# ISKAZNA LOGIKA

SLAVKO MOCONJA

Sadržaj



## I. **Iskazne formule.**

1. **Definicija.** *Iskazne formule* su konačni nizovi sledećih simbola:

- *iskaznih slova* koje obično zapisujemo malim latiničnim slovima $p, q, r, \ldots$, moguće sa indeksima; skup iskaznih slova obeležavamo sa $\mathcal{P}$;
- *logičke konstante* $\perp$ (*kontradikcija*);
- *logičkog veznika* $\rightarrow$ (*implikacija*);
- pomoćnih simbola zagrada.

Iskazne formule dobijamo primenom sledećih pravila u konačno mnogo koraka:

- svako iskazno slovo i konstanta $\perp$ jesu iskazne formule;
- ako su $\varphi$ i $\psi$ (već izgrađene) iskazne formule, onda je i $(\varphi \rightarrow \psi)$ iskazna formula.

Prema tome, u svakoj formuli pojavljuje se samo konačno mnogo iskaznih slova i samo konačno mnogo puta simbol implikacije. Konačan skup iskaznih slova koja se pojavljuju u formuli $\varphi$ obeležavamo sa $\mathcal{P}(\varphi)$, a broj pojavljivanja simbola $\rightarrow$ u formuli $\varphi$ obeležavamo sa $\mathrm{sl}(\varphi)$ i zovemo ga *složenost* formule $\varphi$. Sam skup svih iskaznih formula obeležavamo sa $\mathcal{F}$.

---

Datum trenutne verzije: 23. oktobar 2023.

2. *Komentar.* Zarad kraćeg zapisa iskaznih formula definišemo i sledeće skraćenice:

- formulu $(\varphi \to \bot)$ kraće zapisuemo sa $\neg\varphi$;
- formulu $(\neg\varphi \to \psi)$[1] kraće zapisujemo sa $(\varphi \vee \psi)$;
- formulu $\neg(\varphi \to \neg\psi)$[2] kraće zapisujemo sa $(\varphi \wedge \psi)$;
- formulu $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$[3] kraće zapisujemo sa $(\varphi \leftrightarrow \psi)$;
- formulu $\neg\bot$[4] kraće zapisujemo sa $\top$.

Takođe, ako je nedvosmisleno jasno o kojoj formuli je reč, brišemo i viške zagrada (npr. spoljne zagrade). Pri tome podrazumevamo da veznik $\neg$ ima najviši prioritet, $\vee$ i $\wedge$ srednji preoritet, a $\to$ i $\leftrightarrow$ najniži prioritet, pa tako sa $\neg p \vee q \to r \wedge \neg s$ je kraće zapisana formula $(((\neg p) \vee q) \to (r \wedge (\neg s)))$.

## II. Tačnost iskazne formule.

3. **Definicija.** *Valuacija* je bilo koje dodeljivanje $v : \mathcal{P} \to \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ istinitosnih vrednosti iskaznim slovima.

Za fiksiranu valuaciju $v$ određujemo istinitosnu vrednost svake formule $\varphi$ pri valuaciji $v$, u oznaci $\hat{v}(\varphi)$, rekurento po izgradnji formule na sledeći način:

- $\hat{v}(\bot) = \mathbf{n}$;
- $\hat{v}(p) = v(p)$ za svako slovo $p \in \mathcal{P}$;
- $\hat{v}(\varphi \to \psi)$ računamo po tablici za implikaciju:

| $\hat{v}(\varphi)$ | $\hat{v}(\psi)$ | $\hat{v}(\varphi \to \psi)$ |
|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** |
| **t** | **n** | **n** |
| **n** | **t** | **t** |
| **n** | **n** | **t** |

Ako je $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$ (formula $\varphi$ je tačna pri valuaciji $v$), to još zapisujemo sa $v \models \varphi$ i čitamo $v$ *zadovoljava formulu* $\varphi$. Ako je $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{n}$ (formula $\varphi$ je netačna pri valuaciji $v$), to još zapisujemo sa $v \not\models \varphi$ i čitamo $v$ *poriče* (ili *ne zadovoljava*) *formulu* $\varphi$.

4. **Zadatak.** U skladu sa komentarom 2 i definicijom 3 dokazati da se vrednosti $\hat{v}(\neg\varphi)$, $\hat{v}(\varphi \vee \psi)$, $\hat{v}(\varphi \wedge \psi)$ i $\hat{v}(\varphi \leftrightarrow \psi)$ računaju po sledećim tablicama:

| $\hat{v}(\varphi)$ | $\hat{v}(\neg\varphi)$ |
|---|---|
| **t** | **n** |
| **n** | **t** |

i

| $\hat{v}(\varphi)$ | $\hat{v}(\psi)$ | $\hat{v}(\varphi \vee \psi)$ | $\hat{v}(\varphi \wedge \psi)$ | $\hat{v}(\varphi \leftrightarrow \psi)$ |
|---|---|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** | **t** | **t** |
| **t** | **n** | **t** | **n** | **n** |
| **n** | **t** | **t** | **n** | **n** |
| **n** | **n** | **n** | **n** | **t** |

kao i da je $\hat{v}(\top) = \mathbf{t}$, gde je $v$ proizvoljna valuacija.

[1] tj. $((\varphi \to \bot) \to \psi)$
[2] tj. $((\varphi \to (\psi \to \bot)) \to \bot)$
[3] tj. $(((\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \bot)) \to \bot)$
[4] tj. $(\bot \to \bot)$

Intuitivno je jasno da vrednost formule pri valuaciji $v$ zavisi samo od vrednosti konačno mnogo slova koja se u toj formuli pojavljuju. To ćemo strogo i da dokažemo.

5. **Teorema.** *Ako su $p_1, \dots, p_k$ slova formule $\varphi$, i $v, w$ dve valuacije takve da $v(p_i) = w(p_i)$ za sve $i = 1, \dots, k$, tada je $\hat{v}(\varphi) = \hat{w}(\varphi)$.*

*Dokaz.* Uočimo predikat $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, dat sa: Ako su $p_1, \dots, p_k$ slova formule $\varphi$ koja je složenosti $n$, i $v, w$ dve valuacije takve da $v(p_i) = w(p_i)$ za sve $i = 1, \dots, k$, tada je $\hat{v}(\varphi) = \hat{w}(\varphi)$. Primetimo da je dovoljno da dokažemo iskaz $(\forall n)\, p(n)$. To ćemo da uradimo potpunom indukcijom po $n$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno, pretpostavimo da tvrđenje važi za formule složenosti $m < n$ (IH), i dokažimo da tvrđenje važi za formulu $\varphi$ složenosti $n$, tj. pretpostavimo da su $p_1, \dots, p_k$ slova formule $\varphi$ koja je složenosti $n$, i pretpostavimo da su $v, w$ dve valuacije za koje važi $v(p_i) = w(p_i)$ za sve $i = 1, \dots, k$, i dokažimo $\hat{v}(\varphi) = \hat{w}(\varphi)$. U skladu sa definicijom 1, razmotrimo tri slučaja.

$1^\circ$ $\underline{\varphi = \bot}$: (Ovo je slučaj u kome je $n = 0$, niz $p_1, \dots, p_k$ je prazan, i za $v, w$ nemamo nikakvo ograničenje.) U ovom slučaju trivijalno imamo $\hat{v}(\varphi) = \hat{v}(\bot) = \mathbf{n} = \hat{w}(\bot) = \hat{w}(\varphi)$ po definiciji 3.

$2^\circ$ $\underline{\varphi = p \in \mathcal{P}}$: (I ovo je slučaj u kome je $n = 0$, niz $p_1, \dots, p_k$ je samo slovo $p$, i za $v, w$ imamo uslov $v(p) = w(p)$.) I u ovom slučaju direktno imamo $\hat{v}(\varphi) = \hat{v}(p) = v(p) = w(p) = \hat{w}(p) = \hat{w}(\varphi)$ ponovo po definiciji 3.

$3^\circ$ $\underline{\varphi = \psi \to \theta}$: U ovom slučaju je jasno $\mathrm{sl}(\psi), \mathrm{sl}(\theta) < \mathrm{sl}(\varphi) = n$. Takođe je jasno da su slova u formulama $\psi$ i $\theta$ (neka od) $p_1, \dots, p_k$, pa kako se $v$ i $w$ na njima poklapaju, po (IH) možemo da zaključimo $\hat{v}(\psi) = \hat{w}(\psi)$ i $\hat{v}(\theta) = \hat{w}(\theta)$, pa po definiciji 3 računamo $\hat{v}(\varphi) = \hat{v}(\psi \to \theta) = \hat{w}(\psi \to \theta) = \hat{w}(\varphi)$.

Završili smo dokaz. $\Omega$

## III. Smene u formuli.

6. *Napomena.* Zapisom $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \dots, p_k)$ ističemo da su sva slova koja se pojavljuju u formuli $\varphi$ neka (i možda ne sva) od $p_1, p_2, \dots, p_k$, tj. da je $\mathcal{P}(\varphi) \subseteq \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Pa tako ako je $\varphi$ formula $p \to q$, možemo da pišemo $\varphi = \varphi(p, q)$ ili $\varphi = \varphi(p, q, r)$, ali nećemo da pišemo $\varphi = \varphi(p)$ ili $\varphi = \varphi(q, r)$.

7. **Definicija.** Neka su $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \dots, p_k)$, $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ formule. Označavamo sa $\varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$ formulu $\varphi$ u kojoj smo sva pojavljivanja slova $p_i$ zamenili sa $\psi_i$ za sve $i = 1, \dots, k$. (Npr. ako je $\varphi = \varphi(p, q)$ formula $p \to q \wedge p$, onda je $\varphi(p \vee q, s \to r)$ formula $p \vee q \to (s \to r) \wedge (p \vee q)$.)

8. **Lema.** *Neka su $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \dots, p_k)$, $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ formule i $v$ valuacija. Tada je:*

$$\hat{v}(\varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)) = \hat{w}(\varphi),$$

*gde je $w$ bilo koja valuacija takva da $w(p_i) = \hat{v}(\psi_i)$ za sve $i = 1, \dots, k$.*

*Dokaz.* Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po složenosti formule $\varphi$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno, pretpostavimo da tvrđenje važi za formule složenosti $m < n$ (IH), i dokažimo da tvrđenje važi za formulu $\varphi$ složenosti $n$. U skladu sa definicijom 1 razmotrimo tri slučaja.

$1^\circ$ $\varphi = \bot$: Primetimo da je $\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_k) = \bot$, pa direktno po definiciji 3 imamo:

$$\hat{v}(\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_k)) = \hat{v}(\bot) = \mathbf{n} = \hat{w}(\bot) = \hat{w}(\varphi).$$

$2^\circ$ $\varphi = p \in \mathcal{P}$: Kako su slova formule $\varphi$ po pretpostavci među $p_1, \ldots, p_k$, mora biti $p = p_i$ za neko $i$, $1 \leqslant i \leqslant k$: $\varphi = p_i$. Tada je $\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_k) = \psi_i$, pa kako po pretpostavci imamo $w(p_i) = \hat{v}(\psi_i)$ računamo:

$$\hat{v}(\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_k)) = \hat{v}(\psi_i) = w(p_i) = \hat{w}(p_i) = \hat{w}(\varphi).$$

$3^\circ$ $\varphi = \sigma \to \theta$: Formule $\sigma$ i $\theta$ su jasno složenosti manje od $n$, i takođe je jasno da možemo da pišemo $\sigma = \sigma(p_1, \ldots, p_k)$ i $\theta = \theta(p_1, \ldots, p_k)$, pa možemo da primenimo (IH) na formule $\sigma$ i $\theta$, tj.:

$$\hat{v}(\sigma(\psi_1, \ldots, \psi_k)) = \hat{w}(\sigma) \quad \text{i} \quad \hat{v}(\theta(\psi_1, \ldots, \psi_k)) = \hat{w}(\theta).$$

Kako je još očigledno $\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_k) = \sigma(\psi_1, \ldots, \psi_k) \to \theta(\psi_1, \ldots, \psi_k)$, pa po definiciji 3 prema prethodnim jednakostima imamo:

$$\hat{v}(\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_k)) = \hat{w}(\varphi).$$

Dokazali smo lemu. $\Omega$

## IV. **Tautologije.**

9. **Definicija.** Formula $\varphi$ je:

- *zadovoljiva* ako za neku valuaciju $v$ važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$;
- *poreciva* ako za neku valuaciju $v$ važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{n}$;
- *tautologija*, u oznaci $\models \varphi$, ako za sve valuacije $v$ važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$ (tj. nije poreciva);
- *kontradikcija* ako za sve valuacije $v$ važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{n}$ (tj. nije zadovoljiva).

10. **Primer.** Ispitati da li je formula $(p \land \neg r) \lor (q \land \neg r) \to (p \lor q \to r)$ zadovoljiva/poreciva?

*Rešenje.* Zapišimo tablicu date formule u svim valuacijama njenih slova:

| $p$ | $q$ | $r$ | $((p \land$ | $\neg\ r)$ | $\lor$ | $(q \land$ | $\neg\ r))$ | $\to$ | $((p \lor q)$ | $\to r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** | **n** | **n** | **n** | **n** | **n** | **t** | **t** | **t** |
| **t** | **t** | **n** | **t** | **t** | **t** | **t** | **t** | **n** | **t** | **n** |
| **t** | **n** | **t** | **n** | **n** | **n** | **n** | **n** | **t** | **t** | **t** |
| **t** | **n** | **n** | **t** | **t** | **t** | **n** | **t** | **n** | **t** | **n** |
| **n** | **t** | **t** | **n** | **n** | **n** | **n** | **n** | **t** | **t** | **t** |
| **n** | **t** | **n** | **n** | **t** | **t** | **t** | **t** | **n** | **t** | **n** |
| **n** | **n** | **t** | **n** | **n** | **n** | **n** | **n** | **t** | **n** | **t** |
| **n** | **n** | **n** | **n** | **t** | **n** | **n** | **t** | **t** | **n** | **t** |

Iz tablice je jasno da je formula i zadovoljiva i poreciva (pa nije ni tautologija ni kontradikcija). $\Omega$

11. **Primer.** Dokazati da je formula $(p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)) \wedge (\neg q \vee \neg r) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$ tautologija.

*Rešenje.* Pretpostavimo suprotno, formula je poreciva, tj. postoji valuacija $v$ takva da je formula netačna. Tada je $\hat{v}((p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)) \wedge (\neg q \vee \neg r)) =$ **t** i $\hat{v}(r \rightarrow \neg p) =$ **n**, odakle $\hat{v}(p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)) =$ **t**, $\hat{v}(\neg q \vee \neg r) =$ **t**, $\hat{v}(r) =$ **t** i $\hat{v}(\neg p) =$ **n**. Iz prve jednakosti imamo $\hat{v}(\neg q \rightarrow \neg p) =$ **t**, pa kako je $\hat{v}(\neg p) =$ **n** mora biti i $\hat{v}(\neg q) =$ **n**. Odatle i $\hat{v}(\neg q \vee \neg r) =$ **t** je $\hat{v}(\neg r) =$ **t**, što je u kontradikciji sa $\hat{v}(r) =$ **t**.

Alternativno, možemo da napišemo tablicu formule:

| $p$ | $q$ | $r$ | $((p$ | $\wedge$ | $(\neg q$ | $\rightarrow$ | $\neg p))$ | $\wedge$ | $(\neg q$ | $\vee$ | $\neg r))$ | $\rightarrow$ | $(r$ | $\rightarrow$ | $\neg p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** | | **t** | **n** | **t** | **n** | **n** | **n** | **n** | **n** | **t** | | **n** | **n** |
| **t** | **t** | **n** | | **t** | **n** | **t** | **n** | **t** | **n** | **t** | **t** | **t** | | **t** | **n** |
| **t** | **n** | **t** | | **n** | **t** | **n** | **n** | **n** | **t** | **t** | **n** | **t** | | **n** | **n** |
| **t** | **n** | **n** | | **n** | **t** | **n** | **n** | **n** | **t** | **t** | **t** | **t** | | **t** | **n** |
| **n** | **t** | **t** | | **n** | **n** | **t** | **t** | **n** | **n** | **n** | **n** | **t** | | **t** | **t** |
| **n** | **t** | **n** | | **n** | **n** | **t** | **t** | **n** | **n** | **t** | **t** | **t** | | **t** | **t** |
| **n** | **n** | **t** | | **n** | **t** | **t** | **t** | **n** | **t** | **t** | **n** | **t** | | **t** | **t** |
| **n** | **n** | **n** | | **n** | **t** | **t** | **t** | **n** | **t** | **t** | **t** | **t** | | **t** | **t** |

iz koje vidimo da je formula tautologija. $\Omega$

12. **Zadatak** (Spisak osnovnih tautologija)**.** Dokazati da su sledeće formule tautologije:

$1^\circ$ $p \vee \neg p$; $2^\circ$ $\neg(p \wedge \neg p)$; $3^\circ$ $p \rightarrow p$; $4^\circ$ $\neg\neg p \leftrightarrow p$;
$5^\circ$ $p \wedge p \leftrightarrow p$; $6^\circ$ $p \vee p \leftrightarrow p$; $7^\circ$ $p \wedge \top \leftrightarrow p$; $8^\circ$ $p \wedge \bot \leftrightarrow \bot$;
$9^\circ$ $p \vee \top \leftrightarrow \top$; $10^\circ$ $p \vee \bot \leftrightarrow p$; $11^\circ$ $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$; $12^\circ$ $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$;
$13^\circ$ $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$; $14^\circ$ $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$; $15^\circ$ $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$;
$16^\circ$ $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$; $17^\circ$ $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$;
$18^\circ$ $(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$;
$19^\circ$ $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; $20^\circ$ $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
$21^\circ$ $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$; $22^\circ$ $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$;
$23^\circ$ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$; $24^\circ$ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q \rightarrow \bot)$;
$25^\circ$ $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$; $26^\circ$ $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$;
$27^\circ$ $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$; $28^\circ$ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

13. *Komentar.* Tautologija 1 naziva se *zakon isključenja trećeg (tertium non datur)*. Tautologija 4 je *zakon duple negacije*. Tautologije 5 i 6 nazivaju se *zakoni idempotencije* za konjunkciju i disjunkciju. Tautologije 11 i 12 su *zakoni apsorbcije*. Tautologije 13-14 su *komutativni zakoni*, a 16-18 *asocijativni zakoni* za konjunkciju, disjunkciju i ekvivalenciju. Tautologine 19 и 20 су *distributivni zakoni* konjunkcije prema disjunkciji i disjunkcije prema konjunkciji. Tautologije 21 i 22 su De Morganovi zakoni. Tautologija 23 je *zakon kontrapozicije*. Tautoloija 24 je *zakon svođenja na protivrednost (reductio ad absurdum)*. Tautologija 25 je *modus ponens*, a 26 je *modus tollens*. Tautologija 27 naziva se *disjunktivni silogizam*, a 28 *hipotetički silogizam*.

14. **Tvrđenje.** *Neka su* $\varphi = \varphi(p_1, \dots, p_k)$, $\psi_1, \dots, \psi_k$ *formule i neka je* $\models \varphi$. *Tada je i* $\models \varphi(\psi_1, \dots, \psi_k)$.

*Dokaz.* Neka je $v$ proizvoljna valuacija i neka je $w$ valuacija takva da $w(p_i) = \hat{v}(\psi_i)$ za sve $i = 1, \dots, k$. Tada je:

$$\begin{aligned} \hat{v}(\varphi(\psi_1, \dots, \psi_k)) &= \hat{w}(\varphi) && \text{po lemi 8} \\ &= \mathbf{t} && \text{jer je} \models \varphi. \end{aligned}$$

Kako je $\varphi(\psi_1, \dots, \psi_k)$ tačna za proizvoljnu valuaciju $v$, važi $\models \varphi(\psi_1, \dots, \psi_k)$. $\Omega$

15. **Primer.** Dokazati da je formula $(p \leftrightarrow q \vee r) \wedge ((p \leftrightarrow q \vee r) \to (q \vee r \to s)) \to (q \vee r \to s)$ tautologija.

*Rešenje.* Naša formula jednaka je $\varphi(p \leftrightarrow q \vee r, q \vee r \to s)$, gde je $\varphi(p, q) = p \wedge (p \to q) \to q$ tautologija modus ponens. Prema tvrđenju 14 i naša formula je tautologija. $\Omega$

## V. Ekvivalentne formule.

16. **Definicija.** Formule $\varphi$ i $\psi$ su *logički ekvivalentne*, u oznaci $\varphi \Leftrightarrow \psi$, ako za sve valuacije $v$ važi $\hat{v}(\varphi) = \hat{v}(\psi)$, tj. ako je formula $\varphi \leftrightarrow \psi$ ekvivalencija.

17. **Tvrđenje.** *Neka su* $\varphi_1 = \varphi_1(p_1, \dots, p_k)$, $\varphi_2 = \varphi_2(p_1, \dots, p_k)$, $\psi_1, \dots, \psi_k$ *i* $\theta_1, \dots, \theta_2$ *formule i pretpostavimo* $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ *i* $\psi_i \Leftrightarrow \theta_i$ *za sve* $i = 1, \dots, k$. *Tada je:*

$$\varphi_1(\psi_1, \dots, \psi_n) \Leftrightarrow \varphi_2(\theta_1, \dots, \theta_k).$$

*Dokaz.* Neka je $v$ proizvoljna valuacija i neka je $w$ valuacija takva da $w(p_i) = \hat{v}(\psi_i)$ za sve $i = 1, \dots, k$. Kako je $\psi_i \Leftrightarrow \theta_i$ za sve $i = 1, \dots, k$, važi i $w(p_i) = \hat{v}(\theta_i)$ za sve $i = 1, \dots, k$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} \hat{v}(\varphi_1(\psi_1, \dots, \psi_k)) &= \hat{w}(\varphi_1) && \text{po lemi 8} \\ &= \hat{w}(\varphi_2) && \text{jer } \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \\ &= \hat{v}(\varphi_2(\theta_1, \dots, \theta_2)) && \text{po lemi 8.} \end{aligned}$$

Kako je $v$ proizvoljna valuacija, zaključujemo $\varphi_1(\psi_1, \dots, \psi_k) \Leftrightarrow \varphi_2(\theta_1, \dots, \theta_k)$. $\Omega$

18. **Primer.** Dokazati da su formule $(\neg p \vee q) \to (r \leftrightarrow s)$ i $\neg(p \to q) \vee (s \leftrightarrow r)$ logički ekvivalentne.

*Rešenje.* Uočimo formule $\varphi_1 = \varphi_1(a, b) = a \to b$ i $\varphi_2 = \varphi_2(a, b) = \neg a \vee b$, i primetimo $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} (\neg p \vee q) \to (r \leftrightarrow s) &= \varphi_1(\neg p \vee q, r \leftrightarrow s) \\ &\Leftrightarrow \varphi_2(p \to q, s \leftrightarrow r) && \text{po tvrđenju 17} \\ &= \neg(p \to q) \vee (s \leftrightarrow r), \end{aligned}$$

gde u drugom koraku možemo da primenimo tvđenje 17 jer $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, $\neg p \vee q \Leftrightarrow p \to q$ i $r \leftrightarrow s \Leftrightarrow s \leftrightarrow r$. $\Omega$

19. **Primer.** Dokazati da je $(p \to r) \wedge (q \to r) \leftrightarrow (p \vee q \to r)$ tautologija.

*Rešenje.* Izvodimo niz ekvivalentnih zamena, implicitno koristeći tvrđenje 17, a detaljnije objašnjenje primene tvrđenja ostavjamo za kasnije:

$$\begin{aligned}(p \to r) \wedge (q \to r) \leftrightarrow (p \vee q \to r) \quad &\Leftrightarrow \quad (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \\ &\Leftrightarrow \quad (\neg p \wedge \neg q) \vee r \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\ &\Leftrightarrow \quad \top.\end{aligned}$$

U prvom koraku smo izvršili ekvivalentne zamene $p \to r \Leftrightarrow \neg p \vee r$, $q \to r \Leftrightarrow \neg q \vee r$ i $p \vee q \to r \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r$. Fomalno, primenili smo tvrđenje 17 na formule $\varphi_1(a,b,c) = \varphi_2(a,b,c) = a \wedge b \leftrightarrow c$ i zaključili $\varphi_1(p \to r, q \to r, p \vee q \to r) \Leftrightarrow \varphi_2(\neg p \vee r, \neg q \vee r, \neg(p \vee q) \vee r)$.

U drugom koraku izvršili smo ekvivalentne smene $(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$ (distributivan zakon) i $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (De Morganov zakon). Formalno, uočimo formule $\varphi_1(a,b,c) = \varphi_2(a,b,c) = a \leftrightarrow b \vee c$ i po tvrđenju 17 zaključimo $\varphi_1((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r), \neg(p \vee q), r) \Leftrightarrow \varphi_2((\neg p \wedge \neg q) \vee r, \neg p \wedge \neg q, r)$.

U trećem koraku koristimo tautologiju $\varphi(a) = a \leftrightarrow a$ i tvrđenje 14 da zaključimo da je $\varphi((\neg p \wedge \neg q) \vee r)$ tautologija.

Kako smo polaznu formulu ekvivalentnim smenama sveli na tautologiju, i polazna formula je tautologija. $\Omega$

## VI. **Logička posledica.**

20. **Definicija.** (a) Valaucija $v$ *zadovoljava* skup formula $\Sigma$, u oznaci $v \models \Sigma$, ako za sve formule $\varphi \in \Sigma$ važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$.
(b) Skup formula $\Sigma$ je *zadovoljiv* ako postoji valuacija $v$ takva da $v \models \Sigma$.
(c) Formula $\varphi$ je *logička posledica* skupa formula $\Sigma$, u oznaci $\Sigma \models \varphi$, ako za sve valuacije $v$ važi implikacija $v \models \Sigma$ povlači $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$.

21. **Lema.** *Skup formula $\Sigma$ je zadovoljiv akko $\Sigma \not\models \bot$.*

*Dokaz.* ($\Rightarrow$) Pretpostavimo $\Sigma$ je zadovoljiv, tj. postoji valuacija $v$ takva da $v \models \Sigma$. Kako je svakako $\hat{v}(\bot) = \mathbf{n}$, zaključujemo $\Sigma \not\models \bot$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo $\Sigma \not\models \bot$. To znači da postoji valuacija $v$ takva da $v \models \Sigma$, ali $\hat{v}(\bot) = \mathbf{n}$, specijalno neka valuacija zadovoljava $\Sigma$, tj. $\Sigma$ je zadovoljiv. $\Omega$

22. **Lema.** *Neka je $\varphi$ formula. Tada $\varnothing \models \varphi$ akko $\models \varphi$.*

*Dokaz.* Primetimo da $\varnothing \models \varphi$ znači $(\forall v)(v \models \varnothing \to \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t})$. Takođe $v \models \varnothing$ znači $(\forall \sigma \in \varnothing)\, \hat{v}(\sigma) = \mathbf{t}$, što je logički tačan iskaz jer je dobijen ograničenjem univerzalnog kvantifikatora na prazan skup. Kako je $v \models \varnothing$ logički tačan, implikacija $v \models \varnothing \to \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$ ekvivalentna je sa $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$, pa $\varnothing \models \varphi$ svodi se na $(\forall v)\, \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$, što sa druge strane znači $\models \varphi$. $\Omega$

## VII. **Prirodna dedukcija.**

*Prirodna dedukcija* je sistem za formalno dokazivanje formula iz polaznih premisa koji se bazira na uobičajenim deduktvnim postupcima matematičkog dokaza. Osnovna pravila zaključivanja su sledeća četiri:

$$\frac{\varphi}{\varphi}\,\mathrm{R} \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,\mathrm{MP} \qquad \frac{\begin{array}{|l} \varphi \quad \mathrm{pp} \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}\,\mathrm{D} \qquad \frac{\begin{array}{|l} \neg\varphi \quad \mathrm{pp} \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\varphi}\,\mathrm{RAA}$$

Zovemo ih redom *reiteracija*, *modus ponens*, pravilo *dedukcije* i *reductio ad absurdum*. Pravilo R kaže: iz formule $\varphi$ možemo da zaključimo $\varphi$. Pravilo MP kaže: iz $\varphi$ i $\varphi \to \psi$ možemo da zaključimo $\psi$. Pravilo D kaže: ako pod pretpostavkom $\varphi$ dokažemo $\psi$ možemo da zaključimo $\varphi \to \psi$. Pravilo RAA kaže: ako pod pretpostavkom $\neg\varphi$ dokažemo kontradikciju možemo da zaključimo $\varphi$.

Neka su $\varphi$ formula i $\Sigma$ skup formula. *Dokaz* u prirodnoj dedukciji formule $\varphi$ iz premisa $\Sigma$ je konačan niz koraka u kojem koristeći premise (formule iz $\Sigma$) i poštujući navedena pravila dolazimo do zaključka $\varphi$. Preciznije, u svakom koraku možemo ili da konstatujemo neku od premisa ili da primenimo neko od gornjih pravila na prethodno izvedene formule u dokazu kako bismo izveli novu formulu. Poslednja formula u dokazu treba da bude baš formula $\varphi$.

Pravila R i MP direktno se odnose na jednu, odnosno dve prethodne formule u dokazu. Pogledajmo sledeći primer:

23. **Primer.** Iz premisa $\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \theta$ može se dokazati $\theta$.

*Rešenje.* Zapišimo najpre dokaz, pa ćemo ga prokomentarisati.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\varphi$ | premisa |
| 2 | $\varphi \to \psi$ | premisa |
| 3 | $\psi \to \theta$ | premisa |
| 4 | $\psi$ | MP(1,2) |
| 5 | $\theta$ | MP(3,4) |

Svaki korak u dokazu numerišemo kako bismo lakše pratili postupak. Takođe sa desne strane pišemo opravdanje date formule. U prva tri koraka smo konstatovali date premise. U koraku četiri primenili smo pravilo modus ponens na formule iz prvog i drugog koraka kako bismo zaključili formulu $\psi$. Konačno u petom koraku još jednom primenjujemo pravilo modus ponena na formule iz trećeg i četvrtog koraka i zaključujemo formulu $\theta$. S obzirom da je cilj i bio da izvedemo formulu $\theta$, ovim korakom smo i završili dokaz. $\Omega$

Pravila D i RAA zahtevaju da u okviru dokaza napišemo određen poddokaz koji započinjemo odgovarajućom dodatnom pretpostavkom (pp). Treba voditi računa da datu pretpostavku nemamo kao premisu, tako da poddokaz u kojem je koristimo naglašavamo pisanjem linije s leve strane poddokaza koja nam govori dokle traje važenje date pretpostavke. Sama pretpostavka i formule dobijene u okviru poddokaza ne smeju se koristiti van samog poddokaza. Poslednja formula dokaza ne sme da bude unutar poddokaza, tj. sve poddokaze moramo da završimo do tog trenutka.

Pogledajmo još dva primera:

24. **Primer.** Iz premisa $\varphi \to \psi, \psi \to \theta$ može se dokazati $\varphi \to \theta$.

*Rešenje.* Ponovo zapišimo dokaz, pa ćemo ga prokomentarisati:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\varphi \to \psi$ | premisa |
| 2 | $\psi \to \theta$ | premisa |
| 3 | $\mid\ \varphi$ | pp |
| 4 | $\mid\ \psi$ | MP(1,3) |
| 5 | $\mid\ \theta$ | MP(3,4) |
| 6 | $\varphi \to \theta$ | D(3–5) |

U prva dva koraka smo konstatovali premise. S obzirom da treba da dokažemo formulu koja je u obliku implikacije, idemo na pravilo dedukcije, pa u trećem koraku otvaramo pod-dokaz sa odgovarajućom pretpostavkom. U koracima četiri i pet koristimo modus ponens. Kako smo u petom koraku došli do željenog zaključka, zatvaramo poddokaz i koristimo previlo dedukcije u šestom koraku. $\Omega$

25. **Primer.** Bez premisa može se dokazati $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$.

*Rešenje.* Zapišimo dokaz:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mid\ \varphi \to (\psi \to \theta)$ | pp |
| 2 | $\mid\ \mid\ \varphi \to \psi$ | pp |
| 3 | $\mid\ \mid\ \mid\ \varphi$ | pp |
| 4 | $\mid\ \mid\ \mid\ \psi$ | MP(2,3) |
| 5 | $\mid\ \mid\ \mid\ \psi \to \theta$ | MP(1,3) |
| 6 | $\mid\ \mid\ \mid\ \theta$ | MP(4,5) |
| 7 | $\mid\ \mid\ \varphi \to \theta$ | D(3–6) |
| 8 | $\mid\ (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)$ | D(2–7) |
| 9 | $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$ | D(1–8) |

Kako dokazujemo formulu u obliku implikacije, idemo na pravilo dedukcije i započinjemo poddokaz sa odgovarajućom pretpostavkom $\varphi \to (\psi \to \theta)$, sa željom da dokažemo formulu $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)$. S obzirom da je i ova formula u obliku implikacije, ponovo idemo na pravilo dedukcije i yapo;injemo novi poddoka sa pretpostavkom $\varphi \to \psi$ i zadatko da dokažemo $\varphi \to \theta$. Ponovo, kao je i ovo implikacije, u trećem koraku otvaramo još jedan poddokaz sa pretpostavkom $\varphi$ i zadatkom da dokažemo $\theta$. To radimo koristeći MP u sledeća tri koraka. Na kraju zatvaramo poddokaze po pravilu dedukcije u poslednja tri koraka. $\Omega$

26. **Definicija.** Ako se iz premisa $\Sigma$ može dokazati formula $\varphi$, to ćemo zapisivati sa $\Sigma \vdash \varphi$ (čitamo „$\Sigma$ dokazuje $\varphi$", „$\Sigma$ izvodi $\varphi$", ili „*sekvent* $\Sigma \vdash \varphi$ je dokaziv").

Ako je $\Sigma$ konačan, umesto $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \varphi$ pišemo $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$. Takođe, umesto $\varnothing \vdash \varphi$ pišemo samo $\vdash \varphi$ i u tom slučaju za $\varphi$ kažemo da je *teorema*.

U primeru 23 dokazali smo sekvent $\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \theta$, u primeru 24 dokazali smo $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$, a u primeru 25, $\vdash (\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$, tj. ova formula je teorema.

VIII. **Izvedena pravila.** Sekvent dokazan u primeru 24 možemo da koristimo i kao pravilo:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \psi \to \theta}{\varphi \to \theta}\text{HS}$$

Zovemo ga *hipotetički silogizam*.

U sledećim primerima dokazujemo izvestan broj izvedenih pravila.

27. **Primer** (Eliminacija i uvođenje negacije)**.** Dokazati sledeća dva pravila:

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\neg_E \quad \text{i} \quad \frac{\begin{array}{|ll} \varphi & \text{pp} \\ \vdots & \\ \perp & \end{array}}{\neg\varphi}\neg_U$$

*Rešenje.* Ako se setimo da je $\neg\varphi$ po definiciji zamena za $\varphi \to \perp$, zamenom $\psi$ sa $\perp$ u pravilima MP i D, Dobijamo $\neg_E$ i $\neg_U$ kao njihove specijalne slučajeve. Ω

28. **Primer** (*Ex falso quodlibet*)**.** Dokazati $\perp \vdash \varphi$, tj. pravilo:

$$\frac{\perp}{\varphi}\text{EFQ}$$

*Rešenje.* Dokaz je:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\perp$ | premisa | | 1 | $\mid \neg\varphi$ | pp |
| 2 | $\mid \neg\varphi$ | pp | ili kraće | 2 | $\mid \perp$ | premisa |
| 3 | $\mid \perp$ | R(1) | | 3 | $\varphi$ | RAA(1–2) |
| 4 | $\varphi$ | RAA(2–3) | | | | |

Ω

29. **Primer** (Eliminacija i uvođenje duple negacije)**.** Dokazati $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ i $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$, tj. pravila:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\neg\neg_E \quad \text{i} \quad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\neg\neg_U$$

*Rešenje.* Dokazi su:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\neg\neg\varphi$ | premisa | | 1 | $\varphi$ | premisa |
| 2 | $\mid \neg\varphi$ | pp | i | 2 | $\mid \neg\varphi$ | pp |
| 3 | $\mid \perp$ | $\neg_E$(1,2) | | 3 | $\mid \perp$ | $\neg_E$(1,2) |
| 4 | $\varphi$ | RAA(2–3) | | 4 | $\neg\neg\varphi$ | $\neg_U$(2–3) |

Primetimo da ovde, zarad kraćeg dokaza, koristimo već dokazana pravila eliminacije i uvođenja negacije. Ω

30. **Primer** (*Modus tollens*)**.** Dokazati $\varphi \to \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$, tj. pravilo:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\text{MT}$$

*Rešenje.* Dokaz je:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\varphi \to \psi$ | premisa |
| 2 | $\neg\psi$ | premisa |
| 3 | $\mid\ \varphi$ | pp |
| 4 | $\mid\ \psi$ | MP(1,3) |
| 5 | $\mid\ \bot$ | $\neg_E$(2,4) |
| 6 | $\neg\varphi$ | $\neg_U$(3–5) |

$\Omega$

31. **Primer** (Kontrapozicija). Dokazati $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ i $\neg\psi \to \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$, tj. pravila:

$$\frac{\varphi \to \psi}{\neg\psi \to \neg\varphi}\,\mathrm{K} \quad \text{i} \quad \frac{\neg\psi \to \neg\varphi}{\varphi \to \psi}\,\mathrm{K}$$

*Rešenje.* Dokazi su:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\varphi \to \psi$ | premisa |
| 2 | $\mid\ \neg\psi$ | pp |
| 3 | $\mid\ \neg\varphi$ | MT(1,2) |
| 4 | $\neg\psi \to \neg\varphi$ | D(2–3) |

i

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg\psi \to \neg\varphi$ | premisa |
| 2 | $\mid\ \varphi$ | pp |
| 3 | $\mid\ \neg\neg\varphi$ | $\neg\neg_U$(2) |
| 4 | $\mid\ \neg\neg\psi$ | MT(1,3) |
| 5 | $\mid\ \psi$ | $\neg\neg_E$(4) |
| 6 | $\varphi \to \psi$ | D(2–5) |

$\Omega$

32. **Primer** (Eliminacija i uvođenje disjunkcije). Dokazati $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$, $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ i $\varphi \vee \psi, \varphi \to \theta, \psi \to \theta \vdash \theta$, tj. pravila:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,\vee_U \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,\vee_U \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \varphi \to \theta \quad \psi \to \theta}{\theta}\,\vee_E$$

*Rešenje.* Setimo se da je $\varphi \vee \psi$ po definiciji zamena za formulu $\neg\varphi \to \psi$. Dokazi su:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\varphi$ | premisa |
| 2 | $\mid\ \neg\varphi$ | pp |
| 3 | $\mid\ \bot$ | $\neg_E$(1,2) |
| 4 | $\mid\ \psi$ | EFQ(3) |
| 5 | $\neg\varphi \to \psi$ | D(2–4) |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\psi$ | premisa |
| 2 | $\mid\ \neg\varphi$ | pp |
| 3 | $\mid\ \psi$ | R(1) |
| 4 | $\neg\varphi \to \psi$ | D(2–3) |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg\varphi \to \psi$ | premisa |
| 2 | $\varphi \to \theta$ | premisa |
| 3 | $\psi \to \theta$ | premisa |
| 4 | $\mid\ \neg\theta$ | pp |
| 5 | $\mid\ \neg\varphi$ | MT(2,4) |
| 6 | $\mid\ \psi$ | MP(1,5) |
| 7 | $\mid\ \theta$ | MP(3,6) |
| 8 | $\mid\ \bot$ | $\neg_E$(4,7) |
| 9 | $\theta$ | RAA(4–8) |

$\Omega$

33. *Komentar.* Imajući u vidu pravilo dedukcije, pravilo $\vee_E$ možemo da formulišemo i na sledeći način:

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{|l} \varphi \quad \text{pp} \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \begin{array}{|l} \psi \quad \text{pp} \\ \vdots \\ \theta \end{array}}{\theta}\,\vee_E$$

34. **Primer** (Disjunktivni silogizmi). Dokazati $\varphi \vee \psi, \neg\psi \vdash \varphi$ i $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vdash \psi$, tj. pravila:

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \neg\psi}{\varphi}\,\mathrm{DS} \qquad \text{i} \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \neg\varphi}{\psi}\,\mathrm{DS}$$

*Rešenje.* Kako je $\varphi \vee \psi$ zamena za $\neg\varphi \to \psi$, prvo pravilo sledi iz MT i $\neg\neg_E$, a drugo direktno iz MP. $\Omega$

35. **Primer** (*Tertium non datur)*. Dokazati $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$, tj. pravilo:

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{TND}$$

*Rešenje.* Kako je $\varphi \vee \neg\varphi$ zamena za $\neg\varphi \to \neg\varphi$, dokaz je:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mid\ \neg\varphi$ | pp |
| 2 | $\neg\varphi \to \neg\varphi$ | D(1–1) |

$\Omega$

36. **Primer** (Eliminacija i uvođenje konjunkcije). Доказати $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$, $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ i $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$, tj. pravila:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge_E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,\wedge_E \qquad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge_U$$

*Rešenje.* Kako je $\varphi \wedge \psi$ po definiciji zamena za $\neg(\varphi \to \neg\psi)$, dokazi su:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(\varphi \to \neg\psi)$ | premisa |
| 2 | $\mid\ \neg\varphi$ | pp |
| 3 | $\mid\ \mid\ \varphi$ | pp |
| 4 | $\mid\ \mid\ \bot$ | $\neg_E$(2,3) |
| 5 | $\mid\ \mid\ \neg\psi$ | EFQ(4) |
| 6 | $\mid\ \varphi \to \neg\psi$ | D(3–5) |
| 7 | $\mid\ \bot$ | $\neg_E$(1,6) |
| 8 | $\varphi$ | RAA(2–7) |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(\varphi \to \neg\psi)$ | premisa |
| 2 | $\mid\ \neg\psi$ | pp |
| 3 | $\mid\ \mid\ \varphi$ | pp |
| 4 | $\mid\ \mid\ \neg\psi$ | R(2) |
| 5 | $\mid\ \varphi \to \neg\psi$ | D(3–4) |
| 6 | $\mid\ \bot$ | $\neg_E$(1,5) |
| 7 | $\psi$ | RAA(2–6) |

i:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\varphi$ | premisa |
| 2 | $\psi$ | premisa |
| 3 | $\mid\ \varphi \to \neg\psi$ | pp |
| 4 | $\mid\ \neg\psi$ | MP(1,3) |
| 5 | $\mid\ \bot$ | $\neg_E$(2,4) |
| 6 | $\neg(\varphi \to \neg\psi)$ | $\neg_U$(3–5) |

$\Omega$

37. **Primer** (Eliminacija i uvođenje ekvivalencije). Dokazati $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \to \varphi$ i $\varphi \to \psi, \psi \to \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, tj. pravila:

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi \to \psi}\,\leftrightarrow_E \qquad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \to \varphi}\,\leftrightarrow_E \qquad \frac{\varphi \to \psi \quad \psi \to \varphi}{\varphi \leftrightarrow \psi}\,\leftrightarrow_U$$

*Rešenje.* Kako je po definiciji $\varphi \leftrightarrow \psi$ zamena za $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, ova pravila su specijalni slučajevi $\wedge_E$ i $\wedge_U$. $\Omega$

38. **Primer** (De Morganova pravila). Dokazati $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$, $\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$, $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$ i $\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$, tj. pravila:

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \vee \neg\psi}\mathrm{DM} \qquad \frac{\neg\varphi \vee \neg\psi}{\neg(\varphi \wedge \psi)}\mathrm{DM} \qquad \frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi}\mathrm{DM} \qquad \frac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg(\varphi \vee \psi)}\mathrm{DM}$$

*Rešenje.* Dokazi prva dva pravila su:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(\varphi \wedge \psi)$ | premisa |
| 2 | $\varphi \to \neg\psi$ | $\neg\neg_E(1)$ po def. $\wedge$ |
| 3 | $\mid\ \neg\neg\varphi$ | pp |
| 4 | $\mid\ \varphi$ | $\neg\neg_E(3)$ |
| 5 | $\mid\ \neg\psi$ | MP(2,4) |
| 6 | $\neg\varphi \vee \neg\psi$ | D(3–5) po def. $\vee$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg\varphi \vee \neg\psi$ | premisa |
| 2 | $\mid\ \varphi$ | pp |
| 3 | $\mid\ \neg\neg\varphi$ | $\neg\neg_U(2)$ |
| 4 | $\mid\ \neg\psi$ | MP(1,3) po def. $\vee$ |
| 5 | $\varphi \to \neg\psi$ | D(2–4) |
| 6 | $\neg(\varphi \wedge \psi)$ | $\neg\neg_U(5)$ po def. $\wedge$ |

Dokazi preostala dva pravila su:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(\varphi \vee \psi)$ | premisa |
| 2 | $\mid\ \neg\varphi \to \neg\neg\psi$ | pp |
| 3 | $\mid\ \mid\ \neg\varphi$ | pp |
| 4 | $\mid\ \mid\ \neg\neg\psi$ | MP(2,3) |
| 5 | $\mid\ \mid\ \psi$ | $\neg\neg_E(4)$ |
| 6 | $\mid\ \neg\varphi \to \psi$ | D(3–5) |
| 7 | $\mid\ \bot$ | $\neg_E(1,6)$ po def. $\vee$ |
| 8 | $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ | RAA(2–7) po def. $\wedge$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ | premisa |
| 2 | $\mid\ \neg\varphi \to \psi$ | pp |
| 3 | $\mid\ \mid\ \neg\varphi$ | pp |
| 4 | $\mid\ \mid\ \psi$ | MP(3,2) |
| 5 | $\mid\ \mid\ \neg\neg\psi$ | $\neg\neg_U(4)$ |
| 6 | $\mid\ \neg\varphi \to \neg\neg\psi$ | D(3–5) |
| 7 | $\mid\ \bot$ | $\neg_E(1,6)$ po def. $\wedge$ |
| 8 | $\neg(\varphi \vee \psi)$ | RAA(2–7) po def. $\vee$ |

$\Omega$

## IX. Teorema dedukcije.

39. **Teorema** (Teorema dedukcije). *Neka je $\Sigma$ skup formula i $\varphi, \psi$ dve formule. Tada:*

$$\Sigma \vdash \varphi \to \psi \quad \textit{akko} \quad \Sigma, \varphi \vdash \psi.$$

*Dokaz.* ($\Rightarrow$) Pretpostavimo $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ i uočimo jedan dokaz ovog sekventa (dokaz levo):

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ \vdots & \vdots \\ n & \varphi \to \psi \\ & \\ & \end{array} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{lll} 1 & & \\ \vdots & \vdots & \\ n & \varphi \to \psi & \\ (n+1) & \varphi & \text{premisa} \\ (n+2) & \psi & \text{MP}(n, n+1) \end{array}$$

Od premisa u ovom dokazu koristimo samo formule iz $\Sigma$. Pogledajmo dokaz na desnoj strani. Prepišimo prethodni dokaz, dodajmo premisu $\varphi$ u koraku $(n+1)$ i pozivajući se na modus ponens zaključijemo $\psi$. Time smo konstruisali dokaz za $\Sigma, \varphi \vdash \psi$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo $\Sigma, \varphi \vdash \psi$. Uočimo jedan dokaz ovog sekventa (dokaz levo):

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $0$ | $\varphi$ | premisa | | $0$ | \| | $\varphi$ | pp |
| $1$ | | | $1$ | | | | $1$ | \| | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\rightsquigarrow$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\rightsquigarrow$ | $\vdots$ | \| | $\vdots$ | |
| $n$ | $\psi$ | | $n$ | $\psi$ | | | $n$ | \| | $\psi$ | |
| | | | | | | | $(n+1)$ | | $\varphi \to \psi$ | D$(0-n)$ |

U ovom dokazu se od premisa javljaju formule iz $\Sigma$ i $\varphi$. Prepravimo dokaz na sledeći način (dokaz u sredini). Dodajmo ispred celog dokaza nultu formulu $\varphi$ koju opravdamo kao premisa, a u koracima $1-n$ svako pojavljivanje premise $\varphi$ opravdamo kao R$(0)$. Primetimo da je i ovo dokaz sekventa $\Sigma, \varphi \vdash \psi$, premisa $\varphi$ javlja se jedino u koraku $0$, a u koracima $1-n$ jedine premise su iz $\Sigma$. Sada ovakav dokaz prepravimo na sledeći način (dokaz desno). Prograsimo formulu $\varphi$ u koraku $0$ za pretpostavku i pretvorimo ceo dokaz $0-n$ u poddokaz sa ovom pretpostavkom. U koraku $(n+1)$ iskoristimo pravilo dedukcije da se rešimo poddokaza. Od premisa u ovom dokazu su samo formule iz $\Sigma$, tj. zapisali smo dokaz sekventa $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$. $\Omega$

## X. **Teorema saglasnosti.**

40. **Teorema** (Teorema saglasnosti). *Neka je $\Sigma$ skup formula i $\varphi$ jedna formula. Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda $\Sigma \models \varphi$.*

Za sekvent $\Sigma \vdash \varphi$, označimo sa $d(\Sigma \vdash \varphi)$ dužinu najkraćeg dokaza u prirodnoj dedukciji (koji koristi samo osnovna pravila) ovog sekventa ako je on dokaziv; ako nije dokaziv možemo da definišemo $d(\Sigma \vdash \varphi) = \infty$. Dakle, $\Sigma \vdash \varphi$ je dokaziv akko $d(\Sigma \vdash \varphi) \in \mathbb{N}^+$.

*Dokaz teoreme 40.* Dovoljno je da dokažemo sledeće za sve $n \geqslant 1$: Za svaki sekvent $\Sigma \vdash \varphi$, ako je $d(\Sigma \models \varphi) = n$, onda $\Sigma \models \varphi$. Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po $n$. Neka je $n \geqslant 1$ proizvoljno, pretpostavimo da tvrđenje važi za sekvente čija je dužina najkraćeg dokaza $k$, $1 \leqslant k < n$ (IH), i dokažimo tvrđenje za sekvente čija je dužina najkraćeg dokaza jednaka $n$. Pretpostavimo da imamo sekvent $\Sigma \vdash \varphi$ takav da $d(\Sigma \vdash \varphi) = n$. Uočimo neki najkraći dokaz ovog sekventa:

| | | |
|---|---|---|
| $1$ | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $n$ | $\varphi$ | opravdanje |

u kome se od premisa javljaju samo formule iz $\Sigma$. Diskutovaćemo po opravdanju, tj. imamo sledećih pet slučajeva.

$1^\circ$ opravdanje=premisa: Ako je $\varphi$ premisa, to znači da $\varphi \in \Sigma$, pa očigledno važi $\Sigma \models \varphi$. (Primetimo jednu činjenicu koja nije bila bitna u dokazu. Naime, ako je opravdanje premisa, mora biti $n = 1$ jer smo uočili najkraći dokaz.)

$2^\circ$ opravdanje=R: Dokazaćemo da ovaj slučaj nije moguć. Ako je opravdanje reiteracija, mora biti oblika R$(m)$, gde je $m < n$ i u koraku $m$ je formula $\varphi$, tj. dokaz je sledećeg oblika:

$$\begin{array}{lll} 1 & & \\ \vdots & \vdots & \\ m & \varphi & \\ \vdots & \vdots & \\ n & \varphi & \mathrm{R}(m) \end{array}$$

Ako bismo prekinuli prethodni dokaz nakon prvog koraka, takođe bismo imali dokaz za $\Sigma \vdash \varphi$, koji je kraći od $n$. Kako ovo nije moguće, zaključujemo da ovaj slučaj nije moguć. (Zapravo smo dokazali da se najkraći dokaz ne može završiti reiteracijom.)

$3^\circ$ opravdanje=MP: Ako je opravdanje modus ponens, mora biti oblika MP($k$,$m$), gde $k < m < n$, formula u $k$-tom koraku je $\psi$ i formula u $m$-tom koraku je $\psi \to \varphi$ (ili obratno). (Takođe možemo zaključiti i da je $m = n - 1$ jer smo uočili najkraći dokaz, što neće biti bitno.) Dakle, dokaz je sledećeg oblika:

$$\begin{array}{lll} 1 & & \\ \vdots & \vdots & \\ k & \psi & \\ \vdots & \vdots & \\ m & \psi \to \varphi & \\ \vdots & \vdots & \\ n & \varphi & \mathrm{MP}(k,m) \end{array}$$

Primetimo da ako prekinemo dokaz posle $k$-tog, odnosno $m$-tog koraka, dobijamo dokaze za sekvente $\Sigma \vdash \psi$ i $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$ dužine $k < n$, odnosno $m < n$. Prema tome $d(\Sigma \vdash \psi), d(\Sigma \vdash \psi \to \varphi) < n$, pa možemo da primenimo (IH) i zaključujemo $\Sigma \models \psi$ i $\Sigma \models \psi \to \varphi$. Dokažimo sada $\Sigma \models \varphi$. Neka je $v$ valuacija takva da $v \models \Sigma$. Iz $\Sigma \models \psi$ i $\Sigma \models \psi \to \varphi$ imamo $\hat{v}(\psi) = \mathbf{t}$ i $\hat{v}(\psi \to \varphi) = \mathbf{t}$, odakle sledi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$. Dakle, $\Sigma \models \varphi$.

$4^\circ$ opravdanje=D: Ako je opravdanje pravilo dedukcije, mora biti oblika D($k - m$), gde $k < m < n$, formula $\varphi$ je oblika $\psi \to \theta$, u $k$-tom koraku je pretpostavka $\psi$ i formula u $m$-tom koraku je $\theta$. (Takođe možemo zaključiti i da je $m = n - 1$ jer smo uočili najkraći dokaz, što neće biti bitno.) Dakle, dokaz je sledećeg oblika (levo):

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \\ k & & \multicolumn{1}{|l}{\psi} & \mathrm{pp} \\ \vdots & & \multicolumn{1}{|l}{\vdots} & \\ m & & \multicolumn{1}{|l}{\theta} & \\ \vdots & \vdots & & \\ n & \multicolumn{2}{l}{\psi \to \theta = \varphi} & \mathrm{D}(k-m) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{lll} 1 & & \\ \vdots & \vdots & \\ k & \psi & \text{premisa} \\ \vdots & \vdots & \\ m & \theta & \end{array}$$

Prepravimo ovaj dokaz na sledeći način (dokaz desno). Prekinimo dokaz posle $m$-tog koraka i proglasimo pretpostavku $\psi$ u $k$-tom koraku za premisu, pri čemu poddokaz od $k$-tog do $m$-tog koraka postaje glavni deo dokaza (sklanjamo crtu poddokaza s leve strane). Time dobijamo dokaz za sekvent $\Sigma, \psi \vdash \theta$ dužine $m < n$ ($\psi$ je s leve strane sekventa jer smo je proglasili za premisu). Prema tome $d(\Sigma, \psi \vdash \theta) < n$, pa možemo da primenimo (IH) i zaključujemo $\Sigma, \psi \models \theta$. Dokažimo sada $\Sigma \models \varphi$, tj. $\Sigma \models \psi \to \theta$. Neka je $v$ valuacija takva da $v \models \Sigma$. Ako je $\hat{v}(\psi) = \mathbf{n}$, važi $\hat{v}(\psi \to \theta) = \mathbf{t}$. Ako je $\hat{v}(\psi) = \mathbf{t}$, tada $v \models \Sigma, \psi$, pa kako $\Sigma, \psi \models \theta$, dobijamo $\hat{v}(\theta) = \mathbf{t}$, odakle ponovo važi $\hat{v}(\psi \to \theta) = \mathbf{t}$. Dakle, $\Sigma \models \varphi$.

$5^\circ$ opravdanje=RAA: Ako je opravdanje reductio ad absurdum, mora biti oblika RAA($k-m$), gde $k < m < n$, u $k$-tom koraku je pretpostavka $\neg\varphi$ i formula u $m$-tom koraku je $\bot$. (Takođe možemo zaključiti i da je $m = n - 1$ jer smo uočili najkraći dokaz, što neće biti bitno.) Dakle, dokaz je sledećeg oblika (levo):

$$
\begin{array}{llll}
1 & & & \\
\vdots & \vdots & & \\
k & & \multicolumn{1}{|l}{\neg\varphi} & \text{pp} \\
\vdots & & \multicolumn{1}{|l}{\vdots} & \\
m & & \multicolumn{1}{|l}{\bot} & \\
\vdots & \vdots & & \\
n & \varphi & & \text{RAA}(k-m)
\end{array}
\qquad \rightsquigarrow \qquad
\begin{array}{lll}
1 & & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \neg\varphi & \text{premisa} \\
\vdots & \vdots & \\
m & \bot &
\end{array}
$$

Ponovo prepravljamo ovaj dokaz na sledeći način (dokaz desno). Prekinimo dokaz posle $m$-tog koraka i proglasimo pretpostavku $\neg\varphi$ u $k$-tom koraku za premisu, pri čemu poddokaz od $k$-tog do $m$-tog koraka postaje glavni deo dokaza (sklanjamo crtu poddokaza s leve strane). Time dobijamo dokaz za sekvent $\Sigma, \neg\varphi \models \bot$ dužine $m < n$. Prema tome $d(\Sigma, \neg\varphi \vdash \bot) < n$, pa možemo da primenimo (IH) i zaključujemo $\Sigma, \neg\varphi \models \bot$. Dokažimo sada $\Sigma \models \varphi$. Neka je $v$ valuacija takva da $v \models \Sigma$. Ako je $\hat{v}(\neg\varphi) = \mathbf{t}$, važi $v \models \Sigma, \neg\varphi$, pa kako $\Sigma, \neg\varphi \models \bot$, dobijamo $\hat{v}(\bot) = \mathbf{t}$, što je besmisleno. Prema tome mora biti $\hat{v}(\neg\varphi) = \mathbf{n}$, tj. $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$. Dakle, $\Sigma \models \varphi$.

Završili smo dokaz. $\Omega$

41. **Definicija.** Skup formula $\Sigma$ je *konzistentan* ako $\Sigma \nvdash \bot$.

Još jedna verzija teoreme saglasnosti je:

42. **Posledica** (Teorema saglasnosti)**.** *Ako je skup $\Sigma$ zadovoljiv, $\Sigma$ je konzistentan.*

*Dokaz.* Dokažimo kontrapoziciju. Ako $\Sigma$ nije konzistentan, tj. $\Sigma \vdash \bot$ po teoremi 40, $\Sigma \models \bot$, pa $\Sigma$ nije zadovoljiv po lemi 21. $\Omega$

## XI. Teorema potpunosti.

43. **Lema.** *Za sve $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ važi $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$.*

*Dokaz.* Dajemo dokaz datog sekventa:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\varphi \to \psi$ | premisa |
| 2 | $\neg\varphi \to \psi$ | premisa |
| 3 | $\quad \neg\psi$ | pp |
| 4 | $\quad \neg\varphi$ | MT(1,3) |
| 5 | $\quad \neg\neg\varphi$ | MT(2,3) |
| 6 | $\quad \bot$ | $\neg_E$(4,5) |
| 7 | $\psi$ | RAA(3-6) |

$\Omega$

44. **Lema.** *Neka* $\Sigma \nvdash \varphi$ *i* $\psi \in \mathcal{F}$. *Tada* $\Sigma, \psi \nvdash \varphi$ *ili* $\Sigma, \neg\psi \nvdash \varphi$.

*Dokaz.* Pretpostavimo $\Sigma \nvdash \varphi$ i $\psi \in \mathcal{F}$. Pretpostavimo suprotno, $\Sigma, \psi \vdash \varphi$ i $\Sigma, \neg\psi \vdash \varphi$. Po teoremi dedukcija (teorema 39) tada $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$ i $\Sigma \vdash \neg\psi \to \varphi$, pa koristeći lemu 43 dobijamo $\Sigma \vdash \varphi$. Kontradikcija. $\Omega$

45. **Definicija.** Skup formula $\Sigma$ je *zatvoren za slova* ako za svako slovo $p$ važi (bar jedno od) $p \in \Sigma$ ili $\neg p \in \Sigma$.

46. **Lema** (Lindenbaumova teorema). *Pretpostavimo* $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. *Neka* $\Sigma \nvdash \varphi$. *Postoji skup* $\Sigma^*$ *takav da* $\Sigma^*$ *je zatvoren za slova*, $\Sigma^* \supseteq \Sigma$ *i* $\Sigma^* \nvdash \varphi$.

*Dokaz.* Rekurentno definišemo niz skupova $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots$ takav da:

- $\Sigma_0 = \Sigma$;
- za svako $n$, $p_n \in \Sigma_{n+1}$ ili $\neg p_n \in \Sigma_{n+1}$;
- za svako $n$, $\Sigma_n \nvdash \varphi$.

Definišemo $\Sigma_0 = \Sigma$ čime smo zadovoljili prvu tačku, ali i treća tačka važi po pretpostavci za $n = 0$. Pretpostavimo da smo definisali $\Sigma_n$ koje zadovoljava potrebne uslove. Specijalno $\Sigma_n \nvdash \varphi$, pa prema lemi 44 važi bar jedno od $\Sigma_n, p_n \nvdash \varphi$ ili $\Sigma_n, \neg p_n \nvdash \varphi$, pa definišimo:

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{p_n\} & \text{ako } \Sigma_n, p_n \nvdash \varphi \\ \Sigma_n \cup \{\neg p_n\} & \text{ako } \Sigma_n, p_n \vdash \varphi \end{cases}.$$

Primetimo da $\Sigma_{n+1}$ zadovoljava odgovarajuće osobine iz druge i treće tačke, pa možemo da nastavimo postupak.

Definišimo sada $\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ i dokažimo da ovaj skup zadovoljava željene uslove. Jasno $\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma^*$, kao i da prema drugoj tački $\Sigma^*$ jeste zatvoren za slova. Ostaje da proverimo $\Sigma^* \nvdash \varphi$. Pretpostavimo suprotno, $\Sigma^* \vdash \varphi$. Dokaz ovog sekventa koristi samo konačno mnogo premisa, pa imamo $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Sigma^*$ tako da $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash \varphi$. Svaka $\sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, pripada $\Sigma_{n_i}$ za neko $n_i$, pa sve $\sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, pripadaju $\Sigma_N$, gde je $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Dakle, $\Sigma_N \vdash \varphi$, što je kontradikcija po trećoj tački, pa $\Sigma^* \nvdash \varphi$. $\Omega$

47. **Definicija.** Neka je $\varphi$ formula i $v$ valuacija. Definišemo $\varphi^v$ da bude formula:

$$\varphi^v = \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases}.$$

Primetimo da je uvek $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

48. **Lema.** *Neka su $\varphi, \psi$ formule i $v$ valuacija. Tada $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.*

*Dokaz.* Pogledajmo najpre sledeće dokaze:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg\varphi$ | premisa |
| 2 | $\quad\varphi$ | pp |
| 3 | $\quad\bot$ | $\neg_E$(1,2) |
| 4 | $\quad\psi$ | EFQ(3) |
| 5 | $\varphi \to \psi$ | D(2-4) |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\psi$ | premisa |
| 2 | $\quad\varphi$ | pp |
| 3 | $\quad\psi$ | R(1) |
| 4 | $\varphi \to \psi$ | D(2-3) |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\varphi$ | premisa |
| 2 | $\neg\psi$ | premisa |
| 3 | $\quad\varphi \to \psi$ | pp |
| 4 | $\quad\psi$ | MP(1,3) |
| 5 | $\quad\bot$ | $\neg_E$(2,4) |
| 6 | $\neg(\varphi \to \psi)$ | $\neg_U$(3-5) |

Oni dokazuju sekvente $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$, $\psi \vdash \varphi \to \psi$ i $\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \to \psi)$.

Zavisno od vrednosti $\varphi$ i $\psi$ pri valuaciji $v$, treba da dokažemo sekvente $\varphi, \psi \vdash \varphi \to \psi$, koji sledi iz drugog dokazanog sekventa, $\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \to \psi)$, koji je dokazani treći sekvent, $\neg\varphi, \psi \vdash \varphi \to \psi$, koji sledi i iz prvog, ali i iz drugog dokazanog sekventa, i konačno $\neg\varphi, \neg\psi \vdash \varphi \to \psi$, koji sledi iz prvog dokazanog sekventa. $\Omega$

49. **Lema.** *Neka je $\varphi = \varphi(p_1, \dots, p_k)$ i $v$ valuacija. Tada $p_1^v, \dots, p_k^v \vdash \varphi^v$.*

*Dokaz.* Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po složenosti formule $\varphi$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno i neka je $\varphi$ formula složenosti $n$. Razmotrićemo tri slučaja:

$1^\circ$ $\underline{\varphi = \bot}$: Treba da dokažemo $p_1^v, \dots, p_k^v \vdash \neg\bot$, jer $\bot^v = \neg\bot$, a dokaz je:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad\bot$ | pp |
| 2 | $\neg\bot$ | $\neg_U$(1-1) |

$2^\circ$ $\underline{\varphi \text{ je slovo}}$: Kako je $\varphi = \varphi(p_1, \dots, p_k)$, mora biti $\varphi = p_i$ za neko $i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, pa treba da dokažemo $p_1^v, \dots, p_k^v \vdash p_i^v$, a dokaz je:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p_i^v$ | premisa |

$3^\circ$ $\underline{\varphi = \psi \to \theta}$: Primetimo $\mathsf{sl}(\psi), \mathsf{sl}(\theta) < n$, $\psi = \psi(p_1, \dots, p_k)$ i $\theta = \theta(p_1, \dots, p_k)$, pa možemo da primenimo indukcijsku hipotezu i imamo $p_1^v, \dots, p_k^v \vdash \psi^v$ i $p_1^v, \dots, p_k^v \vdash \theta^v$. Kako $\psi^v, \theta^v \vdash (\psi \to \theta)^v = \varphi^v$ prema lemi 48, kombinujući sa prethodna dva sekventa zaključujemo $p_1^v, \dots, p_k^v \vdash \varphi^v$.

Završili smo dokaz. $\Omega$

50. **Teorema** (Teorema potpunosti)**.** *Pretpostavimo $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Neka je $\Sigma$ skup formula i $\varphi$ jedna formula. Tada $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.*

*Dokaz.* Smer $(\Rightarrow)$ je teorema saglasnosti (teorema 40), pa dokazujemo samo $(\Leftarrow)$.

Preptostavimo $\Sigma \models \varphi$, i pretpostavimo suprotno, $\Sigma \nvdash \varphi$. Po Lindenbaumovoj teoremi (lema 46) izaberimo skup formula $\Sigma^*$ takav da važe $\Sigma^* \supseteq \Sigma$, $\Sigma^*$ je zatvoren za slova i $\Sigma^* \nvdash \varphi$. Uočimo valuaciju $v : \mathcal{P} \to \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ definisanu sa:

$$v(p_n) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{ako } p_n \in \Sigma^* \\ \mathbf{n} & \text{ako } \neg p_n \in \Sigma^* \end{cases}, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Kako je $\Sigma^*$ zatvoren za slova, bar jedna od formula $p_n$ i $\neg p_n$ pripada $\Sigma^*$, i zapravo tačno jedna od njih pripada $\Sigma^*$. Zaista, ako $p_n, \neg p_n \in \Sigma^*$ imamo dokaz:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p_n$ | premisa |
| 2 | $\neg p_n$ | premisa |
| 3 | $\bot$ | $\neg_E$(1,2) |
| 4 | $\varphi$ | EFQ(3) |

odakle $\Sigma^* \vdash \varphi$, što je kontradikcija. Prema tome, prethodna definicija valuacije $v$ je korektna. Primetimo da po definiciji važi $p_n^v \in \Sigma^*$.

Sada ćemo dokazati $v \models \Sigma^*$. Pretpostavimo suprotno, $v \not\models \Sigma^*$. Tada imamo $\theta \in \Sigma^*$ takvu da $\hat{v}(\theta) = \mathbf{n}$, pa je $\theta^v = \neg\theta$. Neka je $\theta = \theta(p_1, \ldots, p_k)$. Prema lemi 49, $p_1^v, \ldots, p_k^v \vdash \theta^v = \neg\theta$, pa $\Sigma^* \vdash \neg\theta$ jer $p_1^v, \ldots, p_k^v \in \Sigma^*$. Takođe $\Sigma^* \vdash \theta$ jer $\theta \in \Sigma^*$, pa po pravilu $\neg_E$ dobijamo $\Sigma^* \vdash \bot$. Odavde po pravilu EFQ, $\Sigma^* \vdash \varphi$. Kontradikcija. Dakle, $v \models \Sigma^*$.

Kako $\Sigma \subseteq \Sigma^*$ i $v \models \Sigma^*$, to $v \models \Sigma$, pa $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$ jer $\Sigma \models \varphi$. To znači da je $\varphi^v = \varphi$. Neka je $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_l)$. Po lemi 49, $p_1^v, \ldots, p_l^v \vdash \varphi^v = \varphi$, odakle $\Sigma^* \vdash \varphi$ jer $p_1^v, \ldots, p_l^v \in \Sigma^*$. Ovo je konačna kontradikcija. Završili smo dokaz teoreme. $\Omega$

51. **Posledica** (Slaba teorema potpunosti)**.** *Za formulu $\varphi$ važi $\vdash \varphi$ akko $\models \varphi$.*

*Dokaz.* Tvrđenje sledi prema teoremi potpunosti (teorema 50) za $\Sigma = \varnothing$ i lemi 22. $\Omega$

Još jedna verzija teoreme potpunosti je:

52. **Teorema.** *(Teorema potpunosti) Skup formula $\Sigma$ je zadovoljiv akko $\Sigma$ je konzistentan.*

*Dokaz.* Ovo je direktna posledica teoreme potpunosti (teorema 50) za $\varphi = \bot$, koristeći lemu 21. $\Omega$

## XII. Teorema kompaktnosti.

53. **Teorema** (Teorema kompaktnosti)**.** *Neka je $\Sigma$ skup formula. Skup $\Sigma$ je zadovoljiv akko svaki konačan podskup od $\Sigma$ je zadovoljiv.*

*Dokaz.* Smer ($\Rightarrow$) je očigledan. Zaista, bilo koja valuacija koja zadovoljava $\Sigma$ zadovoljava i svaki njen podskup, pa i svaki njen konačan podskup.

($\Leftarrow$) Dokažimo kontrapoziciju. Pretpostavimo $\Sigma$ nije zadovoljiv. Prema teoremi potpunosti (teorema 52), $\Sigma$ nije konzistentan, tj. $\Sigma \vdash \bot$. Dokaz ovog sekventa koristi samo konačno mnogo premisa iz $\Sigma$. Neka je $\Sigma_0$ konačan podskup od $\Sigma$ sačinjen od tih premisa. Dakle, $\Sigma_0 \vdash \bot$, tj. $\Sigma_0$ nije konzistentan, pa po teoremi potpunosti (teorema 52), $\Sigma_0$ nije ni zadovoljiv. $\Omega$