Diskretne strukture 1

3. čas: Semantika iskazne logike. Prirodna dedukcija.

Iskazne formule

Iskazne formule su konačni nizovi sledećih simbola:

- *iskaznih slova* koje obično zapisujemo malim latiničnim slovima $p, q, r, \dots$, moguće sa indeksima; skup iskaznih slova obeležavamo sa $\mathcal{P}$;
- *logičke konstante* $\perp$ (*kontradikcija*);
- *logičkog veznika* $\rightarrow$ (*implikacija*);
- pomoćnih simbola zagrada.

Iskazne formule dobijamo primenom sledećih pravila u konačno mnogo koraka:

- svako iskazno slovo i konstanta $\perp$ jesu iskazne formule;
- ako su φ i ψ (već izgrađene) iskazne formule, onda je i $(\varphi \rightarrow \psi)$ iskazna formula.

Oznake

$\mathcal{P}(\varphi) =$ konačan skup slova koja se pojavljuju u φ;

$\mathrm{sl}(\varphi) =$ broj znakova $\rightarrow$ u φ;

$\mathcal{F} =$ skup svih formula.

Skraćenice

Zarad kraćeg zapisa iskaznih formula definišemo i sledeće skraćenice:

- formulu $(\varphi \to \bot)$ kraće zapisujemo sa $\neg\varphi$;
- formulu $(\neg\varphi \to \psi)$[1] kraće zapisujemo sa $(\varphi \vee \psi)$;
- formulu $\neg(\varphi \to \neg\psi)$[2] kraće zapisujemo sa $(\varphi \wedge \psi)$;
- formulu $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$[3] kraće zapisujemo sa $(\varphi \leftrightarrow \psi)$;
- formulu $\neg\bot$[4] kraće zapisujemo sa $\top$.

---

[1] tj. $((\varphi \to \bot) \to \psi)$
[2] tj. $((\varphi \to (\psi \to \bot)) \to \bot)$
[3] tj. $(((\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \bot)) \to \bot)$
[4] tj. $(\bot \to \bot)$

Brisanje zagrada

Podrazumevamo da veznik $\neg$ ima najviši prioritet, $\vee$ i $\wedge$ srednji preoritet, a $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$ najniži prioritet, i u skladu sa tim brišemo višak zagrada.

$\neg p \vee q \rightarrow r \wedge \neg s$ je kraće zapisana formula $(((\neg p) \vee q) \rightarrow (r \wedge (\neg s)))$.

Tačnost formule

Valuacija je bilo koje dodeljivanje $v : \mathcal{P} \to \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ istinitosnih vrednosti iskaznim slovima.

Za fiksiranu valuaciju v određujemo istinitosnu vrednost svake formule φ pri valuaciji v, u oznaci $\hat{v}(\varphi)$, rekurento po izgradnji formule na sledeći način:

- $\hat{v}(\perp) = \mathbf{n}$;
- $\hat{v}(p) = v(p)$ za svako slovo $p \in \mathcal{P}$;
- $\hat{v}(\varphi \to \psi)$ računamo po tablici za implikaciju:

$\hat{v}(\varphi)$	$\hat{v}(\psi)$	$\hat{v}(\varphi \to \psi)$
t	**t**	**t**
t	**n**	**n**
n	**t**	**t**
n	**n**	**t**

Zadatak

U skladu sa datim definicijama, vrednosti $\hat{v}(\neg\varphi)$, $\hat{v}(\varphi \vee \psi)$, $\hat{v}(\varphi \wedge \psi)$ i $\hat{v}(\varphi \leftrightarrow \psi)$ računaju se po sledećim tablicama:

$\hat{v}(\varphi)$	$\hat{v}(\neg\varphi)$
t	**n**
n	**t**

i

$\hat{v}(\varphi)$	$\hat{v}(\psi)$	$\hat{v}(\varphi \vee \psi)$	$\hat{v}(\varphi \wedge \psi)$	$\hat{v}(\varphi \leftrightarrow \psi)$
t	**t**	**t**	**t**	**t**
t	**n**	**t**	**n**	**n**
n	**t**	**t**	**n**	**n**
n	**n**	**n**	**n**	**t**

Takođe, $\hat{v}(\top) = \mathbf{t}$, gde je v proizvoljna valuacija.

Tačnost formule zavisi od njenih slova

Teorema

Ako su $p_1, \ldots, p_k$ slova formule φ, i v, w dve valuacije takve da $v(p_i) = w(p_i)$ za sve $i = 1, \ldots, k$, tada je $\hat{v}(\varphi) = \hat{w}(\varphi)$.

Smene u formuli

Zapisom $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ ističemo da su sva slova koja se pojavljuju u formuli φ neka (i možda ne sva) od $p_1, p_2, \ldots, p_k$, tj. da je $\mathcal{P}(\varphi) \subseteq \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.

(Npr. ako je φ formula $p \to q$, možemo da pišemo $\varphi = \varphi(p, q)$ ili $\varphi = \varphi(p, q, r)$, ali nećemo da pišemo $\varphi = \varphi(p)$ ili $\varphi = \varphi(q, r)$.)

Neka su $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ formule. Označavamo sa $\varphi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)$ formulu φ u kojoj smo sva pojavljivanja slova p_i zamenili sa ψ_i za sve $i = 1, \ldots, k$.

(Npr. ako je $\varphi = \varphi(p, q)$ formula $p \to q \wedge p$, onda je $\varphi(p \vee q, s \to r)$ formula $p \vee q \to (s \to r) \wedge (p \vee q)$.)

Glavna lema

Lema

Neka su $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \dots, p_k)$, $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ formule i v valuacija. Tada je:

$$\hat{v}(\varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)) = \hat{w}(\varphi),$$

gde je w bilo koja valuacija takva da $w(p_i) = \hat{v}(\psi_i)$ za sve $i = 1, \dots, k$.

Tautologije

Formula φ je:

- *zadovoljiva* ako za neku valuaciju v važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$;
- *poreciva* ako za neku valuaciju v važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{n}$;
- *tautologija*, u oznaci $\models \varphi$, ako za sve valuacije v važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$ (tj. nije poreciva);
- *kontradikcija* ako za sve valuacije v važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{n}$ (tj. nije zadovoljiva).

Primer

1. Ispitati da li je formula $(p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$ zadovoljiva/poreciva?
2. Dokazati da je formula $(p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)) \wedge (\neg q \vee \neg r) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$ tautologija.

Važne tautologije

- $p \vee \neg p$;
- $\neg(p \wedge \neg p)$;
- $p \rightarrow p$;
- $\neg\neg p \leftrightarrow p$;
- $p \wedge p \leftrightarrow p$;
- $p \vee p \leftrightarrow p$;
- $p \wedge \top \leftrightarrow p$;
- $p \wedge \bot \leftrightarrow \bot$;
- $p \vee \top \leftrightarrow \top$;
- $p \vee \bot \leftrightarrow p$;
- $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$;
- $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$;
- $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$;
- $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$;
- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$;

Važne tautologije

- $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$;
- $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$;
- $(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$;
- $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
- $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
- $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$;
- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$;
- $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$;
- $(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q \to \bot)$;
- $p \wedge (p \to q) \to q$;
- $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$;
- $(p \vee q) \wedge \neg p \to q$;
- $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$.

Smene u tautologiji

Teorema

Neka su $\varphi = \varphi(p_1, \dots, p_k)$, $\psi_1, \dots, \psi_k$ formule i neka je $\models \varphi$. Tada je i $\models \varphi(\psi_1, \dots, \psi_k)$.

Primer

Dokazati da je formula
$(p \leftrightarrow q \vee r) \wedge ((p \leftrightarrow q \vee r) \rightarrow (q \vee r \rightarrow s)) \rightarrow (q \vee r \rightarrow s)$
tautologija.

Ekvivalentne formule

Formule φ i ψ su *logički ekvivalentne*, u oznaci $\varphi \Leftrightarrow \psi$, ako za svaku valuaciju v važi $\hat{v}(\varphi) = \hat{v}(\psi)$, tj. ako je $\varphi \leftrightarrow \psi$ tautologija.

Teorema

Neka su $\varphi_1 = \varphi_1(p_1, \ldots, p_n)$, $\varphi_2 = \varphi_2(p_1, \ldots, p_n)$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ i $\theta_1, \ldots, \theta_n$ formule takve da $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ i $\psi_i \Leftrightarrow \theta_i$ za sve $i = 1, \ldots, n$. Tada je

$$\varphi_1(\psi_1, \ldots, \psi_n) \Leftrightarrow \varphi_2(\theta_1, \ldots, \theta_n).$$

Primer

1. $(\neg p \vee q) \to (r \leftrightarrow s) \;\Leftrightarrow\; \neg(p \to q) \vee (s \leftrightarrow r)$;
2. $(p \to r) \wedge (q \to r) \leftrightarrow (p \vee q \to r)$.

Pravila prirodne dedukcije

$$\frac{\varphi}{\varphi}\,R \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,MP \qquad \frac{\begin{array}{|ll} \varphi & \text{pp} \\ \vdots & \\ \psi & \end{array}}{\varphi \to \psi}\,D \qquad \frac{\begin{array}{|ll} \neg\varphi & \text{pp} \\ \vdots & \\ \bot & \end{array}}{\varphi}\,RAA$$

Zovemo ih *reiteracija*, *modus ponens*, *pravilo dedukcije* i *reductio ad absurdum*.

Dokaz u prirodnoj dedukciji

Neka je Σ skup formula i φ jedna formula. *Dokaz u prirodnoj dedukciji* formule φ iz premisa Σ je konačan niz koraka u kome polazeći od premisa i prateći data pravila zaključivanja dolazimo do zaključka φ.

Primer

1. Iz premisa φ, $\varphi \to \psi$ i $\psi \to \theta$, možemo da zaključimo θ.
2. Iz premisa $\varphi \to \psi$ i $\psi \to \theta$, možemo da zaključimo $\varphi \to \theta$.
3. Bez premisa možemo da zaključimo $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$.

Pišemo $\Sigma \vdash \varphi$ (Σ dokazuje φ, Σ izvodi φ, *sekvent* $\Sigma \vdash \varphi$ je tačan) ako postoji dokaz u prirodnoj dedukciji formule φ iz premisa Σ; u suprotnom $\Sigma \nvdash \varphi$.

Umesto $\emptyset \vdash \varphi$ pišemo samo $\vdash \varphi$ i kažemo da je φ *teorema*.

Izvedena pravila

Sekvent $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$ zapisujemo i sa:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \psi \to \theta}{\varphi \to \theta}\,HS$$

Možemo da ga koristimo kao izvedeno pravilo koje zovemo *hipotetički silogizam*.

Eliminacija i uvođenje negacije:

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\,\neg_E \qquad \frac{\begin{array}{|ll} \varphi & \text{pp} \\ \vdots & \\ \bot & \end{array}}{\neg\varphi}\,\neg_U$$

Ex falso quodlibet:

$$\frac{\bot}{\varphi}\,EFQ$$

Izvedena pravila

Eliminacija i uvođenje duple negacije:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\neg\neg_E \quad \text{i} \quad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\neg\neg_U$$

Uvođenje i eliminacija disjunkcije:

$$\frac{\varphi}{\varphi \lor \psi}\lor_U \quad \frac{\psi}{\varphi \lor \psi}\lor_U \quad \text{i} \quad \frac{\varphi \lor \psi \quad \varphi \to \theta \quad \psi \to \theta}{\theta}\lor_E$$

Disjunktivni silogizmi:

$$\frac{\varphi \lor \psi \quad \neg\varphi}{\psi}DS \quad \text{i} \quad \frac{\varphi \lor \psi \quad \neg\psi}{\varphi}DS$$

Tertium non datur – zakon isključenja trećeg:

$$\frac{}{\varphi \lor \neg\varphi}TND$$

Izvedena pravila

Eliminacija i uvođenje konjunkcije:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge_E \qquad \text{i} \qquad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge_U$$

Eliminacija i uvođenje ekvivalencije:

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \leftrightarrow_E \qquad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \rightarrow \varphi} \leftrightarrow_E \qquad \text{i} \qquad \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \psi \rightarrow \varphi}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow_U$$

De Morganova pravila:

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \vee \neg\psi} DM \quad \frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi} DM \quad \frac{\neg\varphi \vee \neg\psi}{\neg(\varphi \wedge \psi)} DM \quad \frac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg(\varphi \vee \psi)} DM$$

Teorema dedukcije

Tvrđenje

Neka su Σ skup formula i φ, ψ dve formule. Tada:

$$\Sigma, \varphi \vdash \psi \quad \text{akko} \quad \Sigma \vdash \varphi \to \psi.$$