FUNKCIJE

SLAVKO MOCONJA

Sadržaj

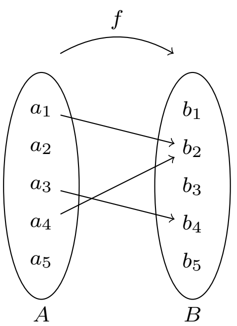
I. Funkcionalne relacije 1
II. Funkcije 3
III. 1-1 i na funkcije, bijekcije 4
IV. Egzistencija inverzne funkcije 5
V. Direktna i inverzna slika skupa 6

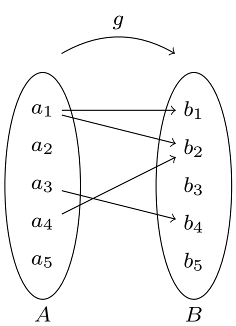
I. **Funkcionalne relacije.**

1. **Definicija.** Relacija $f \subseteq A \times B$ je *funkcionalna* ili *parcijalna funkcija* ako:

$$(\forall a \in A)(\forall b_1, b_2 \in B)(a\ f\ b_1 \wedge a\ f\ b_2 \rightarrow b_1 = b_2).$$

Na grafu to znači da iz svakog elementa skupa A izlazi najviše jedna f-strelica ka B. Pogledajmo sliku:





Relacija f jeste funkcionalna; iz elemenata a_1, a_3, a_4 izlazi po jedna strelica dok iz elemenata a_2, a_5 ne izlazi nijedna. Sa druge strane, relacija g nije funkcionalna jer iz elementa a_1 izlaze dve strelice.

2. **Definicija.** Neka je $f \subseteq A \times B$ funkcionalna relacija.

- Ako iz $a \in A$ izlazi strelica ka (jedinstvenom) elementu $b \in B$, pišemo $b = f(a)$ i kažemo da je b *slika* elementa a. U tom slučaju, ako iz a izlazi strelica, pišemo i $f(a)\downarrow$ i čitamo *$f(a)$ je definisano*.

Datum trenutne verzije: 18. decembar 2023.

- Ako iz $a \in A$ ne izlazi strelica pišemo $f(a) \uparrow$ i čitamo $f(a)$ *je nedefinisano*.
- *Domen* funkcionalne relacije f je skup $\mathrm{Dom}(f) = \{a \in A \mid f(a) \downarrow\}$ – skup svih elemenata iz kojih izlazi strelica.
- *Slika* funkcionalne relacije f je skup $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in \mathrm{Dom}(f)\}$ – skup svih slika elemenata iz domena.

U gornjem primeru je $f(a_1) = b_2$, $f(a_2) \uparrow$, $f(a_3) = b_4$, $f(a_4) = b_2$, $f(a_5) \uparrow$, $\mathrm{Dom}(f) = \{a_1, a_3, a_4\}$ i $\mathrm{Im}(f) = \{b_2, b_4\}$.

3. **Primer.** Uočimo sledeće relacije na skupu $\mathbb{R}$:

- $f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
- $g = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
- $h = \{(x^2, x) \mid x \geqslant 0\}$;
- $k = \{(x^2, x) \mid x < -2\}$.

Relacija f jeste funkcionalna. Naime, ako $a\ f\ b_1$ i $a\ f\ b_2$, onda za neko $x \in \mathbb{R}$ važi $a = x$, $b_1 = x^2$ i $b_2 = x^2$, pa je $b_1 = b_2$. Time smo proverili definiciju funkcionalnosti. Očigledno je za svako $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, pa je $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Sa druge strane, $\mathrm{Im}(f) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$.

Ako $a\ g\ b_1$ i $a\ g\ b_2$, onda za neke $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ imamo $a = x_1^2$, $b = x_1$, $a = x_2^2$ i $b = x_2$. Odatle je $x_1^2 = x_2^2$, što ne povlači obavezno $x_1 = x_2$, tj. $b_1 = b_2$. Npr. važi $4\ g\ 2$ i $4\ g\ -2$, ali $2 \neq -2$, pa relacija g nije funkcionalna.

Ako $a\ h\ b_1$ i $a\ h\ b_2$, onda za neke $x_1, x_2 \geqslant 0$ imamo $a = x_1^2$, $b = x_1$, $a = x_2^2$ i $b = x_2$. Ponovo je $x_1^2 = x_2^2$, ali kako su $x_1, x_2 \geqslant 0$, sada važi $x_1 = x_2$, tj. $b_1 = b_2$. Prema tome h jeste funkcionalna. Broj a pripada domenu akko je kvadrat nenegativnog broja, pa je $\mathrm{Dom}(h) = [0, +\infty)$. Za $a \in \mathrm{Dom}(h)$, lako vidimo da je $h(a) = \sqrt{a}$ (jer je a kvadrat broja $h(a)$ koji je nenegativan). Prema tome i $\mathrm{Im}(h) = [0, +\infty)$.

Slično kao u prethodnom pasusu, ako $a\ k\ b_1$ i $a\ k\ b_2$, onda za neke $x_1, x_2 < -2$ imamo $a = x_1^2$, $b = x_1$, $a = x_2^2$ i $b = x_2$. Odatle je $x_1^2 = x_2^2$, ali kako su $x_1, x_2 < -2$, opet važi $x_1 = x_2$, tj. $b_1 = b_2$. Prema tome i k jeste funkcionalna. Broj a pripada domenu akko je kvadrat broja manjeg od -2, pa je $\mathrm{Dom}(k) = (4, +\infty)$. Za $a \in \mathrm{Dom}(k)$, lako vidimo da je $k(a) = -\sqrt{a}$ (jer je a kvadrat broja $k(a) < -2$). Prema tome, $\mathrm{Im}(k) = (-\infty, -2)$.

4. **Tvrđenje.** *Neka su $f \subseteq A \times B$ i $g \subseteq B \times C$ funkcionalne relacije. Znamo $g \circ f \subseteq A \times C$.*

(i) Relacija $g \circ f$ je funkcionalna.

(ii) $g \circ f(a) \downarrow$ akko $f(a) \downarrow$ i $g(f(a)) \downarrow$, i tada $g \circ f(a) = g(f(a))$.

Dokaz. (i) Neka $a\ g \circ f\ c_1$ i $a\ g \circ f\ c_2$. Tada za neke $b_1, b_2 \in B$ imamo $a\ f\ b_1\ g\ c_1$ i $a\ f\ b_2\ g\ c_2$. Iz $a\ f 1$ i $a\ f\ b_2$ zaključujemo $b_1 = b_2 =: b$ jer je f funkcionalna. Sada imamo $b\ g\ c_1$ i $b\ g\ c_2$, odakle zaključujemo i $c_1 = c_2$ jer je i g funkcionalna. Dakle, i $g \circ f$ je funkcionalna.

(ii) Očigledno. Ω

5. **Zadatak.** Dati primere relacija $f \subseteq A \times B$ i $g \subseteq B \times C$ takve da:

- $g \circ f$ jeste, ali f i g nisu funkcionalne;
- f i $g \circ f$ jesu, ali g nije funkcionalna;

- g i $g \circ f$ jesu, ali f nije funkcionalna.

6. *Komentar.* Neka je $f \subseteq A \times B$. Relacija $f^{-1} \subseteq B \times A$ je funkcionalna po definiciji akko $(\forall b)(\forall a_1, a_2 \in A)(b\, f^{-1}\, a_1 \wedge b\, f^{-1}\, a_2 \to a_1 = a_1)$, što je ekvivalentno sa:

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(\forall b \in B)(a_1\, f\, b \wedge a_2\, f\, b \to a_1 = a_2).$$

Čak i ako je f funkcionalna, f^{-1} ne mora biti. Npr. funkcionalna relacija f skicirana na početku odeljka nema funkcionalni inverz jer je $f^{-1} = \{(b_2, a_1), (b_2, a_4), (b_4, a_3)\}$, pa iz b_2 izlaze dve f^{-1}-strelice.

II. **Funkcije.**

7. **Definicija.** Relacija $f \subseteq A \times B$ je *funkcija*, u oznaci $f : A \to B$, ako je f funkcionalna i $\mathrm{Dom}(f) = A$. Drugim rečima, ako iz svakog elementa $a \in A$ izlazi tačno jedna strelica ka B, tj. za svako $a \in A$, $f(a) \downarrow$.

Kada govorimo o funkciji $f : A \to B$, skup B zovemo *kodomen* funkcije f.

8. *Komentar.* Kada govorimo o jednakosti dve funkcije uvek ćemo podrazumevati da govorimo o funkcijama sa istim domenom i kodomenom. Preciznije, funkcije $f : A \to B$ i $g : A' \to B'$ su jednake ako $A = A'$, $B = B'$, i f i g su jednake kao relacije.

9. **Tvrđenje.** *Ako je $f : A \to B$ i $g : B \to C$, onda je $g \circ f : A \to C$.*

Dokaz. Prema tvrđenju 4 kompozicija $g \circ f$ jeste funkcionalna relacija. Takođe, za $a \in A$, $g \circ f(a) \downarrow$ akko $f(a) \downarrow$ i $g(f(a)) \downarrow$. Kako je $\mathrm{Dom}(f) = A$ to $f(a) \downarrow$, a kako je $\mathrm{Dom}(g) = B$ to i $g(f(a)) \downarrow$, pa prema tome i $g \circ f(a) \downarrow$. Dakle, $\mathrm{Dom}(g \circ f) = A$ i zaključujemo $g \circ f : A \to C$. Ω

10. **Definicija.** *Identiteta* na skupu A je funkcija $\mathrm{id}_A : A \to A$ definisana sa $\mathrm{id}_A(a) = a$ za sve $a \in A$. Ako je $A \subseteq B$, *inkluzija iz A u B* je funkcija $i_{A,B} : A \to B$ definisana sa $i_{A,B}(a) = a$ za sve $a \in A$.

Ako je $f : A \to B$ primetimo da su definisane kompozicije $\mathrm{id}_B \circ f : A \to B$ i $f \circ \mathrm{id}_A : A \to B$, i obe su jednake sa f. Ako je dodatno $C \subseteq A$, definisana je kompozicija $f \circ i_{C,A} : C \to B$ i za svako $c \in C$ važi $f \circ i_{C,A}(c) = f(c)$; funkcija $f \circ i_{C,A}$ zove se *restrikcija* funkije f na C i češće se obeležava sa $f_{\restriction C}$.

Ponekad će biti zgodno i da smanjimo kodomen funkcije $f : A \to B$. Preciznije, ako je skup D takav da $\mathrm{Im}(f) \subseteq D \subseteq B$, imamo korektno definisanu funkciju $f' : A \to D$ sa $f'(a) = f(a)$ za sve $a \in A$. Ovako definisana funkcija ponekad se zove *korestrikcija na* D. Najčešće, kada posmatramo neku korekstrikciju, u pitanju je korestrikcija na sliku (tj. $D = \mathrm{Im}(f)$).

11. *Komentar.* Formalno, prazna relacija jeste funkcija $\varnothing : \varnothing \to B$ za bilo koje B. Međutim, kada govorimo o funkciji $f : A \to B$ uvek ćemo implicitno pretpostavljati da je $A \neq \varnothing$ (što povlači i da je f neprazna relacija jer $\mathrm{Dom}(f) = A$, kao i $B \neq \varnothing$ jer za svako $a \in A$, a bar jedno takvo postoji, $f(a) \in B$).

III. **1-1 i na funkcije, bijekcije.**

12. **Definicija.** Neka je $f : A \to B$. Funkcija f je:

- *1-1* ili *injekcija* ako:
$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)),$$
ili, po kontrapoziciji evivalentno:
$$(\forall a_1, a_2 \in A)(f(a_1) = f(a_2)' \to a_1 = a_2);$$
- *na* ili *surjekcija* ako $\mathrm{Im}(f) = B$, tj. ako:
$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)\ f(a) = b;$$
- *bijekcija* ako je 1-1 i na.

13. *Komentar.* Primetimo da je $\mathrm{id}_A : A \to A$ uvek bijekcija, dok je, za $A \subseteq B$, funkcija $i_{A,B} : A \to B$ uvek 1-1.

Neka je $f : A \to B$ funkcija. Primetimo da je korestrikcija funkcije f na $\mathrm{Im}(f)$, tj. funkcija $f' : A \to \mathrm{Im}(f)$ data sa $f'(a) = f(a)$ za sve $a \in A$, uvek na. Takođe, ako je dodatno f 1-1, korestrikcija f' je bijekcija.

14. **Tvrđenje.** *Neka $f : A \to B$ i $g : B \to C$; znamo $g \circ f : A \to C$. Tada:*

(i) ako su f i g 1-1, onda je i $g \circ f$ 1-1;
(ii) ako su f i g na, onda je i $g \circ f$ na;
(iii) ako su f i g bijekcije, onda je i $g \circ f$ bijekcija;
(iv) ako je $g \circ f$ 1-1, onda je i f 1-1;
(v) ako je $g \circ f$ na, onda je i g na.

Dokaz. (i) Neka su $a_1, a_2 \in A$ različiti: $a_1 \neq a_2$. Tada je i $f(a_1) \neq f(a_2)$ jer je f 1-1. Odatle je i $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ jer je g 1-1. Dakle, $g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$. Prema tome, $g \circ f$ je 1-1.

(ii) Neka je $c \in C$ proizvoljan element. Kako je g na, $c = g(b)$ za neko $b \in B$. Kako je f na, $b = f(a)$ za neko $a \in A$. Prema tome je $c = g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a)$. Dakle, $g \circ f$ je na.

(iii) Ovo sada sledi direktno iz (i) i (ii).

(iv) Neka su $a_1, a_2 \in A$ različiti: $a_1 \neq a_2$. Tada je i $g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$ jer je $g \circ f$ 1-1, tj. $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$. Kako je g funkcija, odatle je $f(a_1) \neq f(a_2)$. Dakle, f je 1-1.

(v) Neka je $c \in C$ proizvoljno. Tada je $c = g \circ f(a)$ za neko $a \in A$, tj. $c = g(f(a))$. Dakle, g je na. Ω

15. **Primer.** U (iv) i (v) iz prethodnog primera ne možemo ništa više reći. Npr. funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa $f(n) = n + 1$ jeste 1-1, ali nije na (jer $0 \notin \mathrm{Im}(f)$), funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa $g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{ako } n > 0 \\ 0 & \text{ako } n = 0 \end{cases}$ jeste na, ali nije 1-1 (jer $g(0) = g(1)$). Ipak, kako je $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n+1) = n$, funkcija $g \circ f$ jednaka je sa $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, pa je bijekcija.

16. **Tvrđenje.** *Neka je $f : A \to B$. Svakako, f^{-1} je relacija između B i A.*

(i) f^{-1} *je funkcionalna relacija akko* f *je 1-1;*
(ii) $f^{-1} : B \to A$ *akko* f *je bijekcija.*

Dokaz. (i) Ovo sledi jer f^{-1} je funkcionalna relacija akko $(\forall b \in B, a_1, a_2 \in A)(b\ f^{-1}\ a_1 \wedge b\ f^{-1}\ a_2 \to a_1 = a_2)$, akko $(\forall b \in B, a_1, a_2 \in A)(a_1\ f\ b \wedge a_2\ f\ b \to a_1 = a_2)$, akko $(\forall a_1, a_2 \in A)(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$, akko f je 1-1.

(ii) Ako $f^{-1} : B \to A$, prema (i) f je 1-1, ali i $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Dom}(f^{-1}) = B$, tj. f je na. Ako je f bijekcija, f^{-1} je funkcionalna prema (i), a takođe je $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) = A$ jer je f na. Ω

17. *Komentar.* Pretpostavimo $f : A \to B$ je bijekcija, tj. $f^{-1} : B \to A$. Primetimo $f(a) = b$ akko $f^{-1}(b) = a$. Odavde lako vidimo $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ i $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Primetimo i da je tada f^{-1} takođe i bijekcija (jer je $(f^{-1})^{-1} = f : A \to B$).

IV. **Egzistencija inverzne funkcije.**

18. **Definicija.** Neka je $f : A \to B$. Funkcija $g : B \to A$ je:
- *levi inverz* od f ako je $g \circ f = \mathrm{id}_A$;
- *desni inverz* od f ako je $f \circ g = \mathrm{id}_B$;
- *inverz* od f ako je $g \circ f = \mathrm{id}_A$ i $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

19. *Komentar.* Jasno je da ako je g levi (odn. desni) inverz funkcije f, onda je f desni (odn. levi) inverz funkcije g, kao i da ako je g inverz od f onda je f inverz od g.

Ako je g levi inverz od f, tj. ako je $g \circ f = \mathrm{id}_A$, prema tvrđenju 14 f mora biti 1-1 (a g mora biti na). Slično ako je g desni inverz od f, f mora biti na (a g mora biti 1-1). Ako je g inverz od f, obe moraju biti bijekcije. Pokazaćemo da ovi potrebni uslovi zaista jesu i dovoljni za egzistenciju odgovarajućeg inverza.

20. **Teorema.** *Neka je* $f : A \to B$*. Tada:*
(i) f *ima levi inverz akko* f *je 1-1;*
(ii) f *ima desni inverz akko* f *je na;*
(iii) f *ima inverz akko* f *je bijekcija. U tom slučaju, inverz je jedinstven i jendak je* f^{-1}*.*

Dokaz. (i) U prethodnom komentaru videli smo da je uslov 1-1 potreban za egzistenciju levog inverza, pa dokažimo da je i dovoljan. Neka je $f : A \xrightarrow{1-1} B$. Tada je relacija f^{-1} funkcionalna. Izaberimo proizvoljno $a_0 \in A$. (Setimo se da implicitno pretpostavljamo, kada govorimo o funkcijama, da je domen neprazan, pa a_0 možemo da izaberemo.) Definišimo $g : B \to A$ na sledeći način:

$$g(b) := \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{ako } b \in \mathrm{Im}(f) \\ a_0 & \text{ako } b \notin \mathrm{Im}(f) \end{cases}, \text{ za } b \in B.$$

(Naglasimo da oznaku $f^{-1}(b)$ smemo da koristimo jer je f^{-1} funkcionalna relacija.) Primetimo da je funkcija g definisana za svako $b \in B$, jer ako $b \in \mathrm{Im}(f)$, onda $f^{-1}(b) \downarrow$. Za proizvoljno $a \in A$ imamo $g \circ f(a) = g(f(a)) = f^{-1}(f(a)) = a$, gde druga jednakost važi jer očigledno $f(a) \in \mathrm{Im}(f)$. Dakle, $g \circ f = \mathrm{id}_A$, pa f ima levi inverz.

(ii) Videli smo da je uslov na potreban da f ima desni inverz, pa dokazujemo da je dovoljan. Neka je $f : A \xrightarrow{na} B$. Za $b \in B$ uočimo skup $S_b := \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Kako je f na, svaki od skupova S_b je neprazan. Definišimo $g : B \to A$ na sledeći način:

$$g(b) := \text{neki element skupa } S_b, \text{ za } b \in B.$$

Kako je $g(b) \in S_b$, to je $f(g(b)) = b$, tj. $f \circ g(b) = b$. Dakle, $f \circ g = \mathrm{id}_B$, pa f ima desni inverz.

(iii) U prethodnom komentaru smo videli da je biti bijekcija potreban uslov da f ima inverz, pa dokazujemo da je i dovoljan. Neka je $f : A \xrightarrow{bij.} B$. Prema tvrđenju 16, $f^{-1} : B \to A$, a prema komentaru 17, f^{-1} zadovoljava uslove da bude inverz od f. Dakle, f ima inverz. Ostaje da dokažemo da je on jedinstven. Neka je $g : B \to A$ inverz od f: $g \circ f = \mathrm{id}_A$ i $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Tada je:

$$g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A \circ f^{-1} = f^{-1},$$

što dokazuje jedinstvenost inverza. Ω

21. *Komentar.* U dokazu jedinstvenosti u (iii), u argumentu nismo koristili jednakost $f \circ g = \mathrm{id}_B$, pa smo zapravo dokazali više: ako je f bijekcija, ona ima jedinstveni levi inverz. Slično možemo da dokažemo i: ako je f bijekcija, ona ima jedinstveni desni inverz.

22. **Primer.** Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa $f(n) = n + 1$ jeste 1-1 (ali nije na). Primetimo da su sve funkcije $g_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$, date sa:

$$g_a(n) := \begin{cases} n-1 & \text{ako } n > 0 \\ a & \text{ako } n = 0 \end{cases}, \text{ za } n \in \mathbb{N},$$

njeni levi inverzi. (Štaviše, nije teško videti da su to svi njeni levi inverzi).

Funkcija $g_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jeste na (ali nije 1-1). Funkcija f jeste jedan njen desni inverz, ali i funkcija $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa $f'(n) := \begin{cases} n+1 & \text{ako } n > 0 \\ 0 & \text{ako } n = 0 \end{cases}$, za $n \in \mathbb{N}$ je još jedan njen desni inverz. (Štaviše, lako vidimo da su joj to jedina dva desna inverza.)

23. *Komentar.* Naglasimo još i da smo u dokazu (ii) u gornjoj teoremi, kada smo definisali:

$$g(b) := \text{neki element skupa } S_b, \text{ za } b \in B,$$

morali odgovarajući element skupa S_b da izaberemo. Ovakav izbor ne možemo da uradimo bez aksiome izbora. Štaviše, tvrđenje da svaka na funkcija ima desni inverz ekvivalentno je aksiomi izbora.

V. Direktna i inverzna slika skupa.

24. **Definicija.** Neka je $f : A \to B$, $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$.

- *Direktna slika* skupa X je skup:

$$f[X] := \{f(a) \mid a \in X\},$$

  dakle skup svih slika elemenata iz X. Primetimo $f[X] \subseteq B$.

- *Inverzna slika* skupa Y je skup:

$$f^{-1}[Y] := \{a \in A \mid f(a) \in Y\},$$

dakle skup svih elemenata domena koji se slikaju unutar Y. Primetimo $f^{-1}[Y] \subseteq A$.

25. *Komentar.* (i) Prema definiciji inverzna slike direktno važi $a \in f^{-1}[Y] \Leftrightarrow f(a) \in Y$.
(ii) Prema definiciji direktne slike direktno važi $a \in X \Rightarrow f(a) \in f[X]$. Obratna implikacija ne mora da važi. Naime, može se desiti da imamo $a \notin X$, $a' \in X$ i $f(a) = f(a')$.
(iii) Prema prethodnoj rečenici, ako je f 1-1 onda važi $a \in X \Leftrightarrow f(a) \in f[X]$.
Prethodne hapomene možemo slobodno koristiti.

26. **Zadatak.** Neka je $f : A \to B$, $X, X_1, X_2 \subseteq A$, $Y, Y_1, Y_2 \subseteq B$. Dokazati:
(i) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f[X_1] \subseteq f[X_2]$;
(ii) $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow f^{-1}[Y_1] \subseteq f^{-1}[Y_2]$;
(iii) $f^{-1}[f[X]] \supseteq X$; ako je f 1-1, važi jednakost;
(iv) $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$; ako je f na, važi jednakost;
(v) $f[X_1 \cup X_2] = f[X_1] \cup f[X_2]$;
(vi) $f[X_1 \cap X_2] \subseteq f[X_1] \cup f[X_2]$; ako je f 1-1, važi jednakost;
(vii) $f[X_1 \smallsetminus X_2] \supseteq f[X_1] \smallsetminus f[X_2]$; ako je f 1-1, važi jednakost;
(viii) $f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$;
(ix) $f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$;
(x) $f^{-1}[Y_1 \smallsetminus Y_2] = f^{-1}[Y_1] \smallsetminus f^{-1}[Y_2]$.