Diskretne strukture 1

2. čas: Matematička indukcija. Iskazne formule.

S prošlog časa

Kako dokazujemo implikaciju $p \to q$?

- *Postupak dedukcije*: Pretpostavimo da važi p i dokazujemo q.
- *Dokaz kontrapozicije*: Pretpostavimo da ne važi q i dokazujemo da ne važi p.
- *Svođenje na protivrečnost*: Pretpostavimo da važi p i ne važi q i tražimo kontradikciju.

Dokaz ekvivalencije

Iskazi $p \leftrightarrow q$ i $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ su ekvivalentni.

Postupak dokaza ekvivalencije

Ako dokazujemo $p \leftrightarrow q$, obično dokazujemo $p \rightarrow q$ i $q \rightarrow p$ nekim od prethodnih postupaka:

Dokazujemo $p \leftrightarrow q$ je tačan iskaz.

($\Rightarrow$) Dokazujemo $p \rightarrow q$.

($\Leftarrow$) Dokazujemo $q \rightarrow p$.

Dakle, $p \leftrightarrow q$ je tačan.

Primer

Neka $n \in \mathbb{N}$. Broj n je paran akko n^2 je paran.

Dokaz univerzalnog iskaza

Postupak generalizacije

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $(\forall x)\, p(x)$ postupamo na sledeći način:

Dokazujemo $(\forall x)\, p(x)$ je tačan iskaz.

> Neka je x proizvoljan element (u $\mathcal{U}_x$).
>
> *Dokazujemo $p(x)$, bez pretpostavki o x.*
>
> Dakle, $p(x)$.

Kako je x bilo proizvoljno, $(\forall x)\, p(x)$ je tačan.

Primer

Za svaki neparan prirodan broj n važi $8 \mid n^2 - 1$.

Matematička indukcija

Skup prirodnih brojeva je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Teorema (Princip matematičke indukcije)

Neka je $p(n)$, $\mathcal{U}_n = \mathbb{N}$, predikat. Ako su tačni iskazi:

(BI) $p(0)$ i

(IK) $(\forall n)(p(n) \to p(n+1))$,

onda je tačan iskaz $(\forall n)\, p(n)$.

Primeri

1. Dokazati $3 \mid 7^n + 2$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
2. Dokazati $2^n > n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Matematička indukcija – varijanta

Teorema (Princip matematičke indukcije)

Neka je $p(n)$, $\mathcal{U}_n = \mathbb{N}$, predikat. Ako su tačni iskazi:

(BI) $p(n_0)$ i

(IK) $(\forall n \geqslant n_0)(p(n) \rightarrow p(n+1))$,

onda je tačan iskaz $(\forall n \geqslant n_0)\, p(n)$.

Primer

Dokazati $2^n > n^2$ za sve $n \geqslant 5$.

Princip potpune indukcije

Teorema (Princip potpune indukcije)

Neka je $p(n)$, $\mathcal{U}_n = \mathbb{N}$, predikat. Ako je tačan iskaz:

$$(\forall n)((\forall k < n)\, p(k) \rightarrow p(n)),$$

onda je tačan iskaz $(\forall n)\, p(n)$.

Primer

1. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisan je sa $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ i $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ za sve $n \geqslant 3$. Dokazati $a_n = 2^n + 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
2. Dokazati da se svaki broj $n \geqslant 24$ može zapisati kao zbir petica i sedmica.