Diskretne strukture 1

7. čas: Ekvivalencije. Uređenja.

Osobine binarne relacije na skupu S

Neka je $\rho \subseteq S \times S$. Kažemo da je ρ:

- refleksivna ako $(\forall x \in S)\ x\ \rho\ x$; (R)
- irefleksivna ako $(\forall x \in S)\ x \not\rho\ x$; (I)
- simetrična ako $(\forall x, y \in S)(x\ \rho\ y \to y\ \rho\ x)$; (S)
- asimetrična ako $(\forall x, y \in S)(x\ \rho\ y \to y \not\rho\ x)$; (a)
- antisimetrična ako $(\forall x, y \in S)(x\ \rho\ y \wedge y\ \rho\ x \to x = y)$; (A)
- tranzitivna ako $(\forall x, y, z \in S)(x\ \rho\ y \wedge y\ \rho\ z \to x\ \rho\ z)$. (T)

Pitanje. Šta znači svaka od osobina na slici (grafu relacije)?

Primeri

Pitanje. Koje osobine zadovoljavaju sledeće relacije na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$:

- ρ data sa:

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[d, bend left] & 3 \arrow[loop right] \\ 1 \arrow[u, bend left] \arrow[r] & 4 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

- σ data sa $x \ \sigma \ y$ akko $2x - y > 1$;
- τ data sa $x \ \tau \ y$ akko $|x - y| \leqslant 1$.

Na skupu $\{a, b, c\}$ konstruisati relaciju ρ tako da:

- zadovoljava (R) i (S), ali ne (T);
- zadovoljava (R) i (T), ali ne (S);
- zadovoljava (S) i (T), ali ne (R).

Definicija. Relacija $\sim$ na skupu S je ekvivalencija ako zadovoljava (R), (S) i (T):

- $(\forall x \in S)\ x \sim x$;
- $(\forall x, y \in S)(x \sim y \to y \sim x)$;
- $(\forall x, y, z \in S)(x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)$.

Primer. Za $m \in \mathbb{N}$, na $\mathbb{Z}$ definišemo $x \equiv_m y$ akko $m \mid y - x$, tj. akko $(\exists k \in \mathbb{Z})\ y - x = km$. Dokazati $\equiv_m$ je ekvivalencija. Šta su $\equiv_0$ i $\equiv_1$?

Klasa, količnički skup, transverzala

Neka je $\sim$ ekvivalencija na S.

Definicija. Klasa elementa $a \in S$ je skup $[a]_\sim = \{x \in S \mid x \sim a\}$.

Definicija. Količnički skup je $S/_\sim = \{[a] \mid a \in S\}$.

Definicija. Transverzala je bilo koji skup $T \subseteq S$ koji iz svake klase sadrži tačno jedan element.

Primer. Opisati $[a]_{\equiv_m}$ i odrediti jednu transverzalu.

Primer. Na skupu $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ data je ekvivalencija $\sim$. Poznato je $a \sim b$, $a \nsim c$, $a \sim d$, $a \nsim e$, $c \nsim e$, $e \sim f$. Izračunati $\sim$, odrediti klase i sve transverzale.

Osnovne osobine klasa

Tvrđenje.

- $a \in [a]$, pa specijalno $[a] \neq \varnothing$;
- $a \sim b$ akko $[a] = [b]$;
- $a \nsim b$ akko $[a] \cap [b] = \varnothing$;
- $\bigcup S/_{\sim} = S$.

Primeri

Dokazati da je relacija $\sim$ ekvivalencija, odrediti klase i transverzalu.

- Na $\mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Z}$.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $(x, y) \sim (x', y')$ akko $y = y'$.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $(x, y) \sim (x', y')$ akko $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.
- Na $\mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Q}$.

Aksioma izbora. Svaka ekvivalencija ima bar jednu transverzalu.

Uređenja

Definicija. Relacija $\preccurlyeq$ na skupu S je (parcijalno) uređenje ako zadovoljava (R), (A) i (T):

- $(\forall x \in S)\ x \preccurlyeq x$;
- $(\forall x, y \in S)(x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq x \to x = y)$;
- $(\forall x, y, z \in S)(x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq z \to x \preccurlyeq z)$.

Relacija $\preccurlyeq$ je linearno uređenje ako dodatno važi i:

- $(\forall x, y \in S)(x \preccurlyeq y \lor y \preccurlyeq x)$. (L)

Primeri. $\leqslant$ na $\mathbb{R}$, $\subseteq$ na $\mathcal{P}(S)$, $\mid$ na $\mathbb{N}$.

Najmanji i minimalni elementi

Definicija. Neka je $\preccurlyeq$ uređenje na S, $A \subseteq S$ i $a \in S$:

- a je najmanji element skupa A ako $a \in A$ i $(\forall x \in A)\ a \preccurlyeq x$;
- a je minimalni element skupa A ako $a \in A$ i $(\forall x \in A)\ x \not\prec a$.

Dualno definišemo najveći i maksimalni element.

Tvrđenje. Ako je a najmanji element skupa A, on je jedini najmanji i jedini minimalni element skupa A.

Donje ograničenje i infimum

Definicija. Neka je $\preccurlyeq$ uređenje na S, $A \subseteq S$ i $a \in S$:

- a je donje ogrničenje skupa A ako $(\forall x \in A)\ a \preccurlyeq x$;
- a je infimum skupa A ako je a najveći element skupa donjih ograničenja od A.

Dualno definišemo gornje ograničenje i supremum.