

Diskretne strukture 1

7. čas: Ekvivalencije. Uređenja.

Osobine binarne relacije na skupu S

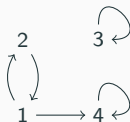
Neka je $\rho \subseteq S \times S$. Kažemo da je ρ :

- refleksivna ako $(\forall x \in S) x \rho x$; (R)
- irefleksivna ako $(\forall x \in S) x \not\rho x$; (I)
- simetrična ako $(\forall x, y \in S)(x \rho y \rightarrow y \rho x)$; (S)
- asimetrična ako $(\forall x, y \in S)(x \rho y \rightarrow y \not\rho x)$; (a)
- antisimetrična ako $(\forall x, y \in S)(x \rho y \wedge y \rho x \rightarrow x = y)$; (A)
- tranzitivna ako $(\forall x, y, z \in S)(x \rho y \wedge y \rho z \rightarrow x \rho z)$. (T)

Pitanje. Šta znači svaka od osobina na slici (grafu relacije)?

Pitanje. Koje osobine zadovoljavaju sledeće relacije na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$:

- ρ data sa:



- σ data sa $x \sigma y$ akko $2x - y > 1$;
- τ data sa $x \tau y$ akko $|x - y| \leq 1$.

Na skupu $\{a, b, c\}$ konstruisati relaciju ρ tako da:

- zadovoljava (R) i (S), ali ne (T);
- zadovoljava (R) i (T), ali ne (S);
- zadovoljava (S) i (T), ali ne (R).

Definicija. Relacija \sim na skupu S je ekvivalencija ako zadovoljava (R), (S) i (T):

- $(\forall x \in S) x \sim x$;
- $(\forall x, y \in S)(x \sim y \rightarrow y \sim x)$;
- $(\forall x, y, z \in S)(x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z)$.

Primer. Za $m \in \mathbb{N}$, na \mathbb{Z} definišemo $x \equiv_m y$ akko $m \mid y - x$, tj. akko $(\exists k \in \mathbb{Z}) y - x = km$. Dokazati \equiv_m je ekvivalencija. Šta su \equiv_0 i \equiv_1 ?

Klasa, količnički skup, transversala

Neka je \sim ekvivalencija na S .

Definicija. Klasa elementa $a \in S$ je skup $[a]_{\sim} = \{x \in S \mid x \sim a\}$.

Definicija. Količnički skup je $S/\sim = \{[a] \mid a \in S\}$.

Definicija. Transverzala je bilo koji skup $T \subseteq S$ koji iz svake klase sadrži tačno jedan element.

Primer. Opisati $[a]_{\equiv_m}$ i odrediti jednu transversalu.

Primer. Na skupu $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ data je ekvivalencija \sim .

Poznato je $a \sim b$, $a \not\sim c$, $a \sim d$, $a \not\sim e$, $c \not\sim e$, $e \sim f$. Izračunati \sim , odrediti klase i sve transverzale.

Tvrđenje.

- $a \in [a]$, pa specijalno $[a] \neq \emptyset$;
- $a \sim b$ akko $[a] = [b]$;
- $a \not\sim b$ akko $[a] \cap [b] = \emptyset$;
- $\bigcup S/\sim = S$.

Dokazati da je relacija \sim ekvivalencija, odrediti klase i transverzalu.

- Na \mathbb{R} , \sim je data sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Z}$.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, \sim je data sa $(x, y) \sim (x', y')$ akko $y = y'$.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, \sim je data sa $(x, y) \sim (x', y')$ akko $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.
- Na \mathbb{R} , \sim je data sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Q}$.

Aksioma izbora. Svaka ekvivalencija ima bar jednu transverzalu.

Definicija. Relacija \leq na skupu S je (parcijalno) uređenje ako zadovoljava (R), (A) i (T):

- $(\forall x \in S) x \leq x$;
- $(\forall x, y \in S)(x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$;
- $(\forall x, y, z \in S)(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$.

Relacija \leq je linearno uređenje ako dodatno važi i:

- $(\forall x, y \in S)(x \leq y \vee y \leq x)$. (L)

Primeri. \leq na \mathbb{R} , \subseteq na $\mathcal{P}(S)$, $|$ na \mathbb{N} .

Definicija. Neka je \leq uređenje na S , $A \subseteq S$ i $a \in S$:

- a je najmanji element skupa A ako $a \in A$ i $(\forall x \in A) a \leq x$;
- a je minimalni element skupa A ako $a \in A$ i $(\forall x \in A) x \not< a$.

Dualno definišemo najveći i maksimalni element.

Tvrđenje. Ako je a najmanji element skupa A , on je jedini najmanji i jedini minimalni element skupa A .

Donje ograničenje i infimum

Definicija. Neka je \leq uređenje na S , $A \subseteq S$ i $a \in S$:

- a je donje ograničenje skupa A ako $(\forall x \in A) a \leq x$;
- a je infimum skupa A ako je a najveći element skupa donjih ograničenja od A .

Dualno definišemo gornje ograničenje i supremum.