ДС1: ЗАДАЦИ ИЗ ЛОГИКЕ - ЗАГОНЕТКЕ

СЛАВКО МОЦОЊА

Садржај

1. Задаци

Острво Истинозбораца и Лажова је следећи логички контекст. Претпоставимо да се налазимо на острву на коме живе два племена: племе Истинозбораца и племе Лажова. Сваки становник острва налази се у тачно једном од ових племена. Становници острва по свему су исти, осим што Истинозборци увек говоре истину, а Лажови увек лажу.

***

1. Налазимо се у друштву три становника A, B и C Острва Истинозбораца и Лажова. Познато је да су A и B изјавили следеће:
A: Бар један од B и C је Истинозборац.
B: A и C су Лажови.
Да ли можемо да кажемо којим племенима припадају A, B и C?

2. Нека је a истинитосна вредност исказа „A је Истинозборац”, где је A особа са Острва Истинозбораца и Лажова. Ако је познато да је A изјавио исказ тачности p, доказати да је $a = p$.

3. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Истинозбораца и Лажова. Познато је да су неки од њих дали следеће исказе:
A: B и F су Лажови.
B: Бар један од C и D је Лажов.
C: E је Лажов или је F Истинозборац.
D: Ако је E Лажов, онда је F Истинозборац.
E: F је Лажов, а C је Истинозборац.
Којим племенима припадају ови становници?

4. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Истинозбораца и Лажова. Познато је да су неки од њих дали следеће исказе:
A: E и F нису из истог племена.
B: F и E су из истог племена.
C: Тачно један од A и E је Лажов.
D: E је Лажов, а B је Истинозборац.
E: Или је B Лажов или је D Истинозборац.
Којим племенима припадају ови становници?

5. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Истинозбораца и Лажова. Познато је да су неки од њих дали следеће исказе:

A: Ако је F Лажов, онда је E Истинозборац.
B: Ако је C Лажов, онда је и A Лажов.
C: Ако је F Лажов, онда је и B Лажов.
D: B је Истинозборац, а F је Лажов.
E: A и B нису из истог племена.

Којим племенима припадају ови становници?

6. Да ли постоји исказ који ниједан становник на Острву Истинозбораца и Лажова не може да изговори?

7. Које питање странац на Острву Истинозбораца и Лажова треба да постави становнику A како би из његовог одговора са сигурношћу могао да закључи из ког је A племена? Становнику A дозвољено је да одговори само са да или не.

8. Странац на Острву Истинозбораца и Лажова среће особе A и B и пита особу A „Да ли сте обоје Лажови?”. Особа A је дала један од одговора да или не, и странац је на основу тога закључио којим племенима припадају A и B. Којим племенима припадају A и B, и шта је особа A одговорила?

9. Странац на Острву Истинозбораца и Лажова среће особе A и B и пита особу A „Да ли сте обоје Лажови?”. Особа A је дала један од одговора да или не, али странац не може да закључи којим племенима припадају A и B, па поставља друго питање особи A „Да ли сте из истог племена?”. Особа A поново даје одговор да или не. Овога пута странац је закључио којим племенима припадају A и B. Којим племенима припадају A и B, и шта је особа A одговорила?

10. Странац на Острву Истинозбораца и Лажова жели да сазна да ли се негде на острву може купити опрема за пецање. Наилази на становника острва A. Које (једно) питање странац треба да постави особи A како би из његовог одговора сазнао шта га занима? Познато је да ће A одговорити са да или не.

***

На *Острву Шпијуна и Лажова* живе два племена: Шпијуни и Лажови. Као и раније, сваки становник је у тачно једном од племена, Лажови увек лажу, а Шпијуни говоре истину када причају са особом из свог племена, а лажу када причају са особом из другог племена. Осим ових особина, становници се ни по чему другом не разликују.

***

11. Налазимо се у друштву четири становника A, B, C и D Острва Шпијуна и Лажова. Познато је следеће:

A је рекао B-у: Бар један од C и D је Шпијун.
B је рекао C-у: A је Шпијун или је D Лажов.
C је рекао D-у: Бар један од B и A је Лажов.

Да ли можемо да одредимо којим племенима припадају A, B, C и D?

12. Нека су a и b истинитосне вредности исказа „A је Шпијун.” и „B је Шпијун.”, где су A и B особе са Острва Шпијуна и Лажова. Ако је познато да је A рекао B-у исказ тачности p, доказати да је $a \wedge b = p$.

13. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Шпијуна и Лажова. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: Ако је C Шпијун, онда је F Лажов.
B је рекао C-у: D је Шпијун или је A Лажов.
C је рекао D-у: Бар један од F и B је Лажов.
D је рекао E-у: Ако је A Шпијун, онда је и F Шпијун.

Којим племенима припадају ови становници?

14. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Шпијуна и Лажова. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: F је Шпијун, а C је Лажов.
B је рекао C-у: Ако је A Лажов, онда је и F Лажов.
C је рекао D-у: B и E су из истог племена.
D је рекао E-у: F је Шпијун или је C Лажов.

Којим племенима припадају ови становници?

15. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Шпијуна и Лажова. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: Ако је C Лажов, онда је и E Лажов.
B је рекао C-у: D је Шпијун, а A је Лажов.
C је рекао D-у: E и F су Шпијуни.
D је рекао E-у: Бар један од A и C је Лажов.

Којим племенима припадају ови становници?

16. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Шпијуна и Лажова. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: C и E нису из истог племена.
B је рекао C-у: Тачно један од D и F је Лажов.
C је рекао D-у: Ако је A Шпијун, онда је F Лажов.
D је рекао E-у: C и A су Шпијуни.

Којим племенима припадају ови становници?

17. Наћи пример исказа који на Острву Шпијуна и Лажова:

1° ниједан Шпијун не може да каже (али Лажов може);
2° ниједан Лажов не може да каже (али Шпијун може);
3° ниједан Шпијун не може да чује (али Лажов може);
4° ниједан Лажов не може да чује (али Шпијун може);
5° нико не може да каже.

***

На *Острву Истинозбораца и Шпијуна* живе племе Истинозбораца које као и раније увек говори истину, и племе Шпијуна, које као и раније говоре истину само особама из свог племена.

***

18. Нека су a и b истинитосне вредности исказа „A је Истинозборац." и „B је Истинозборац.", где су A и B особе са Острва Истинозбораца и Шпијуна. Ако је познато да је A рекао B-у исказ тачности p, доказати да је $b \to a = p$.

19. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Истинозбораца и Шпијуна. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: E је Истинозборац или је C Шпијун.
B је рекао C-у: A је Истинозборац, а D је Шпијун.
C је рекао D-у: F и A су Шпијуни.
D је рекао E-у: Или је A Истинозборац или је F Шпијун.

Којим племенима припадају ови становници?

20. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Истинозбораца и Шпијуна. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: E је Шпијун, а C је Истинозборац.
B је рекао C-у: E и F су Истинозборци.

C је рекао D-у: B и E нису из истог племена.
Којим племенима припадају ови становници?

21. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Истинозбораца и Шпијуна. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: E је Истинозборац, а D је Шпијун.
B је рекао C-у: Ако је A Истинозборац, онда је и D Истинозборац.
C је рекао D-у: F и B су из истог племена.
D је рекао E-у: B је Шпијун, а A је Истинозборац.

Којим племенима припадају ови становници?

22. Наћи пример исказа који на Острву Истинозбораца и Шпијуна:

1° ниједан Истинозборац не може да каже (али Шпијун може);
2° ниједан Шпијун не може да каже (али Истинозборац може);
3° ниједан Истинозборац не може да чује (али Шпијун може);
4° ниједан Шпијун не може да чује (али Истинозборац може);
5° нико не може да каже.

***

На *Острву Истинозбораца и Дуплих агената* живе племе Истинозбораца, који као и раније увек говоре истину, и племе Дуплих агената, који говоре истину особама које нису из истог племена, а лажу особе из свог племена.

***

23. Нека су a и b истинитосне вредности исказа „A је Истинозборац." и „B је Истинозборац.", где су A и B особе са Острва Истинозбораца и Дуплих агената. Ако је познато да је A рекао B-у исказ тачности p, доказати да је $a \vee b = p$.

24. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Истинозбораца и Дуплих агената. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: F и D су Истинозборци.
B је рекао C-у: D и E су из истог племена.
C је рекао D-у: Бар један од F и A је Дупли агент.
D је рекао E-у: C је Истинозборац, а B је Дупли агент.

Којим племенима припадају ови становници?

25. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Истинозбораца и Дуплих агената. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: Ако је E Истинозборац, онда је F Дупли агент.
B је рекао C-у: E и D нису из истог племена.
C је рекао D-у: B и F су Дупли агенти.
D је рекао E-у: C је Истинозборац, а A је Дупли агент.

Којим племенима припадају ови становници?

26. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Истинозбораца и Дуплих агената. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: E и F су Истинозборци.
B је рекао C-у: E и D су Истинозборци.
C је рекао D-у: A је Истинозборац, а B је Дупли агент.
D је рекао E-у: F је Истинозборац, а A је Дупли агент.

Којим племенима припадају ови становници?

27. Наћи исказ који на Острву Истинозбораца и Дуплих агената:

1° ниједан Истинозборац не може да каже (али Дупли агент може);

2° ниједан Дупли агент не може да каже (али Истинозборац може);

3° ниједан Истинозборац не може да чује (али Дупли агент може);

4° ниједан Дупли агент не може да чује (али Истинозборац може);

5° нико не може да каже.

***

На *Острву Дуплих агената и Лажова* живе племе Дуплих агената, који као и раније говоре истину само особама које нису из истог племена, и племе Лажова, који као и раније увек лажу.

***

28. Нека су a и b истинитосне вредности исказа „A је Дупли агент." и „B је Дупли агент.", где су A и B особе са Острва Дуплих агената и Лажова. Ако је познато да је A рекао B-у исказ тачности p, одредити p у зависности од a и b.

29. Наћи исказ који на Острву Дуплих агената и Лажова:

1° ниједан Лажов не може да каже (али Дупли агент може);

2° ниједан Дупли агент не може да каже (али Лажов може);

3° ниједан Лажов не може да чује (али Дупли агент може);

4° ниједан Дупли агент не може да чује (али Лажов може);

5° нико не може да каже.

***

На *Острву Дуплих агената и Шпијуна* живе племе Дуплих агената, који као и раније говоре истину само особама које нису из истог племена, и племе Шпијуна, који као и раније говоре истину само особима из свог племена.

***

30. Нека су a и b истинитосне вредности исказа „A је Дупли агент." и „B је Дупли агент.", где су A и B особе са Острва Дуплих агената и Шпијуна. Ако је познато да је A рекао B-у исказ тачности p, одредити p у зависности од a и b.

31. Наћи исказ који на Острву Дуплих агената и Шпијуна нико не може да каже.

32. Да ли на Острву Дуплих агената и Шпијуна постоји исказ који:

1° Дупли агент може, а Шпијун не може да каже;

2° Дупли агент не може, а Шпијун може да каже?

33. Да ли на Острву Дуплих агената и Шпијуна постоји исказ који:

1° Дупли агент може, а Шпијун не може да чује;

2° Дупли агент не може, а Шпијун може да чује?

***

На *Острву Северних и Јужних Шпијуна* живи племе Северних Шпијуна и племе Јужних Шпијуна. Сваки становник говори истину само особима из свог племена.

***

34. Нека су a и b истинитосне вредности исказа „A је Северни Шпијун." и „B је Северни Шпијун.", где су A и B особе са Острва Северних и Јужних Шпијуна. Ако је познато да је A рекао B-у исказ тачности p, одредити p у зависности од a и b.

35. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Северних и Јужних Шпијуна. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: Ако је E Северни Шпијун, онда је D Северни Шпијун.

B је рекао C-у: A је Северни Шпијун или је F Јужни Шпијун.

C је рекао D-у: F и A су Јужни Шпијуни.

D је рекао E-у: Тачно један од A и C је Северни Шпијун.

Којим племенима припадају ови становници.

36. Наћи исказ који на Острву Северних и Јужних Шпијуна:

1° ниједан Северни Шпијун не може да каже (али Јужни може);

2° ниједан Северни Шпијун не може да чује (али Јужни може);

3° нико не може да каже.

***

На *Острву Северних и Јужних Дуплих агената* живи племе Северних Дуплих агената и племе Јужних Дуплих агената. Сваки становник говори истину само особима које нису из његовог племена.

***

37. Нека су a и b истинитосне вредности исказа „A је Северни Дупли агент." и „B је Северни Дупли агент.", где су A и B особе са Острва Северних и Јужних Дуплих агената. Ако је познато да је A рекао B-у исказ тачности p, одредити p у зависности од a и b.

38. Налазимо се у друштву становника A, B, C, D, E и F Острва Северних и Јужних Дуплих агената. Познато је да су изречени следећи искази:

A је рекао B-у: Ако је C Северни, онда је E Јужни Дупли агент.

B је рекао C-у: E и A су из истог племена.

C је рекао D-у: A је Северни Дупли агент, а B је Јужни Дупли агент.

D је рекао E-у: Бар један од B и F је Северни Дупли агент.

Којим племенима припадају ови становници.

39. Наћи исказ који на Острву Северних и Јужних Дуплих агената:

1° ниједан Северни Дупли агент не може да каже (али Јужни може);

2° ниједан Северни Дупли агент не може да чује (али Јужни може);

3° нико не може да каже.

2. Решења

1. Ако би A био Лажов, његова изјава била би нетачна, тј. ниједан од B и C не би био Истинозборац, тј. и B и C би били Лажови. Међутим, тада је изјава „A и C су Лажови." тачна, па би B морао бити Истинозборац, а већ смо видели да је Лажов. Како ово није могуће, закључујемо да A мора бити Истинозборац.

Према томе, бар један од B и C је такође Истинозборац. Како је изјава „A и C су Лажови." нетачна јер A није Лажов, B мора бити лажов, па преостаје да C мора бити Истинозборац.

Дакле, решење је A и C су Истинозборци, а B је Лажов. У решењу задатка 1.2 размотрићемо још неколико решења овог задатка.

2. Ако је A Истинозборац, онда је $a = 1$, али је такође и $p = 1$ јер A говори истину, ра $a = p$. Са друге стране, ако је A Лажов, онда је $a = 0$, али је такође и $p = 0$ јер A лаже, па је и у овом случају $a = p$. Дакле, у сваком случају је $a = p$.

Знајући ову чињеницу, претходни задатак можемо да решимо и на следећи начин. Обележимо са a (b, c) истинитосну вредност исказа „A (B, C) је Истинозборац". Истинитосна вредност исказа „Бар један од B и C је Истинозборац." тада је једнака $b \vee c$, па како је овај исказ изрекао A имамо:

$$a = b \vee c.$$

Истинитосна вредност исказа „A и C су лажови." једнака је $\neg a \wedge \neg c$ (приметимо да је исказ „Особа X је Лажов." исто што и „Особа X није Истинозборац."), па како је овај исказ изрекао B имамо:

$$b = \neg a \wedge \neg c.$$

Свели смо проблем на решавање система претходне две једначине у скупу $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$. Један начин за решавање оваквог система је да проверимо све могућности у таблици:

a	b	c	$b \vee c$	$\neg a \wedge \neg c$	$a = b \vee c$	$b = \neg a \wedge \neg c$
t	**t**	**t**	**t**	**n**	$\surd$	
t	**t**	**n**	**t**	**n**	$\surd$	
t	**n**	**t**	**t**	**n**	$\surd$	$\surd$
t	**n**	**n**	**n**	**n**		$\surd$
n	**t**	**t**	**t**	**n**		
n	**t**	**n**	**t**	**t**		$\surd$
n	**n**	**t**	**t**	**n**		$\surd$
n	**n**	**n**	**n**	**t**	$\surd$	

У последње две колоне таблице назначили смо да ли је одговарајућа једначина задовољена у конкретном случају (реду таблице). Према томе обе једначине задовољене су једино ако је $a = \mathbf{t}$, $b = \mathbf{n}$ и $c = \mathbf{t}$, тј. ако су A и C Истинозборци, а B је Лажов.

Систем $a = b \vee c$ и $b = \neg a \wedge \neg c$ можемо решити и дискусијом по слову, што је сигурно бољи поступак ако је број променљивих толики да је непрактично формирати таблицу. Ако је $a = \mathbf{n}$, из прве једначине заључујемо и $b = c = \mathbf{n}$, па убацујући ове вредности у другу једначину добијамо $\mathbf{n} = \neg\mathbf{n} \wedge \neg\mathbf{n} = \mathbf{t}$, тј. ове вредности не задовољавају другу једначину, па оне не чине решење. Дакле, мора бити $a = \mathbf{t}$. Из прве једначине бар једно од b и c мора имати вредност $\mathbf{t}$. Убацујући $a = \mathbf{t}$ у другу једначину добијамо $b = \neg\mathbf{t} \wedge \neg c = \mathbf{n} \wedge \neg c = \mathbf{n}$, па из претходне реченице мора бити $c = \mathbf{t}$. Дакле, вредности $a = \mathbf{t}, b = \mathbf{n}, c = \mathbf{t}$ задовољавају обе једначине, па је то наше решење, тј. закључак је да су A и C Истинозборци, а B је Лажов.

3. Као у претходном задатку са a ћемо означити вредност исказа „A је Истинозборац.", и слично за остале становнике. Тачност исказа који је дао A једнака је $\neg b \wedge \neg f$, па је према претходном задатку $a = \neg b \wedge \neg f$. Тачност исказа који је дао B једнака је $\neg c \vee \neg d$, па је $b = \neg c \vee \neg d$. Тачност исказа који је дао C је $\neg e \vee f$, па је $c = \neg e \vee f$. Тачност исказа који је дао D је $\neg e \to f$, па је $d = \neg e \to f$. Коначно, тачност исказа који је дао E је $\neg f \wedge c$, па је $e = \neg f \wedge c$. Дакле решавамо систем једначина:

$$\begin{array}{lccl} (1) & a & = & \neg b \wedge \neg f \\ (2) & b & = & \neg c \vee \neg d \\ (3) & c & = & \neg e \vee f \\ (4) & d & = & \neg e \to f \\ (5) & e & = & \neg f \wedge c \end{array}$$

Како имамо шест слова, испис таблице био би непрактичан, па ћемо дискутовати по неком слову. Приметимо да се слово a јавља једном, b и d два, c и e три, а f четири пута, па је вероватно најпрактичније да дискутујемо по слову f (систем се највише редукује). Убацујући редом $f = \mathbf{t}$ и $f = \mathbf{n}$, систем нам се поједностављује и редом постаје:

$$\begin{array}{lccl} \text{за } f = \mathbf{t}: & & & \\ (1) & a & = & \mathbf{n} \\ (2) & b & = & \neg c \vee \neg d \\ (3) & c & = & \mathbf{t} \\ (4) & d & = & \mathbf{t} \\ (5) & e & = & \mathbf{n} \end{array} \qquad \begin{array}{lccl} \text{за } f = \mathbf{n}: & & & \\ (1) & a & = & \neg b \\ (2) & b & = & \neg c \vee \neg d \\ (3) & c & = & \neg e \\ (4) & d & = & e \\ (5) & e & = & c \end{array}$$

Дакле, за $f = \mathbf{t}$, одмах добијамо $c = d = \mathbf{t}$ и $a = e = \mathbf{n}$, а онда b лако израчунамо из (2) као $b = \neg\mathbf{t} \vee \neg\mathbf{t} = \mathbf{n}$. Дакле, једно решење јесте C, D, F су Истинозборци, а A, B, E су Лажови. Са друге стране, за $f = \mathbf{n}$ одмах видимо да немамо решења из (3) и (5) јер је $e = c = \neg e$, што није могуће. Дакле, претходно добијено решење је и једино решење.

4. Користимо исти запис као и до сада. Приметимо да је вредност исказа „X і Y су из истог племена." једнака $x \leftrightarrow y$; заиста, тај исказ је тачан једино ако су оба x, y тачна или оба нетачна. Зато је вредност исказа „X і Y нису из истог племена." једнака $\neg(x \leftrightarrow y)$ што је једнако $x \veebar y$. Такође приметимо да имамо и исказе „Тачно један од ..." и „Или ... или ..." којима такође одговара ексклузивна дисјункција. Дакле, решавамо систем:

$$\begin{array}{lccl}
(1) & a & = & e \veebar f \\
(2) & b & = & f \leftrightarrow e \\
(3) & c & = & \neg a \veebar \neg e \\
(4) & d & = & \neg e \wedge b \\
(5) & e & = & \neg b \veebar d
\end{array}$$

Решавање система остављамо читаоцу. Решење је A, E су Истинозборци, B, C, D, F су Лажови.

5. Уз исти запис као и до сада, треба да решимо систем:

$$\begin{array}{lccl}
(1) & a & = & \neg f \to e \\
(2) & b & = & \neg c \to \neg a \\
(3) & c & = & \neg f \to \neg b \\
(4) & d & = & b \wedge \neg f \\
(5) & e & = & a \veebar b
\end{array}$$

Решење је A, B, C, F су Истинозборци, а D, E су Лажови.

6. Нека је A произвољан становник Острва и a вредност исказа „A је Истинозборац.". Ако је i вредност неког исказа I, видели смо да A може да изговори I ако и само ако $a = i$. Дакле, A не може да изговори I ако и само ако је случај да $a \neq i$. С обзиром да је A произвољан, таблица исказа I мора да буде:

a	i
t	**n**
n	**t**

Дакле i има вредност $\neg a$, па за I можемо да узмемо исказ „Ја сам Лажов.". Заиста, ниједан становник не може да изговори „Ја сам Лажов.". Истинозборци увек говоре истину, а овај исказ је у том случају лажан, а Лажови увек лажу, док је овај исказ у том случају истинит.

7. Приметимо да становници различитих племена морају да дају различите одговоре на питање како бисмо их разликовали. (Нпр. на питање „Да ли си Истинозборац?" сви морају да одговоре са да, тако да из тог одговора ништа не можемо да закључимо.) Дакле, тражимо питање за које знамо да ће Истинозборци одговорити са да, а Лажови са не (или обратно). Нека је i истинитосна вредност непознатог исказа I, за који постављамо питање „Да ли важи I?". Ако је A Истинозборац, желимо да одговори са да, па мора бити $i = a = \mathbf{t}$, а ако је Лажов, желимо да одговори са не, па мора бити $\neg i = a = \mathbf{n}$, тј. $i = \mathbf{t}$. Дакле, у сваком случају i мора бити тачно, тј. треба нам исказ за који знамо да је сигурно тачан. Нпр. питања „Да ли се налазимо на Острву?" или „Да ли си ти Истинозборац или Лажов?" су одговарајућа.

Можемо да поставимо и питање за које сигурно знамо да има негативан одговор, нпр. „Да ли си ти Истинозборац и Лажов?", у ком случају ће Истинозборци осговорити негативно, а Лажови позитивно.

8. Размотримо у табели шта је одговор особе A у зависности од тога из ког су племена он и B:

a	b	одговор
t	**t**	не
t	**n**	не
n	**t**	да
n	**n**	не

Дакле, једино Лажов може да одговори са да и то једино у случају ако је B Истинозборац. Како знамо да је странац са сигурношћу закључио ко је из ког племена, одговор је морао бити „Да.", дао га је Лажов A, док је B Истинозборац.

9. Из (решења) претходног задатка знамо да ако је A одговорио позитивно на прво питање, странац би са сигурношћу закључио да је A Лажов и B Истинозборац. Како се то није десило, одговор на прво питање било је „Не.", а могло је да буде дато у случајевима да је A Истинозборац, или A и B су обоје Лажови. Размотримо у табели шта би били одговори на друго питање:

a	b	одговор
t	**t**	да
t	**n**	не
n	**n**	не

(Приметимо да случај A је Лажов и B је Истинозборац не разматрамо јер смо већ закључили да то није случај.) Дакле на друго питање једино Истинозборац може да одговори потврдно и то једино ако се налази у друштву другог Истинозборца. Како је странац овог пута закључио ко је из ког племена, одговор је морао да буде „Да.", и оба становника A и B су Истинозборци.

10. Странац треба да постави питање „Да ли важи I?", где је I непознат исказ чију ћемо истинитосну вредност да означимо са i. Слово a има уобичајено значење, а нека је p вредност исказа „На острву се може купити опрема за пецање." Желимо да из A-овог одговора недвосмислено знамо да ли је p тачно или не, нпр. ако је одговор „Да." да знамо да је p тачно (без обзира ко је A), а ако је одговор „Не." да знамо да је p нетачно (али можемо и обратно да радимо). Ставимо ово у таблицу:

a	p	„Да."/$a = i$	„Не."/$a = \neg i$	i
t	**t**	$\surd$		**t**
t	**n**		$\surd$	**n**
n	**t**	$\surd$		**n**
n	**n**		$\surd$	**t**

Дакле, у трећој и четвртој колони смо назначили у којим случајевима желимо да чујемо одговор „Да.", односно „Не.", и у тим случајевима мора да важи $a = i$, односно $a = \neg i$ јер особа A потврђује, односно негира исказ I. Из овога видимо како да попунимо таблицу за i у петој колони.

Према томе $i = a \leftrightarrow p$, па је једно питање које можемо да поставимо „Да ли важи ти си Истинозборац ако и само ако на острву се може купити опрема за пецање?" Ако A одговори потврдно, не знамо шта је он, али знамо да на острву можемо да купимо опрему за пецање, а ако одговори са не, опет не знамо шта је он, али знамо да на острву не можемо да купимо опрему за пецање.

11. Ако је A Лажов, његов исказ сигурно је нетачан, тј. оба и C и D су такође Лажови. Међутим, ово је у супротности са трећом информацијом. Како је C Лажов, његов исказ сигурно мора бити нетачан, али он је тачан јер смо претпоставили да је A Лажов.

Дакле, A мора бити Шпијун. Тада је исказ из друге информације које имамо тачан, па како га је B изрекао C-у, ово је једино могуће ако су и B и C Шпијуни. Исказ из треће информације тада је нетачан, а како га је изрекао Шпијун C, морао га је изрећи особи која није у његовом племену, тј. D је Лажов. Према томе, једино могуће решење је да су A, B и C Шпијуни, а D Лажов. И с обзиром на поступак нашег закључивања ова могућност јесте у складу са другом и трећом информацијом, али директно видимо да јесте у складу и са првом информацијом, тако да смо добили решење.

12. Погледајмо у таблици вредност p зависно од вредности a и b.

a	b	p
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**
n	**t**	**n**
n	**n**	**n**

Наиме ако су A и B Шпијуни (први ред), A је рекао B-у истину па је $p = \mathbf{t}$. Ако је A Шпијун, а B Лажов (други ред), A је рекао B-у лаж. Ако је A Лажов (трећи и четврти ред), A је рекао B-у лаж независно од тога у ком је племену B. Из таблице је јасно да је p једнака са вредношћу $a \wedge b$.

13. Користимо претходни задатак укључујући и ознаке из претходног задатка (за особу X малим словом x означавамо вредност исказа „X је Шпијун."; тада је вредност исказа „X је Лажов." једнака $\neg x$). Добијамо систем једначина:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & a \wedge b & = & c \rightarrow \neg f \\ (2) & b \wedge c & = & d \vee \neg a \\ (3) & c \wedge d & = & \neg f \vee \neg b \\ (4) & d \wedge e & = & a \rightarrow f \end{array}$$

Решавањем система добијамо решење A, B, C, D су Шпијуни, E, F су Лажови.

14. Уз већ утврђену нотацију имамо систем једначина:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & a \wedge b & = & f \wedge \neg c \\ (2) & b \wedge c & = & \neg a \rightarrow \neg f \\ (3) & c \wedge d & = & b \leftrightarrow e \\ (4) & d \wedge e & = & f \vee \neg c \end{array}$$

(Приметимо да је и на овом Острву вредност исказа „X и Y су из истог племена." једнака $x \leftrightarrow y$.) Решавањем система добијамо решење A, D, E, F Лажови, а B, C су Шпијуни.

15. Уз утврђену нотацију имамо систем једначина:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & a \wedge b & = & \neg c \rightarrow \neg e \\ (2) & b \wedge c & = & d \wedge \neg a \\ (3) & c \wedge d & = & e \wedge f \\ (4) & d \wedge e & = & \neg a \vee \neg c \end{array}$$

Решавањем система добијамо решење A, D, E су Шпијуни, а B, C, F су Лажови.

16. Уз утврђену нотацију имамо систем једначина:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & a \wedge b & = & c \veebar e \\ (2) & b \wedge c & = & \neg d \veebar \neg f \\ (3) & c \wedge d & = & a \rightarrow \neg f \\ (4) & d \wedge e & = & c \wedge a \end{array}$$

Решавањем система добијамо решење A, D, F су Шпијуни, а B, C, E су Лажови.

17. Нека је i вредност траженог исказа.

1° Нека је A Шпијун и B произвољни становник Острва. Како желимо исказ који A не може да каже B-у мора бити $i \neq a \wedge b = \mathbf{t} \wedge b = b$:

a	b	i
t	**t**	**n**
t	**n**	**t**

Дакле, ако је $i = \neg b$, Шпијун A га никада неће моћи рећи B-у, тако да један тражени исказ може бити „Ти си Лажов.”. Приметимо да овај исказ Лажов може да изговори ако се обраћа неком Шпијуну.

2° Нека је сада A Лажов и B произвољни становник Острва. Како желимо исказ који A не може да каже B-у мора бити $i \neq a \wedge b = \mathbf{n} \wedge b = \mathbf{n}$:

a	b	i
n	**t**	**t**
n	**n**	**t**

Дакле, ако је $i = \neg a$, Лажов A га никада неће моћи рећи B-у, тако да један тражени исказ може бити „Ја сам Лажов.”. Приметимо да овај исказ Шпијун може да изговори ако се обраћа неком Лажову.

3° Нека је B Шпијун и A произвољни становник Острва. Како желимо исказ који B не може да чује од A мора бити $i \neq a \wedge b = a \wedge \mathbf{t} = a$:

a	b	i
t	**t**	**n**
n	**t**	**t**

Дакле, ако је $i = \neg a$, Шпијун B га никада неће моћи чути од A, тако да један тражени исказ може бити „Ја сам Лажов.”. Приметимо да овај исказ Лажов може да чује од било ког Шпијуна.

4° Нека је B Лажов и A произвољни становник Острва. Како желимо исказ који B не може да чује од A мора бити $i \neq a \wedge b = a \wedge \mathbf{n} = \mathbf{n}$:

a	b	i
t	**n**	**t**
n	**n**	**t**

Дакле, ако је $i = \neg b$, Лажов B га никада неће моћи чути од A, тако да један тражени исказ може бити „Ти си Лажов.”. Приметимо да овај исказ Шпијун може да чује од било ког Лажова.

5° За произвољне A и B мора бити $i \neq a \wedge b$:

a	b	i
t	**t**	**n**
t	**n**	**t**
n	**t**	**t**
n	**n**	**t**

Дакле, ако i има вредност $\neg a \vee \neg b$, нико не може да га изговори. Један такав исказ је „Бар један од нас је Лажов.”.

18. Погледајмо у таблици вредност p зависно од вредности a и b.

a	b	p
t	**t**	**t**
t	**n**	**t**
n	**t**	**n**
n	**n**	**t**

Наиме ако је A Истинозборац (прва два реда), A је рекао B-у истину па је $p = \mathbf{t}$. Ако је A Шпијун, а B Истинозборац (трећи ред), A је рекао B-у лаж, тј. $p = \mathbf{n}$. Коначно, ако су A и B Шпијуни (четврти ред), A је рекао B-у истину, па је $p = \mathbf{t}$. Из таблице је јасно да је p једнака са вредношћу $b \to a$.

19. Користићемо претходни задатак. Као и у претходном задатку вредност исказа „X је Истинозборац.” означаваћемо малим словом x. Тада је вредност исказа „X је Шпијун.” једнака $\neg x$. Према претходном задатку формирамо систем једначина:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & b \to a & = & e \vee \neg c \\
(2) & c \to b & = & a \wedge \neg d \\
(3) & d \to c & = & \neg f \wedge \neg a \\
(4) & e \to d & = & a \veebar \neg f
\end{array}$$

Решавањем система добијамо решење C, D, E су Истинозборци, а A, B, F су Шпијуни.

20. Уз већ утврђену нотацију имамо систем једначина:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & b \to a & = & \neg e \wedge c \\
(2) & c \to b & = & e \wedge f \\
(3) & d \to c & = & b \veebar e
\end{array}$$

Решавањем система добијамо решење B, D, E, F су Истинозборци, а A, C су Шпијуни.

21. Уз утврђену нотацију имамо систем једначина:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & b \to a & = & e \wedge \neg d \\
(2) & c \to b & = & a \to d \\
(3) & d \to c & = & f \leftrightarrow b \\
(4) & e \to d & = & \neg b \wedge a
\end{array}$$

Решавањем система добијамо решење A, B, C, D, F су Шпијуни, а E је Истинозборац.

22. Нека је i истинитосна вредност траженог исказа.

1° Ако је A Истинозборац, а B произвољан становник, мора бити $i \neq b \to a = b \to$ **t** $=$ **t** како A не би могао да каже тражени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**n**
t	**n**	**n**

Према томе $i = \neg a$, тј. један жељени исказ је „Ја сам Шпијун." Приметимо да овај исказ Шпијун може да каже било ком Шпијуну.

2° Ако је A Шпијун, а B произвољан становник, мора бити $i \neq b \to a = b \to$ **n** $= \neg b$ како A не би могао да каже тражени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
n	**t**	**t**
n	**n**	**n**

Према томе $i = b$, тј. један жељени исказ је „Ти си Истинозборац." Приметимо да овај исказ Истинозборац може да каже било ком Истинозборцу.

3° Ако је B Истинозборац, а A произвољан становник, мора бити $i \neq b \to a =$ **t** $\to a = a$ како B не би могао да чује тражени исказ од A. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**n**
n	**t**	**t**

Према томе $i = \neg a$, тј. један жељени исказ је „Ја сам Шпијун." Приметимо да овај исказ Шпијун може да чује од било ког Шпијуна.

4° Ако је B Шпијун, а A произвољан становник, мора бити $i \neq b \to a =$ **n** $\to a =$ **t** како B не би могао да чује тражени исказ од A. Дакле:

a	b	i
t	**n**	**n**
n	**n**	**n**

Према томе $i = b$, тј. један жељени исказ је „Ти си Истинозборац." Приметимо да овај исказ Истинозборац може да чује од било ког Истинозборца.

5° Нека су A и B произвољни становници. Мора бити $i \neq b \to a$ како A не би могао да каже жељени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**n**
t	**n**	**n**
n	**t**	**t**
n	**n**	**n**

Према томе $i = \neg a \wedge b$, па је један жељени исказ „Ја сам Шпијун, а ти си Истинозборац.” (или „Ја сам Шпијун, а ти ниси.”, или „Ти си Истинозборац, а ја нисам.”).

23. Вредности p у зависности од a и b дате су у таблици:

a	b	p
t	**t**	**t**
t	**n**	**t**
n	**t**	**t**
n	**n**	**n**

тј. једино Дупли агенти лажу и то једино другом Дуплом агенту. Из таблице је јасно да је p једнака са вредношћу $a \vee b$.

24. Користећи нотацију и резултат претходног задатка треба да решимо систем:

$$\begin{array}{llcl} (1) & a \vee b & = & f \wedge d \\ (2) & b \vee c & = & d \leftrightarrow e \\ (3) & c \vee d & = & \neg f \vee \neg a \\ (4) & d \vee e & = & c \wedge \neg b \end{array}$$

Решавањем система добијамо да су C, D, E Истинозборци, а A, B, F Дупли агенти.

25. Уз већ утврђену нотацију имамо систем једначина:

$$\begin{array}{llcl} (1) & a \vee b & = & e \to \neg f \\ (2) & b \vee c & = & e \veebar d \\ (3) & c \vee d & = & \neg b \wedge \neg f \\ (4) & d \vee e & = & c \wedge \neg a \end{array}$$

Решавањем система добијамо да су A, F Истинозборци, а B, C, D, E Дупли агенти.

26. Уз већ утврђену нотацију имамо систем једначина:

$$\begin{array}{llcl} (1) & a \vee b & = & e \wedge f \\ (2) & b \vee c & = & e \wedge d \\ (3) & c \vee d & = & a \wedge \neg b \\ (4) & d \vee e & = & f \wedge \neg a \end{array}$$

Решавањем система добијамо решење да су сви Дупли агенти.

27. Нека је i истинитосна вредност траженог исказа.

1° Ако је A Истинозборац, а B произвољан становник, мора бити $i \neq a \vee b = \mathbf{t} \vee b = \mathbf{t}$ како A не би могао да каже тражени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**n**
t	**n**	**n**

Према томе $i = \neg a$, тј. један жељени исказ је „Ја сам Дупли агент.” Приметимо да овај исказ Дупли агент може да каже било ком Истинозборцу.

2° Ако је A Дупли агент, а B произвољан становник, мора бити $i \neq a \vee b = \mathbf{n} \vee b = b$ како A не би могао да каже тражени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
n	**t**	**n**
n	**n**	**t**

Према томе $i = \neg b$, тј. један жељени исказ је „Ти си Дупли агент." Приметимо да овај исказ Истинозборац може да каже било ком Дуплом агенту.

3° Ако је B Истинозборац, а A произвољан становник, мора бити $i \neq a \vee b = a \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$ како B не би могао да чује тражени исказ од A. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**n**
n	**t**	**n**

Према томе $i = \neg b$, тј. један жељени исказ је „Ти си Дупли агент." Приметимо да овај исказ Дупли агент може да чује од било ког Истинозборца.

4° Ако је B Дупли агент, а A произвољан становник, мора бити $i \neq a \vee b = a \vee \mathbf{n} = a$ како B не би могао да чује тражени исказ од A. Дакле:

a	b	i
t	**n**	**n**
n	**n**	**t**

Према томе $i = \neg a$, тј. један жељени исказ је „Ја сам Дупли агент." Приметимо да овај исказ Истинозборац може да чује од било ког Дуплог агента.

5° Нека су A и B произвољни становници. Мора бити $i \neq a \vee b$ како A не би могао да каже жељени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**n**
t	**n**	**n**
n	**t**	**n**
n	**n**	**t**

Дакле $i = \neg a \wedge \neg b$, па је један жељени исказ „Ми смо Дупли агенти.".

28. Формирајмо таблицу за p. Како једино Дупли агент може да каже истину и то Лажову имамо:

a	b	p
t	**t**	**n**
t	**n**	**t**
n	**t**	**n**
n	**n**	**n**

Према томе $p = a \wedge \neg b$.

29. Нека је i истинитосна вредност траженог исказа. Користимо резултат претходног задатка.

1° Ако је A Лажов, а B произвољан становник, мора бити $i \neq a \wedge \neg b = \mathbf{n} \wedge \neg b = \mathbf{n}$ како A не би могао да каже тражени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
n	**t**	**t**
n	**n**	**t**

Према томе $i = \neg a$, тј. један жељени исказ је „Ја сам Лажов." Приметимо да овај исказ Дупли агент може да каже било ком Дуплом агенту.

2° Ако је A Дупли агент, а B произвољан становник, мора бити $i \neq a \wedge \neg b = \mathbf{t} \wedge \neg b = \neg b$ како A не би могао да каже тражени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**

Према томе $i = b$, тј. један жељени исказ је „Ти си Дупли агент.” Приметимо да овај исказ Лажов може да каже било ком Лажову.

3° Ако је B Лажов, а A произвољан становник, мора бити $i \neq a \wedge \neg b = a \wedge \mathbf{t} = a$ како B не би могао да чује тражени исказ од A. Дакле:

a	b	i
t	**n**	**n**
n	**n**	**t**

Према томе $i = \neg a$, тј. један жељени исказ је „Ја сам Лажов.” Приметимо да овај исказ Дупли агент може да чује од било ког Дуплог агента.

4° Ако је B Дупли агент, а A произвољан становник, мора бити $i \neq a \wedge \neg b = a \wedge \mathbf{n} = \mathbf{n}$ како B не би могао да чује тражени исказ од A. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**t**
n	**t**	**t**

Према томе $i = b$, тј. један жељени исказ је „Ти си Дупли агент.” Приметимо да овај исказ Лажов може да чује од било ког Лажова.

5° Нека су A и B произвољни становници. Мора бити $i \neq a \wedge \neg b$ како A не би могао да каже жељени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**
n	**t**	**t**
n	**n**	**t**

Дакле $i = a \to b$, па је један жељени исказ „Ако сам ја Дупли агент, онда си и ти.”.

30. Формирајмо таблицу за p. И Дупли агент и Шпијун могу да кажу истину само Шпијуну, па имамо:

a	b	p
t	**t**	**n**
t	**n**	**t**
n	**t**	**n**
n	**n**	**t**

Према томе $p = \neg b$.

31. Нека је i истинитосна вредност траженог исказа. Користимо нотацију и резултат претходног задатка. Нека су A и B произвољни становници. Мора бити $i \neq \neg b$ како A не би могао да каже жељени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**
n	**t**	**t**
n	**n**	**n**

Дакле $i = b$, па је један жељени исказ „Ти си Дупли агент.”.

32. Ако је i тачност исказа који A може да каже B-у, мора бити $i = \neg b$. Међутим како вредност од i не зависи од a, тај исказ B-у може да каже и Дупли агент и Шпијун, па је одговор у оба дела задатка негативан.

33. Нека су i_1 и i_2 тачности жељених исказа. Ако Дупли агент B може да чује жељени исказ, у том случају мора бити $i_1 = \neg b =$ **n**, а ако Шпијун B не може да чује жељени исказ, у том случају мора бити $i_1 \neq \neg b =$ **t**, тј. опет $i_1 =$ **n**. Слично је $i_2 =$ **t** у сваком случају:

a	b	i_1	i_2
t	**t**	**n**	**t**
t	**n**	**n**	**t**
n	**t**	**n**	**t**
n	**n**	**n**	**t**

Према томе у 1° нам треба неки сигурно нетачан исказ, нпр. „Ја нисам ни Дупли агент ни Шпијун.”, док нам у 2° треба неки сигурно тачан исказ, нпр. „Ми живимо на острву.”.

34. Формирајмо таблицу за p. И Северни и Јужни Шпијуни могу да кажу истину само својим саплеменицима па имамо:

a	b	p
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**
n	**t**	**n**
n	**n**	**t**

Према томе $p = a \leftrightarrow b$.

35. Уз нотацију и резултат претходног задатка, треба да решимо систем:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & a \leftrightarrow b & = & e \to d \\ (2) & b \leftrightarrow c & = & a \vee \neg f \\ (3) & c \leftrightarrow d & = & \neg f \wedge \neg a \\ (4) & d \leftrightarrow e & = & a \veebar c \end{array}$$

Решавањем система добијамо да су C, F Северни, а A, B, D, E Јужни Шпијуни.

36. Нека је i истинитосна вредност траженог исказа.

1° Ако је A Северни Шпијун, а B произвољан становник, мора бити $i \neq a \leftrightarrow b =$ **t** $\leftrightarrow b = b$ како A не би могао да каже тражени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**n**
t	**n**	**t**

Према томе $i = \neg b$, тј. један жељени исказ је „Ти си Јужни Шпијун.” Приметимо да овај исказ Јужни Шпијун може да каже било ком Јужном Шпијуну.

2° Ако је B Северни Шпијун, а A произвољан становник, мора бити $i \neq a \leftrightarrow b = a \leftrightarrow$ **t** $= a$ како B не би могао да чује тражени исказ од A. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**n**
n	**t**	**t**

Према томе $i = \neg a$, тј. један жељени исказ је „Ја сам Јужни Шпијун.” Приметимо да овај исказ Јужни Шпијун може да чује од било ког Јужног Шпијуна.

3° Нека су A и B произвољни становници. Мора бити $i \neq a \leftrightarrow b$ како A не би могао да каже жељени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**n**
t	**n**	**t**
n	**t**	**t**
n	**n**	**n**

Дакле $i = a \veebar b$, па је један жељени исказ „Ми нисмо из истог племена.”.

37. Формирајмо таблицу за p. И Северни и Јужни Дупли агенти могу да кажу истину само особама изван свог племена па имамо:

a	b	p
t	**t**	**n**
t	**n**	**t**
n	**t**	**t**
n	**n**	**n**

Према томе $p = a \veebar b$.

38. Уз нотацију и резултат претходног задатка, треба да решимо систем:

$$\begin{array}{llcl} (1) & a \veebar b & = & c \to \neg e \\ (2) & b \veebar c & = & e \leftrightarrow a \\ (3) & c \veebar d & = & a \wedge \neg b \\ (4) & d \veebar e & = & b \vee f \end{array}$$

Решавањем система добијамо да су A, D, F Северни, а B, C, E Јужни Дупли агенти.

39. Нека је i истинитосна вредност траженог исказа.

1° Ако је A Северни Дупли агент, а B произвољан становник, мора бити $i \neq a \veebar b = \mathbf{t} \veebar b = \neg b$ како A не би могао да каже тражени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**

Према томе $i = b$, тј. један жељени исказ је „Ти си Северни Дупли агент.” Приметимо да овај исказ Јужни Дупли агент може да каже било ком Северном Дуплом агенту.

2° Ако је B Северни Дупли агент, а A произвољан становник, мора бити $i \neq a \veebar b = a \veebar \mathbf{t} = \neg a$ како B не би могао да чује тражени исказ од A. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**t**
n	**t**	**n**

Према томе $i = a$, тј. један жељени исказ је „Ја сам Северни Дупли агент.” Приметимо да овај исказ Јужни Шпијун може да чује од било ког Северног Дуплог агента.

3° Нека су A и B произвољни становници. Мора бити $i \neq a \veebar b$ како A не би могао да каже жељени исказ B-у. Дакле:

a	b	i
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**
n	**t**	**n**
n	**n**	**t**

Дакле $i = a \leftrightarrow b$, па је један жељени исказ „Ми смо из истог племена.”.