MATEMATIČKA INDUKCIJA

SLAVKO MOCONJA

Sadržaj

I. **Uvod.** Skup prirodnih brojeva je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Matematička indukcija je postupak za dokaz iskaza oblika $(\forall n)\, p(n)$, gde je $p(n)$ predikat takav da $\mathcal{U}_n = \mathbb{N}$ (predikat koji govori o prirodnim brojevima).

II. **Princip matematičke indukcije: dokaz iskaza $(\forall n)\, p(n)$.** Princip matematičke indukcije je sledeća teorema:

1. **Teorema** (Princip matematičke indukcije)**.** *Neka je* $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *predikat. Ako važe iskazi:*

(BI) $p(0)$ *i* (baza indukcije)
(IK) $(\forall n)(p(n) \to p(n+1))$, (indukcijski korak)

onda važi i iskaz $(\forall n)\, p(n)$.

Prvi uslov se zove baza indukcije, *a drugi* indukcijski korak.

Intuitivni dokaz. Pretpostavimo da su uslovi (BI) i (IK) ispunjeni. Iz (IK) implikacije $p(0) \to p(1)$, $p(1) \to p(2)$, $p(2) \to p(3)$, ...su sve tačne. Kako po (BI) važi $p(0)$, iz toga i $p(0) \to p(1)$ zaključujemo $p(1)$. Sada iz $p(1)$ i $p(1) \to p(2)$ zaključujemo $p(2)$. Iz $p(2)$ i $p(2) \to p(3)$ zaključujemo $p(3)$, itd. Ovaj postupak intuitivno objašnjava da je $(\forall n)\, p(n)$ tačan iskaz. Ω

Pogledajmo najpre primer primene prethodog principa.

2. **Primer.** Dokazati $2^n > n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Datum trenutne verzije: 15. oktobar 2023.

Rešenje. Treba da dokažemo $(\forall n)\, 2^n > n$ (tj. naš predikat $p(n)$ u ovom slučaju je $2^n > n$). Možemo da proverimo da ova nejednakost (naš predikat) važi u nekoliko konkretnih slučajeva (npr. $2^0 = 1 > 0$, $2^1 = 2 > 1$, $2^2 = 4 > 2$, $2^3 = 8 > 3$, itd.), ali naž zadatak je da dokažemo nejednakost za sve prirodne brojeve. Iskoritimo princip matematičke indukcije. Da bismo to uradili moramo da proverimo uslove principa (BI) i (IK).

(BI) Treba da dokažemo da važi $p(0)$ tj. $2^0 > 0$, i ovo je trvijalno tačno: $2^0 = 1 > 0$.

(IK) Treba da dokažemo $(\forall n)(p(n) \to p(n+1))$, tj. $(\forall n)(2^n > n \to 2^{n+1} > n+1)$. Uočimo zato proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, i dokažimo implikaciju $2^n > n \to 2^{n+1} > n+1$, tj. pretpostavimo da važi $2^n > n$ i dokažimo $2^{n+1} > n+1$. Pretpostavka $2^n > n$ naziva se *indukcijska hipoteza* i obično je kraće označavamo sa (IH). Dokažimo sada $2^{n+1} > n+1$:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n && \text{jer je po (IH) } 2^n > n \\ &\geqslant n + 1 && \text{jer je } 2^n \geqslant 1 \text{ za sve } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Prema tome dokazali smo $2^{n+1} > n+1$, što je i bio naš cilj. Ω

3. *Komentar.* Dokaz iskaza $(\forall n)\, p(n)$ koristeći princip matematičke indukcije, kao što smo videli i u prethodnom primeru, svodi se na dokaz baze indukcije (iskaza $p(0)$) i indukcijskog koraka (iskaza $(\forall n)(p(n) \to p(n+1))$). Baza indukcije obično je stvar lake provere. Za dokaz indukcijskog koraka uočavamo proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ i dokazujemo implikaciju $p(n) \to p(n+1)$. Za dokaz poslednje implikacije obično koristimo postupak dedukcije: pretpostavljamo da važi $p(n)$, što je pretpostavka koju nazivamo *indukcijska hipoteza* i obeležavamo sa (IH), i cilj je da dokažemo $p(n+1)$ pogodno koristeći (IH).

Sam zapis dokaza indukcijom obično je sledećeg oblika:

Dokažimo $(\forall n)\, p(n)$ indukcijom po n.

(BI) *Proveravamo da važi* $p(0)$.

(IK) Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno.
Pretpostavimo $p(n)$ (IH), i dokažimo $p(n+1)$.
Sada pišemo dokaz za $p(n+1)$ *pogodno koristeći (IH).*

Pogledajmo još jedan primer primene principa matematičke indukcije.

4. **Primer.** Dokazati $64 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Dokažimo $(\forall n)\, 64 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$ indukcijom po n.

(BI) Za $n = 0$ proveravamo $64 \mid 3^{2\cdot 0+2} - 8 \cdot 0 - 9$, tj. $64 \mid 0$, što je trivijalno tačno.

(IK) Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno. Pretpostavimo $64 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$ (IH), i dokažimo $64 \mid 3^{2(n+1)+2} - 8(n+1) - 9$. Imamo sledeći račun:

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+2} - 8(n+1) - 9 &= 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17 \\ &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 64n + 64 && \text{nameštamo na (IH).} \end{aligned}$$

Po (IH) 64 deli prvi sabirak, dok su drugi i treći očigledno deljivi sa 64. Prema tome, 64 deli ceo zbir, tj. $64 \mid 3^{2(n+1)+2} - 8(n+1) - 9$, što smo i želeli da dokažemo. Ω

III. **Varijanta principa indukcije: dokaz iskaza** $(\forall n \geqslant n_0)\, p(n)$**.** Princip matematičke indukcije može se iskoristiti i za dokaz iskaza oblika $(\forall n \geqslant n_0)\, p(n)$, tj. da predikat $p(n)$

važi sa skoro sve (odnosno, za sve sem prvih nekoliko) prirodnih brojeva. Odgovarajući princip je sledeći:

5. **Teorema.** *Neka je* $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *predikat i* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Ako važe iskazi:*

(BI) $p(n_0)$ *i* (baza indukcije)

(IK) $(\forall n \geqslant n_0)(p(n) \to p(n+1))$, (indukcijski korak)

onda važi i iskaz $(\forall n \geqslant n_0)\, p(n)$.

I ovaj princip intuitivno je jasan, sa potpuno istim objašnjenjem kao u dokazu prvog principa. Međutim, nije teško videti i da se prethodna varijanta svodi na originalni princip ako uočimo predikat $q(n) = p(n+n_0)$. Uradimo par primera primene prethodne varijante.

6. **Primer.** Dokazati $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ za sve $n \geqslant 1$.

Rešenje. Treba da dokažemo iskaz $(\forall n \geqslant 1)\, p(n)$ gde je $p(n)$ predikat:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

tj. zbir kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednak je $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Dokaz izvodimo indukcijom po n.

(BI) Treba da proverimo tačnost iskaza $p(1)$, tj. $1^2 = \dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}$, što je očigledno tačno.

(IK) Neka je $n \geqslant 1$ proizvoljno. Pretpostavimo:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{IH}$$

i dokažimo:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Započnimo račun s leve strane:

$$\begin{aligned}
\underbrace{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} + (n+1)^2 &\overset{\text{(IH)}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}(n(2n+1) + 6(n+1)) \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3),
\end{aligned}$$

što smo i želeli da dokažemo. Ω

7. **Primer.** Dokazati $2^n > n^2$ za sve $n \geqslant 5$.

Rešenje. Dokažimo $(\forall n \geqslant 5)\, 2^n > n^2$ indukcijom po n.

(BI) Za $n = 5$ proveravamo $2^5 > 5^2$, tj. $32 > 25$ što jeste tačno.

(IK) Neka je $n \geqslant 5$ proizvoljno, pretpostavimo $2^n > n^2$ (IH), i dokažimo $2^{n+1} > (n+1)^2$. Izvodimo sledeći račun:

$$\begin{array}{rcll} 2^{n+1} & = & 2 \cdot 2^n & \\ & > & 2 \cdot n^2 & \text{po (IH)} \\ & = & n^2 + n^2 & \\ & > & n^2 + 2n + 1 & \text{jer } n^2 > 2n+1 \text{ za } n \geqslant 5 \\ & = & (n+1)^2. & \end{array}$$

(U pretposlednjem koraku smo koristili $n^2 > 2n + 1$ akko $(n-1)^2 > 2$, što za $n \geqslant 5$ jeste tačno jer je tada $n - 1 \geqslant 4$, pa je $(n-1)^2 \geqslant 16 > 2$.) Prema tome, dokazali smo $2^{n+1} > (n+1)^2$, kao što smo i želeli. Ω

IV. **Varijanta principa indukcije: dokaz sa više indukcijskih hipoteza.** Ponekad u dokazima iskaza $(\forall n)\, p(n)$ ili $(\forall n \geqslant n_0)\, p(n)$ nije lako ustanoviti indukcijski korak, ali je moguće ustanoviti implikacije oblika $p(n) \wedge p(n+1) \to p(n+2)$ ili $p(n) \wedge p(n+1) \wedge p(n+2) \to p(n+3)$, ili opštije $p(n) \wedge p(n+1) \wedge \cdots \wedge p(n+(k-1)) \to p(n+k)$ za neko fiksirano $k \geqslant 2$. U tom slučaju takođe je moguće iskoristiti princip indukcije, uz prilagođenu bazu i korak:

8. **Teorema.** *Neka je $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, predikat, $n_0 \in \mathbb{N}$ (moguće $n_0 = 0$) i $k \geqslant 2$. Ako važe iskazi:*

(BI) $p(n_0) \wedge p(n_0+1) \wedge \cdots \wedge p(n_0+k)$ *i* (baza indukcije)

(IK) $(\forall n \geqslant n_0)(p(n) \wedge p(n+1) \wedge \cdots \wedge p(n+k-1) \to p(n_k))$, (indukcijski korak)

onda važi i iskaz $(\forall n \geqslant n_0)\, p(n)$.

I ovakav princip intuitivno je jasan, a moguće ga je izvesti iz originalnog principa uočavanjem predikata $q(n) = p(n) \wedge p(n+1) \wedge \cdots \wedge p(n+k-1)$. Primetimo da u dokazu baze moramo da proverimo k iskaza, a u dokazu koraka koristimo k hipoteza.

9. **Primer.** Dokazati $f_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ za sve $n \geqslant 1$, gde je (f_n) niz Fibinačijeviih brojeva definisan sa: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ i $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. S obzirom da je svaki Fibonačijeb broj počevši od drugog definisan koristeći prethodna dva, za dokaz koraka biće nam zgodno da imamo dve hipoteze (o prethodna dva broja). Zato je potrebno da ispitamo i dva bazna slučaja. Dakle, dokaz ćemo izvesti indukcijom po $n \geqslant 1$ sa dve indukcijske hipoteze.

(BI) Za $n = 1$ i $n = 2$ imamo $f_{1+1} = f_2 = f_1 + f_0 = 1 < \frac{7}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^1$ i $f_{2+1} = f_3 = f_2 + f_1 = 2 < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$. Dakle, baza je ispunjena.

(IK) Neka je $n \geqslant 1$ proizvoljno, pretpostavimo $f_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ i $f_{n+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$ (IH), i dokažimo $f_{n+3} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$. Računamo:

$$\begin{array}{rcll} f_{n+3} & = & f_{n+2} + f_{n+1} & \\ & < & \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{7}{4}\right)^n & \text{po (IH)} \\ & = & \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2} \left(\frac{4}{7} + \frac{16}{49}\right) & \text{nameštamo na željeni zaključak} \\ & = & \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2} \cdot \frac{44}{49} & \\ & < & \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2} & \text{jer je } \frac{44}{49} < 1. \end{array}$$

Prema tome, dokazali smo željenu nejednakost. Ω

10. **Primer.** Niz (a_n) definisan je sa $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ i $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokazati $a_n = n^2$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Dokaz izvodimo indukcijom po n sa tri indukcijske hipoteze.

(BI) Za $n = 0$, $n = 1$ i $n = 2$ imamo $a_0 = 0 = 0^2$, $a_1 = 1 = 1^2$ i $a_2 = 4 = 2^2$ direktno po definiciji.

(IK) Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno, pretpostavimo $a_n = n^2$, $a_{n+1} = (n+1)^2$ i $a_{n+2} = (n+2)^2$ (IH), i dokažimo $a_{n+3} = (n+3)^2$. Krenimo s leve strane:

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n && \text{po definiciji} \\ &= 3(n+2)^2 - 3(n+1)^2 + n^2 && \text{po (IH)} \\ &= 3n^2 + 12n + 12 - 3n^2 - 6n - 3 + n^2 \\ &= n^2 + 6n + 9 \\ &= (n+3)^2, \end{aligned}$$

kao što smo i želeli. Ω

V. **Princip potpune indukcije.** Iskaz $(\forall n)\, p(n)$ moguće je zaključiti ako znamo da za svako $n \in \mathbb{N}$ možemo zaključiti $p(n)$ koristeći sve $p(k)$ za $k < n$ kao hipoteze. Odgovarajući princip je:

11. **Teorema** (Princip potpune indukcije). *Neka je $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, predikat. Ako važi iskaz:*

$$(\forall n)((\forall k < n)\, p(k) \to p(n)),$$

onda važi i iskaz $(\forall n)\, p(n)$.

Dokaz. Pretpostavimo $(\forall n)((\forall k < n)\, p(k) \to p(n))$. Uočimo predikat:

$$q(n) = (\forall k < n)\, p(k).$$

Primetimo da se prethodna pretpostavka može zapisati kao:

$$(\forall n)(q(n) \to p(n)). \tag{$*$}$$

Za početak ćemo dokazati $(\forall n)\, q(n)$ (običnom) indukcijom po n.

(BI) Iskaz $q(0)$ je $(\forall k < 0)\, p(k)$, koji jeste formalno tačan jer je dat ograničenjem univerzalnog kvantifikatora na prazan skup.

(IK) Dokažimo $(\forall n)(q(n) \to q(n+1))$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno. Pretpostavimo indukcijsku hipotezu $q(n)$, i dokažimo $q(n+1)$. Kako $q(n)$ znači $(\forall k < n)\, p(k)$, i kako $(*)$ zajedno sa $q(n)$ povlači $p(n)$, zaključujemo $(\forall k \leqslant n)\, p(k)$, tj. $(\forall k < n+1)\, p(k)$, odnosno $q(n+1)$.

Dakle, dokazali smo $(\forall n)\, q(n)$. Dokažimo sada $(\forall n)\, p(n)$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno. Kako je $q(n+1)$, specijalno važi $p(n)$, čime završavamo dokaz. Ω

12. *Komentar.* Da bismo potpunom indukcijom dokazali $(\forall n)\, p(n)$, postupamo na sledeći način: za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ pretpostavljamo $(\forall k < n)\, p(n)$ (tj. $p(0) \wedge p(1) \wedge \cdots \wedge p(n-1)$) i cilj nam je da dokažemo $p(n)$. Primetimo da princip potpune indukcije ne zahteva bazni korak, međutim u praksi je obično potrebno razmotriti nekoliko specijalnih slučajeva koje možemo smatrati bazom.

13. **Primer.** Niz (a_n) definisan je sa $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ za $n \geqslant 3$. Dokazati $a_n = 2^n + 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Ovaj zadatak možemo diskutovati (običnom) indukcijom sa tri hipoteze, ali mi ćemo ga uraditi koristeći princip potpune indukcije. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno, pretpostavimo $(\forall k < n)\, a_k = 2^k + 1$ (IH), i dokažimo $a_n = 2^n + 1$. S obzirom na definiciju niza, razmotrićemo četiri slučaja.

1° $\underline{n = 0}$: $a_0 = 2 = 2^0 + 1$, i tvrđenje važi.

2° $\underline{n = 1}$: $a_1 = 3 = 2^1 + 1$, i tvrđenje važi.

3° $\underline{n = 2}$: $a_2 = 5 = 2^2 + 1$, i tvrđenje važi.

4° $\underline{n \geqslant 3}$: Imamo sledeći račun:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} && \text{po definiciji za } n \geqslant 3 \\ &= 2(2^{n-1}+1) + (2^{n-2}+1) - 2(2^{n-3}+1) && \text{po (IH) za } k = n-1,\ k = n-2 \\ & && \text{i } k = n-3 \text{ (primetimo da za ove} \\ & && k \text{ važi } k < n \text{ i } k \in \mathbb{N} \text{ jer } n \geqslant 3) \\ &= 2^n + 2 + 2^{n-2} + 1 - 2^{n-2} - 2 \\ &= 2^n + 1, \end{aligned}$$

pa i u ovom slučaju tvrđenje važi. Ω

14. **Primer.** Niz (a_n) definisan je sa $a_0 = 0$ i $a_n = a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + 1$ za $n \geqslant 1$. Dokazati $\log_3(n+1) \leqslant a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po n. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno, pretpostavimo $(\forall k < n)\ \log_3(k+1) \leqslant a_k$ (IH), i dokažimo $\log_3(n+1) \leqslant a_n$. S obzirom na definiciju niza, razmotrićemo dva slučaja.

1° $\underline{n = 0}$: Treba da proverimo $\log_3 1 \leqslant a_0$, tj. $0 \leqslant 0$, što je očigledno tačno.

2° $\underline{n \geqslant 1}$: Imamo sledeći račun:

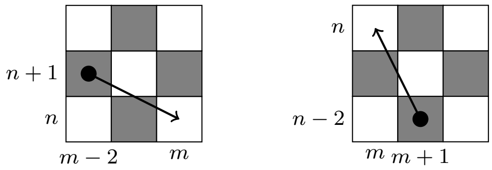
$$\begin{aligned} a_n &= a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + 1 && \text{po definiciji} \\ &\geqslant \log_3(\lfloor \tfrac{n}{3} \rfloor + 1) + 1 && \text{po (IH) jer } \lfloor \tfrac{n}{3} \rfloor < n \text{ za } n \geqslant 1 \\ &\geqslant \log_3 \tfrac{n+1}{3} + 1 && \text{jer } \lfloor \tfrac{n}{3} \rfloor + 1 \geqslant \tfrac{n+1}{3} \\ &= \log_3(n+1). \end{aligned}$$

(Iskorišćena nejednakost $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 \geqslant \frac{n+1}{3}$ ekvivalentna je sa $\frac{n}{3} - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \leqslant \frac{2}{3}$, koju lako dokazujemo ako razmotrimo slučajeve $n = 3m$, $n = 3m+1$ i $n = 3m+2$, za $m \in \mathbb{N}$.) Dokazali smo željenu nejednakost. Ω

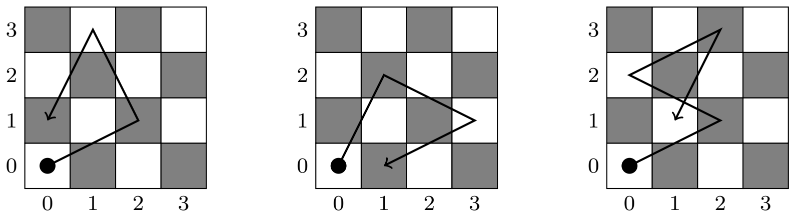
15. **Primer.** Data je šahovska tabla koja je beskonačna „u desno" i „na gore". U donjem levom uglu nalazi se skakač. Dokazati da skakač može da pređe na bilo koje drugo polje u konačno mnogo poteza.

Rešenje. Numerišimo polje u n-tom redu i m-toj koloni sa (m, n), $m, n \geqslant 0$. Prema tome, skakač je na početku na polju $(0, 0)$ i mi želimo da dokažemo da skakač može da pređe u konačno mnogo koraka na polje (m, n) za proizvoljne m i n. Dokaz ćemo izvesti potpunom indukcijom po $k = m + n$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljno, pretpostavimo da skakač može da dođe na polje (m', n') za $m' + n' < k$ (IH), i dokažimo da skakač može da dođe na polje (m, n) za $m + n = k$. Ako je $m \geqslant 2$, $m - 2 \in \mathbb{N}$ и $(m-2) + (n+1) < m + n = k$, pa po (IH) skaka; može da dođe na polje $(m-2, n+1)$. Odatle u jednom skoku dolazimo na polje (m, n). Slično, ako je $n \geqslant 2$, po (IH) skakač može da dođe na polje $(m+1, n-2)$, odakle u jednom skoku dolazi na polje (m, n).



Prema tome imamo samo nekoliko specijalnih slučajeva da proverimo. Treba da dokažemo da možemo da dođemo na polja (m, n) za $m, n < 2$, tj. do polja $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i $(1,1)$. Za $(0,0)$ nemamo šta da dokažemo (već se nalazimo na tom polju). Nizom skokova $(0,0) \mapsto (2,1) \mapsto (1,3) \mapsto (0,1)$ dolazimo do $(0,1)$, simetričnim nizom $(0,0) \mapsto (1,2) \mapsto (3,1) \mapsto (1,0)$ dolazimo do $(1,0)$, a nizom $(0,0) \mapsto (2,1) \mapsto (0,2) \mapsto (2,3) \mapsto (1,1)$ dolazimo do $(1,1)$.



Ω

16. *Komentar.* Princip potpune indukcije koristimo i za dokaze iskaza $(\forall n \geqslant n_0)\, p(n)$. Odgovarajuća varijanta principa je: Neka je $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, predikat i $n_0 \in \mathbb{N}$. Ako važi iskaz:

$$(\forall n \geqslant n_0)((\forall k : n_0 \leqslant k < n)\, p(k) \to p(n)),$$

onda važi i iskaz $(\forall n \geqslant n_0)\, p(n)$.

17. **Primer.** Dokazati da se svaki prirodan broj $n \geqslant 24$ može zapisati kao zbir petica i sedmica.

Rešenje. Izvedimo dokaz potpunom indukcijom po n. Neka je $n \geqslant 24$ proizvoljno, pretpostavimo za sve k, $24 \leqslant k < n$, važi k se može zapisati kao zbir petica i sedmica (IH), i dokažimo da se n može zapisati kao zbir petica i sedmica.

Uočimo broj $n - 5$. Jasno je $n - 5 < n$, pa ako je još $n - 5 \geqslant 24$, po (IH) $n - 5$ se može zapisati kao zbir petica i sedmica , pa se i n može zapisati kao isti taj zbir petica i sedmica plus još jedna petica. Ostaje da razmotrimo slučaj $n - 5 < 24$ (slučaj u kojem nemamo (IH)). U pitanju je pet specijalnih slučajeva $n = 24$, $n = 25$, $n = 26$, $n = 27$ i $n = 28$, pa njih direktno proveravamo:

$\underline{n=24}$: $24 = 5+5+7+7$;
$\underline{n=25}$: $25 = 5+5+5+5+5$;
$\underline{n=26}$: $26 = 5+7+7+7$;
$\underline{n=27}$: $27 = 5+5+5+5+7$;
$\underline{n=28}$: $28 = 7+7+7+7$.
Time smo završili dokaz. Ω

18. **Primer.** Dokazati da se svaki prirodan broj $n \geqslant 1$ može zapisati kao zbir različitih stepena dvojke.

Rešenje. Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po n. Neka je $n \geqslant 1$ proizvoljno, pretpostavimo da za k, $1 \leqslant k < n$, važi k se može zapisati kao zbir različitih stepena dvojke, i dokažimo da se n može zapisati kao zbir različitih stepena dvojke. Izaberimo najveće $m \in \mathbb{N}$ takvo da $2^m \leqslant n$; takvo m sigurno postoji jer je $n \geqslant 1$. Uočimo broj $n - 2^m$. Jasno je da je $n - 2^m < n$ jer je $2^m \geqslant 1$ za $m \in \mathbb{N}$, ali takođe je $n - 2^m \geqslant 0$. Ako je $n - 2^m = 0$, $n = 2^m$ i završili smo dokaz. U suprotnom, ako je $n - 2^m > 0$, tada je $1 \leqslant n - 2^m < n$, pa se (IH) može primeniti na $n - 2^m$, tj. $n - 2^m$ može se zapisati kao zbir različitih stepena dvojke: $2^{l_1} + \cdots + 2^{l_s}$. Tada je $n = 2^{l_1} + \cdots + 2^{l_s} + 2^m$. Dokažimo još da se stepeni u ovom zapisu ne ponavljaju. Već znamo da su $l_1, \ldots, l_s$ međusobno različiti, pa treba samo da prodiskutujemo zašto su oni različiti od m. Pretpostavimo suprotno, neko l_i jednako je m. Tada je $n = 2^{l_1} + \cdots + 2^{l_s} + 2^m \geqslant 2^{l_i} + 2^m = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$, što je u suprotnosti sa izborom broja m kao najvećeg takvog da $2^m \leqslant n$. Prema tome, nijedno l_i nije jednako m, čime završavamo dokaz. Ω

VI. **Greške u dokazima indukcijom.** U postupku dokaza indukcije uvek treba proveriti i bazu i korak. Korak se retko zaboravlja, ali se može desiti da propustimo da proverimo bazu. U tom slučaju se može desiti da dođemo do netačnog zaključka. Npr. (očigledno netačan) iskaz $(\forall n)\, 2 \mid 2n+1$ ima tačan korak! Zaista, $(\forall n)(2 \mid 2n+1 \to 2 \mid 2n+3)$ jeste tačan iskaz jer je implikacija za svako n oblika **n** $\to$ **n**. Baza, $2 \mid 1$, naravno je netačna, pa je primena postupka indukcije nemoguća. Ipak, najčešće greške su greške u dokazu koraka.

19. **Primer.** Uočimo sledeći „dokaz" indukcijom iskaza $(\forall n)\, n^2 \geqslant 2n$:
(BI) Za $n = 0$, $0^2 \geqslant 2 \cdot 0$, *tj.* $0 \geqslant 0$ *očigledno važi.*
(IK) Neka je $n \in \mathbb{N}$ *proizvoljno, pretpostavimo* $n^2 \geqslant 2n$ *(IH), i dokažimo* $(n+1)^2 \geqslant 2(n+1)$. *Izvodimo sledeći račun:*

$$\begin{array}{rcll} (n+1)^2 & = & n^2 + 2n + 1 & \\ & \geqslant & 2n + 2n + 1 & \textit{po (IH)} \\ & \geqslant & 2n + 1 + 1 & \textit{jer } 2n \geqslant 1 \\ & = & 2(n+1), & \end{array}$$

što smo i želeli da dokažemo.

Gde je greška u prethodnom dokazu?

Rešenje. U koraku, u izvođenju druge nejednakosti iskoristili smo $2n \geqslant 1$ koja jeste tačna za skoro sve prirodne n, i nije tačna jedino za $n = 0$. Zapravo korak za $n = 0$ i ne važi jer je iskaz $0^2 \geqslant 2 \cdot 0$ tačan, ali iskaz $1^2 \geqslant 2 \cdot 1$ nije. Prema tome ni polazni iskaz $(\forall n)\, n^2 \geqslant 2n$ nije tačan, jer ne važi za $n = 1$. Kako $2^2 \geqslant 2 \cdot 2$ važi, ali i kako gore ispisan korak važi za $n \geqslant 2$, možemo da zaključimo da važi $(\forall n \geqslant 2)\, n^2 \geqslant 2n$. Ω

20. **Primer.** Uočimo sledeći „dokaz" potpunom indukcijom iskaza $(\forall n)\, 2 \mid n$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno, pretpostavimo da je $(\forall k < n)\, 2 \mid k$ (IH), i dokažimo $2 \mid n$. Uočimo broj $n - 2$. Kako je $n - 2 < n$, po (IH) važi $2 \mid n - 2$, pa $2 \mid (n-2) + 2 = n$, što smo i želeli da dokažemo.

Iskaz $(\forall n)\, 2 \mid n$ tvrdi da je svaki prirodan broj paran, i jasno je netačan. Gde je greška u prethodnom dokazu?

Rešenje. Indukcijska hipoteza može da se primeni na brojeve $k < n$ koji su prirodni (iako to često eksplicitno ne naglašavamo). Broj $n - 2$ nije uvek prirodan, tj. prirodan je akko $n \geqslant 2$, pa slučajeve $n = 0$ i $n = 1$ moramo posebno da razmotrimo, dok smo ih u gornjem dokazu zaboravili. I naravno, za $n = 1$ tvrđenje ne važi. Ω

VII. **Dokaz teoreme 1 koristeći princip minimuma.** Princip minimuma je sledeća, smatramo očigledna, osobina skupa prirodnih brojeva:

21. *Zapažanje* (Princip minimuma). Svaki neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima najmanji element.

Dokaz teoreme 1. Pretpostavimo da su tačni iskazi $p(0)$ i $(\forall n)(p(n) \to p(n+1))$, i pretpostavimo suprotno, iskaz $(\forall n)\, p(n)$ nije tačan. Tada je skup $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg p(n)\}$ neprazan podskup od $\mathbb{N}$, pa po principu minimuma neka je $m \in S$ najmanji element u S. Kako je $p(0)$ tačan iskaz, $0 \notin S$, pa $m \neq 0$. Zato je $m - 1 \in \mathbb{N}$, i kako je m najmanji u S, zaključujemo da $m - 1 \notin S$, tj. važi $p(m-1)$. Kako je tačan iskaz $(\forall n)(p(n) \to p(n+1))$, specijalno tačan je i $p(m-1) \to p(m)$. Kako su tačni $p(m-1)$ i $p(m-1) \to p(m)$, tačan je i $p(m)$, pa $m \notin S$. Dakle, sa jedne strane $m \in S$, a upravo smo zaključili $m \notin S$. Kontradikcija. Ω