$ i $|B| \leqslant |B'|$. Dokazati:

(i) $|A \cup B| \leqslant |A' \cup B'|$;
(ii) $|A \times B| \leqslant |A' \times B'|$;
(iii) $|{}^{A}B| \leqslant |{}^{A'}B'|$;
(iv) $|\mathcal{P}(A)| \leqslant |\mathcal{P}(A')|$.

10. **Tvrđenje.** *Za svaki skup A važi $|\mathcal{P}(A)| = |{}^{A}\{0,1\}|$.*

Dokaz. Za $X \subseteq A$ definišimo $\chi_X : A \to \{0,1\}$ sa:

$$\chi_X(a) := \begin{cases} 1 & \text{ako } a \in X \\ 0 & \text{ako } a \notin X \end{cases}, \text{ za } a \in A.$$

Funkcija χ_X naziva se *karakteristična funkcija* skupa X (u odnosu na A). Definišimo sada funkciju $\chi : \mathcal{P}(A) \to {}^{A}\{0,1\}$ sa $\chi(X) := \chi_X$ za $X \subseteq A$. Dokazaćemo da je χ bijekcija.

χ je 1-1. Pretpostavimo da su $X, Y \subseteq A$ različiti. Tada postoji element $a \in A$ takav da $a \in X$ i $a \notin Y$ (ili obratno, što je simetričan slučaj). Tada je $\chi_X(a) = 1$ i $\chi_Y(a) = 0$, pa je $\chi_X \neq \chi_Y$, tj. $\chi(X) \neq \chi(Y)$, pa je χ 1-1.

χ je na. Neka je $f \in {}^{A}\{0,1\}$. Dokazaćemo $f = \chi_{f^{-1}[\{1\}]}$, tj. $f = \chi(f^{-1}[\{1\}])$ odakle zaključujemo da je χ na. Željena jednakost sledi jer je:

$$f(a) = 1 \Leftrightarrow a \in f^{-1}[\{1\}] \Leftrightarrow \chi_{f^{-1}[\{1\}]}(a) = 1$$

za svako $a \in A$, gde prva ekvivalencija važi po definiciji inverzne slike, a druga po definiciji karakteristične funkcije. Ω

11. **Teorema** (Kantor)**.** *Za svaki skup A je $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Dokaz. Kako je funkcija $f : A \to \mathcal{P}(A)$ data sa $f(a) = \{a\}$ očigledno 1-1, važi $|A| \leqslant |\mathcal{P}(A)|$. Dokažimo i $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

Dovoljno je da dokažemo da ne postoji $A \xrightarrow{na} \mathcal{P}(A)$. Pretpostavimo suprotno, neka je $g : A \xrightarrow{na} \mathcal{P}(A)$. Uočimo skup $S := \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$. Jasno je $S \in \mathcal{P}(A)$, pa kako je g na, $S = g(s)$ za neko $s \in A$. Primetimo sada da imamo:

$$s \in S \Leftrightarrow s \notin g(s) \Leftrightarrow s \notin S,$$

gde prva ekvivalencija važi po definiciji skupa S, a druga jer je $g(s) = S$. Kontradikcija. Ω

III. **Prebrojivi skupovi.**

12. **Definicija.** (a) $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$ – čita se *alef nula*.
(b) Skup A je *prebrojiv* ako je $|A| = \aleph_0$, tj. ako postoji $\mathbb{N} \xrightarrow{bij.} A$.
(c) Skup A je *neprebrojiv* ako nije konačan i nije prebrojiv.

13. **Primer.** Skupovi $\mathbb{N}^+$, $2\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ su prebrojivi. Zaista funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ data sa $f(n) = n + 1$ je jedna očigledna bijekcija. Takođe, $g : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ data sa $g(n) = 2n$ je očigledna bijekcija.

Da bismo dokazali da je $\mathbb{Z}$ prebrojiv iskoristićemo ideju tvrđenja 8(i). Podelimo $\mathbb{N}$ na parne ($2\mathbb{N}$) i neparne brojeve ($2\mathbb{N} + 1$) i $\mathbb{Z}$ na nenegativne ($\mathbb{N}$) i negativne brojeve ($\mathbb{Z}^-$). Imamo očigledne bijekcije $h : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ datu sa $h(n) = \frac{n}{2}$ i $k : 2\mathbb{N} + 1 \to \mathbb{Z}^-$ datu sa $k(n) = -\frac{n+1}{2}$. „Lepljenjem" ove dve bijekcije dobijamo bijekciju $l : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ datu sa:

$$l(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{ako je } n \text{ paran} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}, \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Istaknimo da prethodni primer kaže da kada izbacimo jedan element (nulu) iz skupa $\mathbb{N}$, dobijeni skup $\mathbb{N}^+$ i dalje ima isti broj elemenata kao skup $\mathbb{N}$. Situacija je zanimljivija, ako izbacimo iz $\mathbb{N}$ beskonačan skup neparnih brojeva, preostali deo $2\mathbb{N}$ ima isti broj elemenata kao ceo skup $\mathbb{N}$. Slično, i $\mathbb{Z}$ ima isti broj elemenata kao i $\mathbb{N}$. Ove napomene nam pokazuju da beskonačnosti imaju kontraintuitivna svojstva.

14. *Komentar.* Neka je A prebrojiv i $f : \mathbb{N} \to A$ neka bijekcija. Ako označimo sa $a_n := f(n)$, tada je $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jedno ređanje elemenata skupa A u niz indeksiran sa $\mathbb{N}$ (za ovakav niz reći ćemo da je *niz tipa* $\mathbb{N}$). Zaista, s obzirom da je f na, svaki element skupa A je izlistan u datom nizu, a kako je f 1-1, isti element ne pojavljuje se dva puta.

Sa druge strane, ako možemo da nađemo način da poređamo elemente skupa A u niz $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tipa $\mathbb{N}$, imamo bijekciju $f : \mathbb{N} \to A$ definisanu sa $f(n) := a_n$, pa je skup A prebrojiv.

Dakle, da bismo dokazali da je skup A prebrojiv, možemo da damo postupak koji pokazuje da se elementi tog skupa mogu poređati u niz tipa $\mathbb{N}$. Skup $\mathbb{N}^+$ iz gornjeg primera lako se ređa u takav niz, tj. već je poređan: $1, 2, 3, 4, \ldots$, kao i skup $2\mathbb{N}$: $0, 2, 4, 6, \ldots$. Skup $\mathbb{Z}$ možemo poređati u niz tipa $\mathbb{N}$ na sledeći način: $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$. Jasno je da će navedeni postupak izlistati svaki ceo broj.

15. **Primer.** Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv.

1. način. Pozitivni prirodni brojevi imaju zanimljivu osobinu. Svaki $a \geqslant 1$ može se zapisati na jedinstven način u obliku $2^n(2m+1)$ za neke $n, m \in \mathbb{N}$. (Zaista, najpre delimo a sa dvojkom onoliko puta koliko je to moguće, to je broj n; preostali količnik je neparan pa se može zapisati u obliku $2m+1$.) Prema tome imamo bijekciju $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ datu sa $f(n, m) := 2^n(2m+1)$, što znači da je $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ prebrojiv jer je $\mathbb{N}^+$ prebrojiv.

2. način. Možemo da iskoristimo KŠB teoremu. Naime, imamo očiglednu 1-1 funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ datu sa $f(n) := (n, 0)$, pa je $\aleph_0 \leqslant |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Sa druge strane, funkcija $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa $g(m, n) = 2^m 3^n$ takođe je 1-1 (po osnovnoj teoremi aritmetike), pa je $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leqslant \aleph_0$. Prema tome, $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

3. način. Opisaćemo i jedan postupak kojim se $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ređa u niz tipa $\mathbb{N}$. Zapišimo skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{cccccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & (0,4) & \cdots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \cdots \\
(3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Jedan postupak ređanja prethodne tablice u niz tipa $\mathbb{N}$ predstavljen je strelicama. Naime, polazeći od gornjeg levog ugla, idemo redom i ređamo u niz elemente jedne po jedne dijagonale (pod k-tom dijagonalom, $k \geqslant 0$, podrazumevamo skup parova (m, n) takvih da je $m + n = k$). Proizvoljan par (m, n) nalazi se u $(m + n)$-toj dijagonali. Kako su sve dijagonale konačne, prethodne dijagonale smo poređali u konačno mnogo koraka, pa ćemo i do para (m, n) stići u konačno mnogo koraka. Dakle svaki par će u nekom konačnom trenutku biti poređan. Prema tome, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv. Napomenimo da nije preterano teško doći do formule ovakvog ređanja, i ona je:

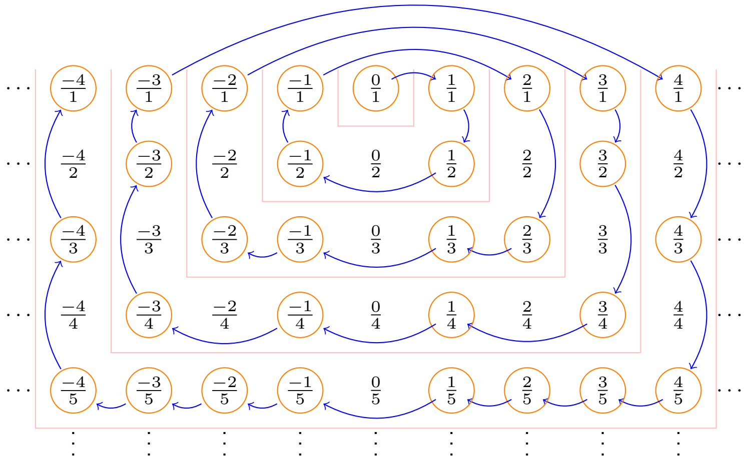
$$f(m, n) := \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}.$$

Sada kao posledicu prethodog primera imamo da su svi skupovi $\underbrace{\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{n}$, $n \geqslant 1$, prebrojivi. Zaista, ovo sad lako vidimo indukcijom po n koristeći prethodni primer i tvrđenje 8(ii). I generalnije, proizvod $A_1\times\cdots\times A_n$ konačno mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv.

16. **Primer.** Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.

1. način. Primetimo da se svaki racionalan broj može zapisati u obliku $\frac{m}{n}$, gde $m\in\mathbb{Z}$ i $n\in\mathbb{N}^+$. To znači da je funkcija $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^+\to\mathbb{Q}$ data sa $f(m,n)=\frac{m}{n}$ na, pa je prema tvrđenju 7, $|\mathbb{Q}|\leqslant|\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^+|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$. Sa druge strane je $\aleph_0\leqslant|\mathbb{Q}|$ jer je $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}$. Po KŠB teoremi je $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

2. način. Zapišimo sve razlomke $\frac{m}{n}$, gde $m\in\mathbb{Z}$ i $n\in\mathbb{N}^+$:



Najpre podelimo gornju tabelu na konačne trake kao što je označeno na slici, a onda ređamo elemente jedne po jedne trake na sledeći način. Počinjemo od gornjeg desnog ugla trake i idemo u smeru sata. Posmatrajmo proizvoljan razlomak $\frac{m}{n}$. Jasno je da smo pre njega poređali samo konačno mnogo elemenata. Najpre proverimo da li smo razlomak $\frac{m}{n}$ već poređali u našem nizu (što radimo u konačno mnogo koraka). Ako jesmo, preskočimo dati razlomak, a ako nismo stavimo ga u niz. (Na slici je strelicama naglašen postupak. Počnemo sa $\frac{0}{1}$. Nastavimo niz sa $\frac{1}{1}$ i $\frac{1}{2}$. Dolazimo do $\frac{0}{2}$; proverimo i vidimo da je ovaj broj već pobrojan, pa ga preskačemo. Nastavljamo sa $\frac{-1}{2}$ i $\frac{-1}{1}$, i prelazimo na sledeću traku.) Jasno je da ovim postupkom ređamo $\mathbb{Q}$ u niz tipa $\mathbb{N}$.

IV. Skupovi moći kontinuuma.

17. **Definicija.** (a) $\mathfrak{c}:=|\mathbb{R}|$ – čita se *kontinuum*.

(b) Skup A je *moći kontinuuma* ako je $|A|=\mathfrak{c}$, tj. ako postoji $\mathbb{R}\xrightarrow{bij.}A$.

18. **Primer.** Poznato je da je funkcija $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ data sa $f(x)=\mathrm{tg}(x)$ bijekcija, što znači da je $|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})|=\mathfrak{c}$.

Linearna funkcija $g : (0,1) \to (a,b)$, gde $a < b$, data sa $g(x) = (b-a)x + a$ je bijekcija, pa svi otvoreni intervali (a,b) su iste kardinalnosti kao $(0,1)$, a kako smo gore videli da je $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ moći kontinuuma, zaključujemo da su svi otvoreni intervali moći kontinuuma.

Za $a < b$ imamo $(a,b) \subseteq (a,b] \subseteq (a,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$, pa sada po KŠB teoremi zaključujujemo da su i poluzatvoreni interval $(a,b]$ i interval $(a,+\infty)$ takođe moći kontinuuma. Na sličan način vidimo i da su svi ostali intevali moći kontinuuma.

19. **Zadatak.** Konstruisati eksplicitnu bijekciju $(0,1] \to (0,1)$.

V. **Kardinalnost skupa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.** Sada ćemo dokazati da je skup $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ moći kontinuuma. Zajedno sa teoremom 11 to povlači da je $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$, tj. kontinuum je strogo veći kardinal od $\aleph_0$. Specijalno, skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv.

Dokaz ćemo izvesti koristeći KŠB teoremu na sledeći niz nejednakosti:

$$|\mathbb{R}| \overset{(1)}{\leqslant} |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| \overset{(2)}{=} |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \overset{(3)}{=} |{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}| \overset{(4)}{\leqslant} |\mathbb{R}|.$$

Jednakost (2) sledi prema tvrđenju 8(iv) jer je $\mathbb{Q}$ prebrojiv. Jednakost (3) sledi prema tvrđenju 10. Dakle, ostaje da dokažemo nejednakosti (1) i (4).

(1). Konstruišemo 1-1 funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Za $x \in \mathbb{R}$ stavimo $f(x) := (-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$. Zašto je f 1-1 funkcija? Pretpostavimo da su $x, y \in \mathbb{R}$ različiti, npr. $x < y$. Poznata je osobina da se između svaka dva realna broja može naći neki racionalni (kažemo da je skup $\mathbb{Q}$ *gust* u $\mathbb{R}$), pa izaberimo $q \in \mathbb{Q}$ takav da $x < q < y$. Tada $q \notin (-\infty, x) \cap \mathbb{Q} = f(x)$, ali $q \in (-\infty, y) \cap \mathbb{Q} = f(y)$, pa su $f(x)$ i $f(y)$ različiti skupovi, što pokazuje da je f 1-1.

(4). Element $a \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ je funkcija $a : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, koja je identifikovana sa nizom nula i jedinica $a = (a(0), a(1), a(2), \dots)$. Definišimo funkciju $g : {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \to \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$g(a) := 0, a(0)a(1)a(2)a(3)\dots, \text{ za niz } a \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}.$$

Dakle, stavimo da su elementi niza decimale broja $g(a)$. I ovo dodeljivanje je 1-1, jer za dva različita niza a i b postoji neko n tako da je $a(n) \neq b(n)$, što znači da se decimale na n-tom mestu u brojevima $g(a)$ i $g(b)$ razlikuju, pa je $g(a) \neq g(b)$.

Sada po KŠB teoremi dobijamo $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}| = \mathfrak{c}$.

20. **Primer.** Sada možemo da dokažemo da je $|{}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \times {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}| = \mathfrak{c}$. Uočimo sledeću funkciju $f : {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \times {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \to {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ datu sa:

$$f(a,b) = (a(0), b(0), a(1), b(1), a(2), b(2), \dots), \text{ za nizove } a, b \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}.$$

Nije teško videti da je ovakvo dodeljivanje bijektivno, odakle sledi $|{}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \times {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}| = \mathfrak{c}$.

Sada je i $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |{}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \times {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}| = \mathfrak{c}$ i $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, jer je funkcija $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data sa $g(x,y) = x + iy$ očigledna bijekcija.

21. **Zadatak.** Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ prebrojiv skup. Dokazati da postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da $A \cap (b + A) = \varnothing$. Koliko ima takvih brojeva b?

22. **Zadatak.** Neka je $\mathcal{F}$ neka familija otvorenih intervala u $\mathbb{R}$ takva da se nikoja dva intervala iz familije $\mathcal{F}$ ne seku. Dokazati da je $\mathcal{F}$ najviše prebrojiva (konačna je ili prebrojiva).

VI. **Kantorov dijagonalni argument.** Sada ćemo na još jedan način dokazati da skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv, kako bismo ilustrovali postupak poznat kao *Kantorov dijagonalni argument*. Dovoljno je da pokažemo da interval $(0,1)$ nije prebrojiv, jer smo već videla da je on moći kontinuuma.

Preptostavimo suprotno, interval $(0,1)$ je prebrojiv. To znači da ga možemo poređati u niz tipa $\mathbb{N}$, i neka je to $x_1, x_2, x_3, \ldots$. U decimalnom zapisu svaki od x_i je oblika:

$$x_i = 0, x_i^1 x_i^2 x_i^3 \ldots,$$

gde sa x_i^j označavamo j-tu decimalu broja x_i (ako je broj x_i racionalan sa konačnim decimalnim zapisom produžimo zapis sa nulama). Poređajmo ove brojeve u sledeću tablicu:

$$\begin{array}{lcllllll}
x_1 & = & 0, & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n & \cdots \\
x_2 & = & 0, & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n & \cdots \\
x_3 & = & 0, & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^n & \cdots \\
\vdots & & & & & & \ddots & & \\
x_n & = & 0, & x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n & \cdots \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Pogledajmo decimale na dijagonali, tj. uočimo i-tu decimalu x_i^i broja x_i. Definišimo niz cifara $c_1, c_2, c_3, \ldots$ na sledeći način:

$$c_i := \begin{cases} 1 & \text{ako } x_i^i \neq 1 \\ 2 & \text{ako } x_i^i = 1 \end{cases}, \text{ za sve } i \geqslant 1.$$

Primetimo da za svako i važi $c_i \neq x_i^i$. Posmatrajmo sada broj $c := 0, c_1 c_2 c_3 \ldots$. Jasno je $c \in (0,1)$. Kako smo elemente ovog intervala pobrojali, $c = x_n$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Međutim, ovo povlači i da je n-ta decimala u zapisu broja c, c_n, jednaka sa n-tom decimalom u zapisu broja x_n, x_n^n: $c_n = x_n^n$. Ali ovo je kontradikcija.

VII. **Dodatak za UML: Dokaz KŠB teoreme.**

23. **Teorema** (Knaster, Tarski). *Neka je $\alpha : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ neopadajuća funkcija, tj. važi:*

$$(\forall X, Y \subseteq A)(\ X \subseteq Y\ \to\ \alpha(X) \subseteq \alpha(Y)\ ).$$

Tada α ima fiksnu tačku, *tj. postoji $S \subseteq A$ takav da $\alpha(S) = S$.*

Dokaz. Uočimo familiju $\mathcal{F} := \{X \subseteq A \mid X \subseteq \alpha(X)\}$. Primetimo da je $\mathcal{F}$ neprazna familija jer $\varnothing \in \mathcal{F}$. Ako je $X \in \mathcal{F}$, tada $X \subseteq \alpha(X)$, pa je i $\alpha(X) \subseteq \alpha(\alpha(X))$ jer je α neopadajuća, što znači da $\alpha(X) \in \mathcal{F}$. Dakle:

(1) $$X \in \mathcal{F} \to \alpha(X) \in \mathcal{F}.$$

Uočimo skup $S := \bigcup \mathcal{F}$; dokazaćemo da je S željeni skup.

Ako je $X \in \mathcal{F}$, sa jedne strane je $X \subseteq \alpha(X)$, a sa druge strane je $X \subseteq S$, pa je $\alpha(X) \subseteq \alpha(S)$ jer je α neopadajuća funkcija; prema tome, $X \subseteq \alpha(S)$. Kako ovo važi za sve $X \in \mathcal{F}$ zaključujemo i $\bigcup \mathcal{F} \subseteq \alpha(S)$, tj. $S \subseteq \alpha(S)$.

Prethodna inkluzija specijalno povlači i $S \in \mathcal{F}$, pa prema (1) i $\alpha(S) \in \mathcal{F}$, što znači da $\alpha(S)$ učestvuje u uniji $S = \bigcup \mathcal{F}$, tj. $\alpha(S) \subseteq S$.

Kako smo zaključili i $S \subseteq \alpha(S)$ i $\alpha(S) \subseteq S$, dobijamo $\alpha(S) = S$. Ω

24. **Zadatak.** Pod pretpostavkama teoreme Knastera i Tarskog, dokazati da je:

$$S' := \bigcap \{X \subseteq A \mid \alpha(X) \subseteq X\}$$

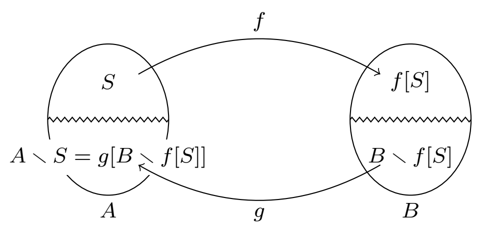
takođe fiksna tačka funkcije α.

Dokaz teoreme 4. Pretpostavimo $|A| \leqslant |B|$ i $|B| \leqslant |A|$, i uočimo neke 1-1 funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to A$. Uočimo funkciju $\alpha : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ datu sa:

$$\alpha(X) = A \smallsetminus g[B \smallsetminus f[X]], \text{ za } X \subseteq A.$$

Primetimo da je funkcija α neopdajuća. Zaista, ako je $X \subseteq Y$, onda je i $f[X] \subseteq f[Y]$ zbog monotonosti direktne slike. Odatle je $B \smallsetminus f[X] \supseteq B \smallsetminus f[Y]$, pa je $g[B \smallsetminus f[X]] \supseteq g[B \smallsetminus f[Y]]$ ponovo zbog monotonosti direktne slike. Konačno, odatle dobijamo $A \smallsetminus g[B \smallsetminus f[X]] \subseteq A \smallsetminus g[B \smallsetminus f[Y]]$, tj. $\alpha(X) \subseteq \alpha(Y)$.

Prema teoremi Knastera i Tarskog postoji $S \subseteq A$ takav da $\alpha(S) = S$, tj. $A \smallsetminus g[B \smallsetminus f[S]] = S$. Odatle je $g[B \smallsetminus f[S]] = A \smallsetminus S$. Dakle, imamo situaciju da je skup A podeljen na disjunktne podskupove S i $A \smallsetminus S = g[B \smallsetminus f[S]]$, dok je skup B podeljen na disjunktne podskupove $f[S]$ i $B \smallsetminus f[S]$:



Kako je f 1-1, f očigledno bijektivno preslikava S na $f[S]$, a kako je g 1-1, g očigledno bijektivno preslikava $B \smallsetminus f[S]$ na $g[B \smallsetminus f[S]] = A \smallsetminus S$. Prema tome, bijekciju $h : A \to B$ dobijamo lepljenjem ovih bijekcija. Preciznije, definišemo:

$$h(a) := \begin{cases} f(a) & \text{ako } a \in S \\ g^{-1}(a) & \text{ako } a \in A \smallsetminus S \end{cases}, \text{ za } a \in A.$$

(Primetite da g^{-1} jeste funkcionalna relacija jer je g 1-1, kao i da $g^{-1}(a) \downarrow$ za $a \in A \smallsetminus S$ jer je $A \smallsetminus S = g[B \smallsetminus f[S]]$.)

Sada nije teško formalno zapisati da je h bijekcija. Ω

VIII. **Dodatak za UML: Dokaz Bernštajnove teoreme.** Za dokaz Bernštajnove teoreme potrebna nam je aksioma izbora. (Zapravo Bernštajnova teorema ekvivalentna je aksiomi izbora.) U dokazu ćemo koristiti *Hauzdorfov princip maksimalnosti*, jedan od tri ekvivalenta aksiome izbora koji se najčešće koriste u praksi (preostala dva su *Cornova lema* i *Cermelov princip dobrog uređenja*):

25. **Aksioma** (Hauzdorfov princip maksimalnosti)**.** Svako uređenje $(S, \preccurlyeq)$ ima maksimalan lanac, tj. podskup $L \subseteq S$ za koji važe:

- L je *lanac*, tj. linearno uređeni podskup (svaka dva elementa od L su uporediva);
- L je *maksimalan* lanac: $(\forall a \in S)(L \cup \{a\}$ je lanac $\to a \in L)$ (primetite da ovo znači da se L ne može proširiti do većeg lanca, tj. svaki element $a \notin L$ je neuporediv sa nekim elementom u L).

Dokaz teoreme 6. Neka su A i B dva skupa. Pretpostavimo $|A| \not\preccurlyeq |B|$, tj. ne postoji 1-1 funkcija $A \to B$. Dovoljno je da nađemo 1-1 funkciju $B \to A$.

Uočimo familiju $\mathcal{F} := \{f \subseteq B \times A \mid f$ i f^{-1} su funkcionalne relacije$\}$. Familija $\mathcal{F}$ je neprazna jer formalno prazna relacija joj pripada (prazna relacija zadovoljava uslove funkcionalnosti), ali i relacije $\{(b, a)\}$ joj pripadaju za svako $a \in A$ i $b \in B$.

Familija $\mathcal{F}$ prirodno je uređena relacijom $\subseteq$. Pa Hauzdorfovom principu maksimalnosti možemo da nađemo neki maksimalan lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$. Neka je $l := \bigcup \mathcal{L}$; za početak tvrdimo $l \in \mathcal{F}$.

Treba da dokažemo da su l i l^{-1} funkcionalne relacije. Dokazaćemo da je l funkcionalna relacija, drugi deo je potpuno simetričan. Pretpostavimo da je $b\ l\ a_1$ i $b\ l\ a_2$. Po definiciji l, postoje $f_1, f_2 \in \mathcal{L}$ takve da $b\ f_1\ a_1$ i $b\ f_2\ a_2$. Međutim kako je $\mathcal{L}$ lanac, f_1 i f_2 su $\subseteq$-uporedive, npr. $f_1 \subseteq f_2$. Ali tada je i $b\ f_2\ a_1$ i $b\ f_2\ a_2$, pa kako f_2 jeste funkcionalna (jer $f_2 \in \mathcal{L}$, pa i $f_2 \in \mathcal{F}$) zaključujemo $a_1 = a_2$. Dakle, l jeste funkcionalna.

Kako $l \in \mathcal{F}$, i kako je l uporediva sa svim elementima lanca $\mathcal{L}$ (jer je kao njegova unija veća od svih njegovih elemenata), $\mathcal{L} \cup \{l\}$ takođe je lanac, pa zbog maksimalnosti mora biti $l \in \mathcal{L}$. Štaviše, kako smo već uočili da je l veća (u smislu veća ili jednaka) od svih elemenata lanca $\mathcal{L}$, mora biti $l = \max(\mathcal{L})$.

Konačno, dokažimo da je $l : B \xrightarrow{1-1} A$ željena funkcija. Znamo da l jeste funkcionalna relacija, kao i da je l^{-1} funkcionalna relacija (pa je l i 1-1, ako je funkcija), pa je dovoljno dokazati samo $\mathrm{Dom}(l) = B$. Pretpostavimo suprotno, $\mathrm{Dom}(l) \subsetneq B$; izaberimo $b \in B \setminus \mathrm{Dom}(l)$. Primetimo da važi $\mathrm{Im}(l) \subsetneq A$. Zaista, ako je $\mathrm{Im}(l) = A$, onda je $l^{-1} : A \xrightarrow{1-1} B$ (jer l^{-1} jeste funkcionalna, i inverz $(l^{-1})^{-1} = l$ je funkcionalan, pa je l^{-1} 1-1), što ne može biti jer smo pretpostavili da ne postoji 1-1 funkcija $A \to B$. Dakle, $\mathrm{Im}(l) \subsetneq A$, pa izaberimo i $a \in A \setminus \mathrm{Im}(l)$. Proširimo relaciju l do relacije l' dodajući joj novu strelicu $b \to a$. Po izboru a i b, relacije l' i l'^{-1} su funkcionalne, pa $l' \in \mathcal{F}$. Takođe je $l \subsetneq l'$, pa je $L \cup \{l'\}$ strogo proširenje lanca $\mathcal{L}$ koje je takođe lanac (zaista, l' je strogo veće od najvećeg elementa l lanca $\mathcal{L}$, pa je $\mathcal{L} \cup \{l'\}$ strogo veći lanac od $\mathcal{L}$). Kako je $\mathcal{L}$ bio maksimalan lanac, ovo je kontradikcija. Dakle, $\mathrm{Dom}(l) = B$ i završili smo dokaz. Ω

IX. **Dodatak za UML: Dokaz Lindenbaumove teoreme – opšti slučaj.** Lindenbaumova teorema kaže: Ako su Σ skup iskaznih formula i φ jedna iskazna formula takvi da $\Sigma \not\models \varphi$, tada postoji skup iskaznih formula Σ^* takav da:

- $\Sigma \subseteq \Sigma^*$,
- $\Sigma^* \not\models \varphi$ i
- Σ^* je zatvoren za slova, tj. za svako slovo $p \in \mathcal{P}$ važi $p \in \Sigma^*$ ili $\neg p \in \Sigma^*$.

Dokaz Lindenbaumove teoreme izveli smo pod pretpostavkom da je $\mathcal{P}$ prebrojiv, a sada dajemo dokaz opšteg slučaja.

Dokaz Lindenbaumove teoreme. Pretpostavimo da su Σ i φ takvi da $\Sigma \nvdash \varphi$. Posmatrajmo sledeću familiju skupova formula:

$$\mathcal{F} := \{\Pi \mid \Sigma \subseteq \Pi \text{ i } \Pi \nvdash \varphi\}.$$

Familija $\mathcal{F}$ je neprazna jer $\Sigma \in \mathcal{F}$. Familija $\mathcal{F}$ je prirodno uređena inkluzijom $\subseteq$. Prema Hauzdorfovom principu maksimalnosti izaberimo neki maksimalan lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$. Definišemo $\Sigma^* := \bigcup \mathcal{L}$ i tvrdimo da je Σ^* željeni skup.

Najpre, očigledno $\Sigma \subseteq \Sigma^*$ jer je Σ sadržana u svakom članu familije $\mathcal{F}$, pa i u svakom članu lanca $\mathcal{L}$, pa je sadržana i u njihovoj uniji. (Zapravo, očigledno je Σ najmanji element familije $\mathcal{F}$, pa kao takav mora biti u svakom maksimalnom lancu, pa $\Sigma \in \mathcal{L}$ i zapravo je Σ jedan od članova unije $\bigcup \mathcal{L}$, odakle je $\Sigma \subseteq \Sigma^*$.)

Dokažimo $\Sigma^* \nvdash \varphi$. Pretpostavimo suprotno, $\Sigma^* \vdash \varphi$. Za ovaj dokaz potreban je samo konačan broj premisa, tj. imamo $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma^*$ tako da $\sigma_1, \dots, \sigma_n \vdash \varphi$. Svaka od formula σ_i je iz unije $\bigcup \mathcal{L}$, pa za svako $i = 1, \dots, n$ postoji $\Pi_i \in \mathcal{L}$ tako da $\sigma_i \in \Pi_i$. Kako je $\mathcal{L}$ lanac, skupovi $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ međusobno su uporedivi, pa neka je Π_m najveći od njih. Tada je $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Pi_m$, odakle zaključujemo $\Pi_m \vdash \varphi$ (jer Π_m sadrži sve premise potrebne za dokaz formule φ), što je kontradikcija jer $\Pi_m \in \mathcal{F}$.

Iz prethodna dva pasusa vidimo da $\Sigma^* \in \mathcal{F}$, pa kako je Σ^* očigledno gornje ograničenje za $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \cup \{\Sigma^*\}$ takođe je lanac, i zbog maksimalnosti lanca $\mathcal{L}$ imamo $\Sigma^* \in \mathcal{L}$, i više $\Sigma^* = \max(\mathcal{L})$.

Konačno, dokažimo da je Σ^* zatvoren za slova. Pretpostavimo suprotno, i neka je $p \in \mathcal{P}$ slovo tako da $p \notin \Sigma^*$ i $\neg p \notin \Sigma^*$. Tada su skupovi $\Sigma^* \cup \{p\}$ i $\Sigma^* \cup \{\neg p\}$ strogo veći od Σ^* (pa i od svih elemenata lanca $\mathcal{L}$). Ako $\Sigma^* \cup \{p\} \in \mathcal{F}$, tada je $\mathcal{L} \cup \{\Sigma^* \cup \{p\}\}$ strogo veći lanac od $\mathcal{L}$, što nije moguće, pa zaključujemo $\Sigma^* \cup \{p\} \notin \mathcal{F}$. Na sličan način vidimo da $\Sigma^* \cup \{\neg p\} \notin \mathcal{F}$. Kako su oba skupa $\Sigma^* \cup \{p\}$ i $\Sigma^* \cup \{\neg p\}$ nadskupovi od Σ (jer su nadskupovi i od Σ^*), zaključujemo $\Sigma^*, p \vdash \varphi$ i $\Sigma^*, \neg p \vdash \varphi$. Po teoremi dedukcije $\Sigma^* \vdash p \to \varphi$ i $\Sigma^* \vdash \neg p \to \varphi$, pa koristeći lemu $\psi \to \theta, \neg\psi \to \theta \vdash \theta$, zaključujemo $\Sigma^* \vdash \varphi$. Kontradikcija. Ω

X. **Dodatak: Egzistencija baze vektorskog prostora.** U ovom odeljku ćemo dokazati da svaki vektorski prostor V nad poljem F ima bazu, tj. postoji podskup $B \subseteq V$ koji je linearno nezavisan i generatorni. (Za definicije svih pojmova pogledajte neki tekst iz linearne algebre.)

Dokaz izvodimo koristeći Hauzdorfov princip maksimalnosti. Uočimo familiju:

$$\mathcal{F} := \{N \subseteq V \mid N \text{ je linearno nezavisan}\}.$$

Familija $\mathcal{F}$ je neprazna jer $\{v\} \in \mathcal{F}$ za bilo koji nenula vektor $v \in V$. Familija $\mathcal{F}$ prirodno je uređena sa $\subseteq$. Po Hauzdorfovom principu maksimalnosti izaberimo neki maksimalan lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ i definišemo $B := \bigcup \mathcal{L}$. Tvrdimo da je B baza prostora V.

Dokažimo najpre da je B linearno nezavisan. Neka su $v_1, \dots, v_n \in B$ proizvoljni vektori i $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ proizvoljni skalari, pretpostavimo $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, i dokažimo

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Svaki od vektora v_i pripada B, pa za svako $i = 1, \ldots, n$ postoji $N_i \in \mathcal{L}$ tako da $b_i \in N_i$. Kako je $\mathcal{L}$ lanac, skupovi $N_1, \ldots, N_n$ međusobno su uporedivi, pa neka je N_m najveći od njih. Tada svi vektori $v_1, \ldots, v_n$ pripadaju N_m, pa kako je N_m linearno nezavisan (jer $N_m \in \mathcal{F}$) iz $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ zaključujemo $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, kao što smo želeli. Dakle, B jeste linearno nezavisan.

Prema prethodnom pasusu, $B \in \mathcal{F}$, pa kako je B očigledno gornje ograničenje za $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \cup \{B\}$ je lanac, odakle zbog maksimalnosti lanca $\mathcal{L}$ sledi $B \in \mathcal{L}$, i zapravo $B = \max(\mathcal{L})$.

Dokažimo sada da je B generatorni skup. Neka je $x \in V$ proizvoljan nenula vektor. Ako je $x \in B$, x je već zapisan kao linearna kombinacija vektora skupa B kao $x = 1 \cdot x$. Neka $x \notin B$. Skup $B \cup \{x\}$ tada je strogo veći od B, pa ako $B \cup \{x\} \in \mathcal{F}$ dobijamo strogo veći lanac $\mathcal{L} \cup \{B \cup \{x\}\}$ od $\mathcal{L}$, što zbog maksimalnosti $\mathcal{L}$ nije moguće. Dakle, $B \cup \{x\} \notin \mathcal{F}$. To znači da $B \cup \{x\}$ nije linearno nezavisan, pa imamo vektore $v_1, \ldots, v_n \in B$ i skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in F$ takve da $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda x = 0$, gde nisu svi od $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda$ jednaki nula. Primetimo da $\lambda \neq 0$. Zaista, u suprotnom imamo $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, gde nisu svi od $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jednaki nula, što nije moguće jer znamo da je B linearno nezavisan. Sada je:

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n,$$

pa smo zapisali x kao linearnu kombinaciju vektora iz B. Dakle, B jeste i generatorni skup.