Diskretne strukture 1

5. čas: Teorema potpunosti. Skupovi.

Definicija. Formula φ je *logička posledica* skupa formula Σ, u oznaci $\Sigma \models \varphi$, ako za svaku valuaciju v važi imaplikacija $v \models \Sigma$ povlači $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$.

Primer

- $\emptyset \models \varphi$ akko $\models \varphi$.
- Σ je zadovoljiv akko $\Sigma \not\models \perp$.

Teorema saglasnosti

Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda $\Sigma \models \varphi$.

Definicija. Skup Σ je *konzistentan* ako $\Sigma \nvdash \perp$.

Posledica (Teorema saglasnosti)

Ako je skup Σ zadovoljiv, onda Σ je konzistentan.

Lindenbaumova teorema

Lema. $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$.

Lema. Ako $\Sigma \nvdash \varphi$ i $\psi \in \mathcal{F}$, onda $\Sigma, \psi \nvdash \varphi$ ili $\Sigma, \neg\psi \nvdash \varphi$.

Definicija. Skup formula Σ je *zatvoren za slova* ako za svako slovo $p \in \mathcal{P}$ važi $p \in \Sigma$ ili $\neg p \in \Sigma$.

Lindenbaumova teorema

Pretpostavimo $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathcal{N}\}$.

Ako $\Sigma \nvdash \varphi$, onda postoji skup Σ^* takav da $\Sigma^* \supseteq \Sigma$, Σ^* je zatvoren za slova i $\Sigma^* \nvdash \varphi$.

Teorema potpunosti

Definicija. Za formulu φ i valuaciju v definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases} .$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

Lema. $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.

Lema. Ako je $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_k)$, tada $p_1^v, \ldots, p_k^v \vdash \varphi^v$.

Teorema potpunosti

Definicija. Za formulu φ i valuaciju v definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases} .$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

Lema. $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.

Lema. Ako je $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_k)$, tada $p_1^v, \ldots, p_k^v \vdash \varphi^v$.

Teorema potpunosti

- $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.

Teorema potpunosti

Definicija. Za formulu φ i valuaciju v definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases}.$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

Lema. $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.

Lema. Ako je $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_k)$, tada $p_1^v, \ldots, p_k^v \vdash \varphi^v$.

Teorema potpunosti

- $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.
- Σ je zadovoljiv akko Σ je konzistentan.

Teorema potpunosti

Definicija. Za formulu φ i valuaciju v definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases} .$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

Lema. $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.

Lema. Ako je $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_k)$, tada $p_1^v, \ldots, p_k^v \vdash \varphi^v$.

Teorema potpunosti

- $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.
- Σ je zadovoljiv akko Σ je konzistentan.
- $\vdash \varphi$ akko $\models \varphi$.

Teorema kompaktnosti

Skup formula Σ je zadovoljiv akko je svaki njegov konačan podskup zadovoljiv.

Teorema kompaktnosti

Skup formula Σ je zadovoljiv akko je svaki njegov konačan podskup zadovoljiv.

Primer

Dokazati da se $\mathcal{N}$ može poređati tako da $k \prec m \prec n$ povlači $k + n \neq 2m$.

Intuitivna definicija skupa

Definicija. Skup je celina koja okuplja određeni broj objekata koje nazivamo elementima tog skupa.

Intuitivna definicija skupa

Definicija. Skup je celina koja okuplja određeni broj objekata koje nazivamo elementima tog skupa.

Činjenicu da je objekat x element skupa A zapisujemo sa $x \in A$ (čitamo „x je element od A" ili „x pripada A"); u suprotnom, ako $\neg(x \in A)$, pišemo $x \notin A$.

Intuitivna definicija skupa

Definicija. Skup je celina koja okuplja određeni broj objekata koje nazivamo elementima tog skupa.

Činjenicu da je objekat x element skupa A zapisujemo sa $x \in A$ (čitamo „x je element od A" ili „x pripada A"); u suprotnom, ako $\neg(x \in A)$, pišemo $x \notin A$.

Dva skupa A i B su jednaka, $A = B$, ako imaju iste elemente, tj. važi iskaz:

$$(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Intuitivna definicija skupa

Definicija. Skup je celina koja okuplja određeni broj objekata koje nazivamo elementima tog skupa.

Činjenicu da je objekat x element skupa A zapisujemo sa $x \in A$ (čitamo „x je element od A" ili „x pripada A"); u suprotnom, ako $\neg(x \in A)$, pišemo $x \notin A$.

Dva skupa A i B su jednaka, $A = B$, ako imaju iste elemente, tj. važi iskaz:

$$(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Postoji (jedinstven) skup koji nema elemente, zovemo ga prazan skup i obeležavamo sa $\emptyset$.

Zapisi skupa

- $\{2, 3, 5, 9, 12\}$;

Zapisi skupa

- $\{2, 3, 5, 9, 12\}$;
- $\{3, 4, 5, \dots, 57\}$, $\{1, 3, 5, 7, \dots, 101, 103\}$, $\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$, $\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$;

Zapisi skupa

- $\{2, 3, 5, 9, 12\}$;

- $\{3, 4, 5, \ldots, 57\}$, $\{1, 3, 5, 7, \ldots, 101, 103\}$, $\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$, $\{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$;

- ako je $p(x)$ predikat, $\{x \mid p(x)\}$ je skup svih elemenata (iz $\mathcal{U}_x$) za koje važi predikat p.

Zapisi skupa

- $\{2, 3, 5, 9, 12\}$;

- $\{3, 4, 5, \dots, 57\}$, $\{1, 3, 5, 7, \dots, 101, 103\}$, $\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$, $\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$;

- ako je $p(x)$ predikat, $\{x \mid p(x)\}$ je skup svih elemenata (iz $\mathcal{U}_x$) za koje važi predikat p.

Raselov paradoks. Ako je $S = \{X \mid X \notin X\}$, da li $S \in S$?

Zapisi skupa

- $\{2, 3, 5, 9, 12\}$;

- $\{3, 4, 5, \dots, 57\}$, $\{1, 3, 5, 7, \dots, 101, 103\}$, $\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$, $\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$;

- ako je $p(x)$ predikat, $\{x \mid p(x)\}$ je skup svih elemenata (iz $\mathcal{U}_x$) za koje važi predikat p.

Raselov paradoks. Ako je $S = \{X \mid X \notin X\}$, da li $S \in S$?

U jednom mestu postoji berberin koji brije samo one ljude koji sami sebe ne briju. Da li berberin brije sam sebe?

Podskup

Skup A je podskup skupa B, u oznaci $A \subseteq B$ (i još kažemo da je B nadskup skupa A), ako važi iskaz:

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B).$$

Podskup

Skup A je podskup skupa B, u oznaci $A \subseteq B$ (i još kažemo da je B nadskup skupa A), ako važi iskaz:

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B).$$

- $\emptyset \subseteq A$;
- $A \subseteq A$;
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$.

Presek i unija

- Presek skupova A i B je skup:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$.

Presek i unija

- Presek skupova A i B je skup:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$.

- Unija skupova A i B je skup:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$.

Presek i unija

- Presek skupova A i B je skup:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$.

- Unija skupova A i B je skup:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$.

Pitanje. U kom su odnosu skupovi $A \cap (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cup C$ (u opštem slučaju), i pod kojim uslovom bi oni bili jednaki?

Razlika i simetrična razlika

- Razlika skupova A i B je skup:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$.

Razlika i simetrična razlika

- Razlika skupova A i B je skup:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$.

- Simetrična razlika skupova A i B je skup:

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \Delta B \leftrightarrow x \in A \veebar x \in B)$.

Razlika i simetrična razlika

- Razlika skupova A i B je skup:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$.

- Simetrična razlika skupova A i B je skup:

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \Delta B \leftrightarrow x \in A \veebar x \in B)$.

Komentar. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Komplement

Komplement skupa A je skup:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A^c \leftrightarrow x \notin A)$.

Skupovni identiteti i tautologije

Neka je $\sigma = \sigma(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ skupovni izraz. Dodeljujemo mu iskaznu formulu $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ na sledeći način:

- ako je $\sigma = A_i$, $\hat{\sigma} = p_i$;

- ako je σ oblika $\sigma_1 \cap \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \hat{\sigma}_2$;

- ako je σ oblika $\sigma_1 \cup \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \vee \hat{\sigma}_2$;

- ako je σ oblika $\sigma_1 \setminus \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \neg\hat{\sigma}_2$;

- ako je σ oblika $\sigma_1 \Delta \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \veebar \hat{\sigma}_2$;

- ako je σ oblika σ_1^c, $\hat{\sigma} = \neg\hat{\sigma}_1$.

Skupovni identiteti i tautologije

Neka je $\sigma = \sigma(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ skupovni izraz. Dodeljujemo mu iskaznu formulu $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ na sledeći način:

- ako je $\sigma = A_i$, $\hat{\sigma} = p_i$;

- ako je σ oblika $\sigma_1 \cap \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \hat{\sigma}_2$;

- ako je σ oblika $\sigma_1 \cup \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \vee \hat{\sigma}_2$;

- ako je σ oblika $\sigma_1 \setminus \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \neg\hat{\sigma}_2$;

- ako je σ oblika $\sigma_1 \Delta \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \veebar \hat{\sigma}_2$;

- ako je σ oblika σ_1^c, $\hat{\sigma} = \neg\hat{\sigma}_1$.

Teorema

- Važi inkluzija $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ akko $\models \hat{\sigma}_1 \rightarrow \hat{\sigma}_2$;

- važi identitet $\sigma_1 = \sigma_2$ akko $\models \hat{\sigma}_1 \leftrightarrow \hat{\sigma}_2$.

Dekartov proizvod

Definicija. Uređeni par elemenata a i b je matematički objekat koji obeležavamo sa (a, b) i koji zadovoljava sledeću osobinu:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

Za element a para (a, b) kažemo da je prva, a za element b da je druga koordinata para.

Slično definišemo i uređene n-torke.

Dekartov proizvod

Definicija. Uređeni par elemenata a i b je matematički objekat koji obeležavamo sa (a, b) i koji zadovoljava sledeću osobinu:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

Za element a para (a, b) kažemo da je prva, a za element b da je druga koordinata para.

Slično definišemo i uređene n-torke.

Definicija. Dekartov proizvod skupova A i B je skup:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Slično definišemo proizvod više skupova.