Diskretne strukture 1

9. čas: Kardinalnost.

Inverzi

Definicija. Neka je $f\colon A \to B$. Funkcija $g\colon B \to A$ je:

- levi inverz od f ako $g \circ f = \mathrm{id}_A$;
- desni inverz od f ako $f \circ g = \mathrm{id}_B$;
- inverz ako je i levi i desni inverz.

Teorema. Neka je $f\colon A \to B$.

- f ima levi inverz akko f je 1-1;
- f ima desni inverz akko f je na;
- f ima inverz akko f je bijekcija. Inverz je jedinstven i zapravo jednak f^{-1}.

Direktna i inverzna slika skupa

Definicija. Neka je $f\colon A \to B$, $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$.

Direktna slika skupa X je skup:

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\},$$

a inverzna slika skupa Y je skup:

$$f^{-1}[Y] = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

Primer. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data sa $f(x) = \sin x$. Izračunati $f[[-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}]]$ i $f^{-1}[(\frac{1}{2}, +\infty)]$.

Osnovne osobine

- $f[X] = \emptyset$ akko $X = \emptyset$;
- $f^{-1}[Y] = \emptyset$ akko $Y \cap \mathrm{Im}(f) = \emptyset$;
- $X_1 \subseteq X_2$ povlači $f[X_1] \subseteq f[X_2]$;
- $Y_1 \subseteq Y_2$ povlači $f^{-1}[Y_1] \subseteq f^{-1}[Y_2]$;
- $f^{-1}[f[X]] \supseteq X$ i $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$;
- $f[X_1 \cup X_2] = f[X_1] \cup f[X_2]$ i $f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$;
- $f[X_1 \cap X_2] \subseteq f[X_1] \cap f[X_2]$ i $f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$;
- $f[X_1 \setminus X_2] \supseteq f[X_1] \setminus f[X_2]$ i $f^{-1}[Y_1 \setminus Y_2] = f^{-1}[Y_1] \setminus f^{-1}[Y_2]$.

Poređenje skupova po veličini

Definicija. Skup A je *manje ili jednake kardinalnosti* od B, u oznaci $|A| \leqslant |B|$, ako postoji $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$ (ekvivalentno, $g\colon B \xrightarrow{na} A$).

Skup A je *jednake kardinalnosti* kao i B, u oznaci $|A| = |B|$ ako postoji $f\colon A \xrightarrow{bij.} B$.

Takođe, $|A| < |B|$ ako $|A| \leqslant |B|$ i $|A| \neq |B|$.

Osnovne osobine.

- ako $A \subseteq B$, onda $|A| \leqslant |B|$;
- ako $|A| = |B|$, onda i $|B| = |A|$;
- ako $|A| = |B|$ i $|B| = |C|$, onda i $|A| = |C|$;
- ako $|A| \leqslant |B|$ i $|B| \leqslant |C|$, onda i $|A| \leqslant |C|$.

KŠB i Bernštajnova teorema

Kantor-Šreder-Bernštajnova teorema. Ako $|A| \leqslant |B|$ i $|B| \leqslant |A|$, onda $|A| = |B|$.

Bernštajnova teorema. Za svaka dva skupa A i B važi $|A| \leqslant |B|$ ili $|B| \leqslant |A|$.

Primeri.

- Ako $|A| \leqslant |B|$, onda postoji $C \subseteq B$ takav da $|A| = |C|$.
- Ako $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$ i $A \cap B = A' \cap B' = \varnothing$, onda $|A \cup B| = |A' \cup B'|$.
- Ako $|A| = |A'|$ i $|B| = |B'|$, onda $|A \times B| = |A' \times B'|$.
- $|\mathcal{P}(A)| = |{}^{A}\{0,1\}|$.
- **Kantorova teorema.** $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Prebrojivi skupovi

Definicija. $|\mathbb{N}| =: \aleph_0$. Skup A je prebrojiv ako je $|A| = \aleph_0$.

Skup A je neprebrojiv ako nije konačan i nije prebrojiv.

Primeri.

- $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N} \setminus \{3, 6, 100\}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ su prebrojivi;
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv;
- $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.

Skupovi moći kontinuuma

Definicija. $|\mathbb{R}| =: \mathfrak{c}$. Skup A je moći kontinuuma ako je $|A| = \mathfrak{c}$.

Primeri.

- svi intervali su moći kontinuuma;
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je moći kontinuuma;
- $\mathbb{C}$ je moći kontinuuma.

Kantorov dijagonalni argument

Teorema. $(0,1)$ nije prebrojiv, pa $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Zadatak. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ prebrojiv skup. Dokazati da postoji $b \in \mathbb{R}$ tako da $A \cap (b + A) = \emptyset$.

Zadatak. Neka je $\mathcal{F}$ familija krugova u ravni takva da se nikoja dva kruga iz familije ne seku. Dokazati da je $\mathcal{F}$ najviše prebrojiva.