# Diskretne strukture 1

4. čas: Teorema potpunosti.

# Teorema dedukcije

**Tvrđenje**

Neka su $\Sigma$ skup formula i $\varphi, \psi$ dve formule. Tada:

$$\Sigma, \varphi \vdash \psi \quad \text{akko} \quad \Sigma \vdash \varphi \to \psi.$$

# Logička posledica

Valuacija $v$ *zadovoljava* skup formula $\Sigma$, u oznaci $v \models \Sigma$ ako za svaku formulu $\sigma \in \Sigma$ važi $\hat{v}(\sigma) = \mathbf{t}$.

# Logička posledica

Valuacija $v$ *zadovoljava* skup formula $\Sigma$, u oznaci $v \models \Sigma$ ako za svaku formulu $\sigma \in \Sigma$ važi $\hat{v}(\sigma) = \mathbf{t}$.

Skup formula $\Sigma$ je *zadovoljiv* ako postoji valuacija $v$ takva da $v \models \Sigma$.

# Logička posledica

Valuacija $v$ *zadovoljava* skup formula $\Sigma$, u oznaci $v \models \Sigma$ ako za svaku formulu $\sigma \in \Sigma$ važi $\hat{v}(\sigma) = \mathbf{t}$.

Skup formula $\Sigma$ je *zadovoljiv* ako postoji valuacija $v$ takva da $v \models \Sigma$.

Formula $\varphi$ je *logička posledica* skupa formula $\Sigma$, u oznaci $\Sigma \models \varphi$, ako za svaku valuaciju $v$ važi imaplikacija $v \models \Sigma$ povlači $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$.

# Logička posledica

Valuacija $v$ *zadovoljava* skup formula $\Sigma$, u oznaci $v \models \Sigma$ ako za svaku formulu $\sigma \in \Sigma$ važi $\hat{v}(\sigma) = \mathbf{t}$.

Skup formula $\Sigma$ je *zadovoljiv* ako postoji valuacija $v$ takva da $v \models \Sigma$.

Formula $\varphi$ je *logička posledica* skupa formula $\Sigma$, u oznaci $\Sigma \models \varphi$, ako za svaku valuaciju $v$ važi imaplikacija $v \models \Sigma$ povlači $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$.

**Primer**

- $\emptyset \models \varphi$ akko $\models \varphi$.
- $\Sigma$ je zadovoljiv akko $\Sigma \not\models \bot$.

**Teorema saglasnosti**

Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda $\Sigma \models \varphi$.

**Teorema saglasnosti**

Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda $\Sigma \models \varphi$.

Skup $\Sigma$ je *konzistentan* ako $\Sigma \nvdash \bot$.

**Teorema saglasnosti**

Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda $\Sigma \models \varphi$.

Skup $\Sigma$ je *konzistentan* ako $\Sigma \nvdash \bot$.

**Posledica (Teorema saglasnosti)**

Ako je skup $\Sigma$ zadovoljiv, onda $\Sigma$ je konzistentan.

# Lindenbaumova teorema

**Lema.** $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$.

# Lindenbaumova teorema

**Lema.** $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$.

**Lema.** Ako $\Sigma \nvdash \varphi$ i $\psi \in \varphi$, onda $\Sigma, \psi \nvdash \varphi$ ili $\Sigma, \neg\psi \nvdash \varphi$.

# Lindenbaumova teorema

**Lema.** $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$.

**Lema.** Ako $\Sigma \nvdash \varphi$ i $\psi \in \varphi$, onda $\Sigma, \psi \nvdash \varphi$ ili $\Sigma, \neg\psi \nvdash \varphi$.

**Definicija.** Skup formula $\Sigma$ je *zatvoren za slova* ako za svako slovo $p \in \mathcal{P}$ važi $p \in \Sigma$ ili $\neg p \in \Sigma$.

**Lema.** $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$.

**Lema.** Ako $\Sigma \nvdash \varphi$ i $\psi \in \varphi$, onda $\Sigma, \psi \nvdash \varphi$ ili $\Sigma, \neg\psi \nvdash \varphi$.

**Definicija.** Skup formula $\Sigma$ je *zatvoren za slova* ako za svako slovo $p \in \mathcal{P}$ važi $p \in \Sigma$ ili $\neg p \in \Sigma$.

**Lindenbaumova teorema**

Pretpostavimo $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathcal{N}\}$.

Ako $\Sigma \nvdash \varphi$, onda postoji skup $\Sigma^*$ takav da $\Sigma^* \supseteq \Sigma$, $\Sigma^*$ je zatvoren za slova i $\Sigma^* \nvdash \varphi$.

# Teorema potpunosti

**Definicija.** Za formulu $\varphi$ i valuaciju $v$ definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases}.$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

# Teorema potpunosti

**Definicija.** Za formulu $\varphi$ i valuaciju $v$ definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases} .$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

**Lema.** $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.

# Teorema potpunosti

**Definicija.** Za formulu $\varphi$ i valuaciju $v$ definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases}.$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

**Lema.** $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.

**Lema.** Ako je $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_k)$, tada $p_1^v, \ldots, p_k^v \vdash \varphi^v$.

# Teorema potpunosti

**Definicija.** Za formulu $\varphi$ i valuaciju $v$ definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases} .$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

**Lema.** $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.

**Lema.** Ako je $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_k)$, tada $p_1^v, \ldots, p_k^v \vdash \varphi^v$.

**Teorema potpunosti**

- $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.

# Teorema potpunosti

**Definicija.** Za formulu $\varphi$ i valuaciju $v$ definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases}.$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

**Lema.** $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.

**Lema.** Ako je $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_k)$, tada $p_1^v, \ldots, p_k^v \vdash \varphi^v$.

**Teorema potpunosti**

- $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.
- $\Sigma$ je zadovoljiv akko $\Sigma$ je konzistentan.

# Teorema potpunosti

**Definicija.** Za formulu $\varphi$ i valuaciju $v$ definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases}.$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

**Lema.** $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.

**Lema.** Ako je $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_k)$, tada $p_1^v, \ldots, p_k^v \vdash \varphi^v$.

**Teorema potpunosti**

- $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.
- $\Sigma$ je zadovoljiv akko $\Sigma$ je konzistentan.
- $\vdash \varphi$ akko $\models \varphi$.