Diskretne strukture 1

6. čas: Relacije.

Skupovni izrazi i iskazne formule

Neka je $\sigma = \sigma(A_1, A_2, \dots, A_k)$ skupovni izraz. Dodeljujemo mu iskaznu formulu $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(p_1, p_2, \dots, p_k)$ na sledeći način:

- ako je $\sigma = A_i$, $\hat{\sigma} = p_i$;
- ako je σ oblika $\sigma_1 \cap \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \hat{\sigma}_2$;
- ako je σ oblika $\sigma_1 \cup \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \vee \hat{\sigma}_2$;
- ako je σ oblika $\sigma_1 \smallsetminus \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \neg\hat{\sigma}_2$;
- ako je σ oblika $\sigma_1 \triangle \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \veebar \hat{\sigma}_2$;
- ako je σ oblika σ_1^c, $\hat{\sigma} = \neg\hat{\sigma}_1$.

Teorema

- Važi $(\forall A_1, \dots, A_k)\ \sigma_1 \subseteq \sigma_2$ akko $\models \hat{\sigma}_1 \rightarrow \hat{\sigma}_2$;
- važi $(\forall A_1, \dots, A_k)\ \sigma_1 = \sigma_2$ akko $\models \hat{\sigma}_1 \leftrightarrow \hat{\sigma}_2$.

Partitivni skup, presek i unija familije skupova

- Partitivni skup skupa A je skup:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\},$$

tj. važi $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow X \subseteq A)$.

Neka je $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ familija skupova:

- presek familije $\mathcal{F}$ je skup:

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I)\ x \in A_i\};$$

- unija familije $\mathcal{F}$ je skup:

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I)\ x \in A_i\}.$$

Komentar. $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$.

Dekartov proizvod

Definicija. Uređeni par elemenata a i b je matematički objekat koji obeležavamo sa (a, b) i koji zadovoljava sledeću osobinu:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

Za element a para (a, b) kažemo da je prva, a za element b da je druga koordinata para.

Slično definišemo i uređene n-torke.

Definicija. Dekartov proizvod skupova A i B je skup:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Slično definišemo proizvod više skupova.

Binarna relacija

Definicija. Binarna relacija između skupova A i B je bilo koji podskup $\rho \subseteq A \times B$.

Ako $(a, b) \in \rho$ pišemo $a \ \rho \ b$ („a je u relaciji sa b"); ako $(a, b) \notin \rho$ pišemo $a \not\rho \ b$ („a nije u relaciji sa b").

Ako je $A = B$, za ρ kažemo da je relacija na A.

Relaciju $\rho \subseteq A \times B$ često skiciramo kao usmeren graf između skupova A i B u kome crtamo strelicu $a \to b$ između $a \in A$ i $b \in B$ akko $a \ \rho \ b$. U slučaju $A = B$, crtamo graf između elemenata skupa A.

Primer. Neka su $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, $\rho = \{(1, b), (1, c), (2, b), (4, c)\}$ i $\sigma \subseteq A \times A$ data sa $x \ \sigma \ y$ akko $|x - y| \leqslant 1$. Skicirati relacije ρ i σ.

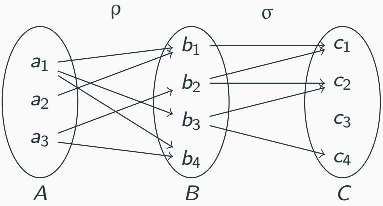
Operacije sa relacijama

Među relacijama između A i B prirodno su definisane operacija $\cap, \cup, \setminus, \triangle, ^c$ (komplement u odnosu $A \times B$).

Definicija. Inverz relacije $\rho \subseteq A \times B$ je relacija $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ data sa $b \ \rho^{-1} \ a$ akko $a \ \rho \ b$.

Definicija. Kompozicija relacija $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$ je relacija $\sigma \circ \rho \subseteq A \times C$ data sa $a \ \sigma \circ \rho \ c$ akko $(\exists b \in B) \ (a \ \rho \ b \ \wedge \ b \ \sigma \ c)$.

Primer. Zapisati i skicirati ρ^{-1} i $\sigma \circ \rho$, gde:



Primeri

Neka $\rho, \rho_1, \rho_2 \subseteq A \times B$, $\sigma \subseteq B \times C$, $\tau \subseteq C \times D$.

- Dokazati $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.
- Dokazati $\rho_1 \subseteq \rho_2$ povlači $\sigma \circ \rho_1 \subseteq \sigma \circ \rho_2$.
- U kom su odnosu $\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2)$ i $(\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2)$?
- U kom su odnosu $\sigma \circ (\rho_1 \setminus \rho_2)$ i $(\sigma \circ \rho_1) \setminus (\sigma \circ \rho_2)$?
- U kom su odnosu $\tau \circ (\sigma \circ \rho)$ i $(\tau \circ \sigma) \circ \rho$?

Osobine binarne relacije na skupu S

Neka je $\rho \subseteq S \times S$. Kažemo da je ρ:

- refleksivna ako $(\forall x \in S)\ x \,\rho\, x$; (R)
- irefleksivna ako $(\forall x \in S)\ x \not\rho\, x$; (I)
- simetrična ako $(\forall x, y \in S)(x \,\rho\, y \to y \,\rho\, x)$; (S)
- asimetrična ako $(\forall x, y \in S)(x \,\rho\, y \to y \not\rho\, x)$; (a)
- antisimetrična ako $(\forall x, y \in S)(x \,\rho\, y \wedge y \,\rho\, x \to x = y)$; (A)
- antisimetrična ako $(\forall x, y, z \in S)(x \,\rho\, y \wedge y \,\rho\, z \to x \,\rho\, z)$. (T)

Pitanje. Šta znači svaka od osobina na slici (grafu relacije)?

Primeri

Pitanje. Koje osobine zadovoljavaju sledeće relacije na skupu $\{1,2,3,4\}$:

- ρ data sa:

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[d, bend left] & 3 \arrow[loop right] \\
1 \arrow[u, bend left] \arrow[r] & 4 \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

- σ data sa $x \ \sigma \ y$ akko $2x - y > 1$;
- τ data sa $x \ \tau \ y$ akko $|x - y| \leqslant 1$.

Ekvivalencije

Na skupu $\{a, b, c\}$ konstruisati relaciju ρ tako da:

- zadovoljava (R) i (S), ali ne (T);
- zadovoljava (R) i (T), ali ne (S);
- zadovoljava (S) i (T), ali ne (R).

Definicija. Relacija $\sim$ na skupu S je ekvivalencija ako zadovoljava (R), (S) i (T):

- $(\forall x \in S)\ x \sim x$;
- $(\forall x, y \in S)(x \sim y \to y \sim x)$;
- $(\forall x, y, z \in S)(x \sim y \land y \sim z \to x \sim z)$.

Primer. Za $m \in \mathbb{N}$, na $\mathbb{Z}$ definišemo $x \equiv_m y$ akko $m \mid y - x$, tj. akko $(\exists k \in \mathbb{N})\ y - x = km$. Dokazati $\equiv_m$ je ekvivalencija. Šta su $\equiv_0$ i $\equiv_1$.

Klasa, količnički skup, transverzala

Neka je $\sim$ ekvivalencija na S.

Definicija. Klasa elementa $a \in S$ je skup:

$$[a]_\sim = \{x \in S \mid x \sim a\}.$$

Definicija. Količnički skup je:

$$S/_\sim = \{[a] \mid a \in S\}.$$

Definicija. Transverzala je bilo koji skup $T \subseteq S$ koji iz svake klase sadrži tačno jedan element.

Primer. Opisati $[a]_{\equiv_m}$ i odrediti jednu transverzalu.

Primer. Na skupu $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ data je ekvivalencija $\sim$. Poznato je $a \sim b$, $a \not\sim c$, $a \sim d$, $a \not\sim e$, $c \not\sim e$, $e \sim f$. Izračunati $\sim$, odrediti klase i sve transverzale.

Osnovne osobine klasa

- $a \in [a]$, pa specijalno $[a] \neq \emptyset$;
- $a \sim b$ akko $[a] = [b]$;
- $a \not\sim b$ akko $[a] \cap [b] = \emptyset$;
- $\bigcup S/_\sim = S$.

Primeri

Dokazati da je relacija $\sim$ ekvivalencija, odrediti klase i transverzalu.

- Na $\mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Z}$.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $(x, y) \sim (x', y')$ akko $y = y'$.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $(x, y) \sim (x', y')$ akko $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.
- Na $\mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Q}$.

Aksioma izbora. Svaka ekvivalencija ima bar jednu transverzalu.