Diskretne strukture 1

13. čas: Logika prvog reda.

Tačnost formule

Definicija. Pišemo:

- $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$ ako $\varphi^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{t}$; inače, $(\mathcal{M}, v) \not\models \varphi$;
- $\mathcal{M} \models \varphi$, $\mathcal{M}$ je *model* za φ, ako $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$ za sve $v : \mathrm{Var} \to M$; inače, $\mathcal{M} \not\models \varphi$, $\mathcal{M}$ je *kontramodel* za φ;
- $\models \varphi$, φ je *valjana*, ako $\mathcal{M} \models \varphi$ za sve $\mathcal{M}$; inače, $\not\models \varphi$, φ nije valjana.

Primeri valjanih formula

Definicija. Neka je $\varphi = \varphi(p_1, \dots, p_n)$ iskazna formula i $\psi_1, \dots, \psi_n$ neke $\mathcal{L}$-formule. Sa $\varphi(\psi_1, \dots, \psi_n)$ obeležavamo formulu φ u kojoj smo svako pojavljivanje slova p_i zamenili sa ψ_i.

Lema. Neka su $\mathcal{M}$ proizvoljna $\mathcal{L}$-struktura i $v : \mathrm{Var} \to M$ proizvoljna valuacija. Ako je u iskazna valuacija definisana sa:

$$u(p_i) := \psi_i^{\mathcal{M}}[v],$$

onda je $(\varphi(\psi_1, \dots, \psi_n))^{\mathcal{M}}[v] = \hat{u}(\varphi)$.

Teorema. Ako je $\models \varphi$, onda $\models \varphi(\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Slobodno i vezano pojavljivanje promenljive

Definicija. Pojavljivanje promenljive u formuli je *vezano* ako je pod dejstvom kvantifikatora; inače je *slobodno*. Primetimo da ista promenljiva može da ima i slobodna i vezana pojavljivanja.

Ako formula φ nema slobodna pojavljivanja promenljivih, kažemo da je φ *rečenica*.

Tvrđenje. Tačnost $\varphi^{\mathcal{M}}[v]$ zavisi samo od vrednosti valuacije v u promenljivama koje imaju slobodna pojavljivanja u formuli φ.

Specijalno, tačnost rečenice ne zavisi od valuacije (samo od strukture).

Smena slobodne promenljive

Definicija. Sa $\varphi[y/x]$ obeležavamo formulu φ u kojoj smo slobodna pojavljivanje promenljive x zamenili sa y.

Smena $\varphi[y/x]$ je *regularna* ako zamenjene promenljive y nisu potpale pod dejstvo kvantifikatora.

Pravila PD

Pravila za univerzalni kvantifikator su:

$$\frac{(\forall x)\,\varphi}{\varphi[y/x]}\,I \quad \text{i} \quad \frac{\begin{array}{|ll} \boxed{\text{u}} & \text{nova promenljiva} \\ \vdots & \\ \varphi[u/x] & \end{array}}{(\forall x)\,\varphi}\,G$$

Zovemo ih *instanciranje* i *generalizacija*.

U pravilu I zahtevamo da je smena $\varphi[y/x]$ regularna.

U pravilu G zahtevamo da je u nova (nekorišćena) promenljiva (primetimo da je tada smena $\varphi[u/x]$ regularna); dovoljno je da zahtevamo da je u promenljiva koja u dotadašnjem dokazu nema slobodna pojavljivanja i smena $\varphi[u/x]$ je regularna.

Pravila PD

Pravila za jednakost su:

$$\frac{}{x = x}\,r \quad \text{i} \quad \frac{x = y \quad \varphi[x/z]}{\varphi[y/z]}\,S$$

Zovemo ih *refleksivnost* jednakosti i *supstitucija*.

U pravilu r, x je proizvoljna promenljiva.

U pravilu S, zahtevamo da su smene $\varphi[x/z]$ i $\varphi[y/z]$ regularne.

Izvedena pravila: jednakost, $\exists$ i DM

Simetričnost i tranzitivnost jednakosti:

$$\frac{x = y}{y = x}\,s \quad \text{i} \quad \frac{x = y \quad y = z}{x = z}\,t$$

Uvođenje i eliminacija egzistencijalnog kvantifikatora:

$$\frac{\varphi[y/x]}{(\exists x)\,\varphi}\,\exists_U \quad \text{i} \quad \frac{(\exists x)\,\varphi \quad (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}\,\exists_E$$

U prvom pravilu zahtevamo da je smena $\varphi[y/x]$ regularna. U drugom pravilu zahtevamo da x nema slobodna pojavljivanja u ψ.

De Morganovi zakoni:

$$\frac{\neg(\forall x)\,\varphi}{(\exists x)\,\neg\varphi}\,DM \quad \frac{\neg(\exists x)\,\varphi}{(\forall x)\,\neg\varphi}\,DM \quad \frac{(\exists x)\,\neg\varphi}{\neg(\forall x)\,\varphi}\,DM \quad \frac{(\forall x)\,\neg\varphi}{\neg(\exists x)\,\varphi}\,DM$$

Osnovne teoreme (I)

- $\vdash (\forall x)\,\varphi \leftrightarrow (\forall y)\,\varphi[y/x]$ i $\vdash (\exists x)\,\varphi \leftrightarrow (\exists y)\,\varphi[y/x]$,
  gde je smena regularna i y nije slobodna u φ;
- $\vdash (\forall x)\,\varphi \leftrightarrow \varphi$ i $\vdash (\exists x)\,\varphi \leftrightarrow \varphi$,
  gde x nije slobodna u φ;
- $\vdash (\forall x)(\forall y)\,\varphi \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\,\varphi$ i $\vdash (\exists x)(\exists y)\,\varphi \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\,\varphi$;
- $\vdash (\exists x)(\forall y)\,\varphi \rightarrow (\forall y)(\exists x)\,\varphi$;
- $\vdash (\forall x)(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x)\,\varphi \wedge (\forall x)\,\psi$ i
  $\vdash (\forall x)\,\varphi \vee (\forall x)\,\psi \rightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi)$;
- $\vdash (\exists x)(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)\,\varphi \vee (\exists x)\,\psi$ i
  $\vdash (\exists x)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x)\,\varphi \wedge (\exists x)\,\psi$;
- $\vdash (\forall x)\,\varphi \vee \psi \leftrightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi)$,
  gde x nije slobodna u ψ;
- $\vdash (\forall x)\,\varphi \vee (\forall x)\,\psi \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\varphi \vee \psi[y/x])$,
  gde y nije slobodna u φ i ψ, i smena $\psi[y/x]$ je regularna;

Osnovne teoreme (II)

- $\vdash (\exists x)\, \varphi \wedge \psi \leftrightarrow (\exists x)(\varphi \wedge \psi)$,

  gde x nije slobodna u ψ;
- $\vdash (\exists x)\, \varphi \wedge (\exists x)\, \psi \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\varphi \wedge \psi[y/x])$,

  gde y nije slobodna u φ i ψ, i smena $\psi[y/x]$ je regularna;
- $\vdash (\forall x)\, \varphi \wedge \psi \leftrightarrow (\forall x)(\varphi \wedge \psi)$ i
  $\vdash (\exists x)\, \varphi \vee \psi \leftrightarrow (\exists x)(\varphi \vee \psi)$,

  gde x nije slobodna u ψ.

Definicija. Skup $\mathcal{L}$-rečenica Σ je:

- zadovoljiv ako ima model;
- konzistentan ako $\Sigma \nvdash \perp$.

Definicija. $\mathcal{L}$-rečenica φ je logička posledica od Σ, $\Sigma \models \varphi$, ako za sve $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ važi implikacija $\mathcal{M} \models \Sigma$ povlači $\mathcal{M} \models \varphi$.

Komentar. Σ je zadovoljiv akko $\Sigma \not\models \perp$.

Gedelova teorema potpunosti

Lema. Neka je Σ skup formula i φ formula. Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda za sve $\mathcal{M}$ i v važi implikacija $(\mathcal{M}, v) \models \Sigma$ povlači $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$.

Lema se dokazuje indukcijom po dužini dokaza sekventa $\Sigma \vdash \varphi$, slično teoremi saglasnosti u iskaznoj logici.

Teorema potpunosti (Gedel). Skup Σ je zadovoljiv akko je konzistentan.

Teorema potpunosti (Gedel). $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.

Slaba teorema potpunosti. $\vdash \varphi$ akko $\models \varphi$.

Teorema kompaktnosti (Gedel, Maljcev). Skup $\mathcal{L}$-rečenica Σ je zadovoljiv akko $(\forall \Sigma_0 \subseteq_{kon.} \Sigma)\ \Sigma_0$ je zadovoljiv.