# Diskretne strukture 1

1. čas: Iskazi i predikati. Postupci dokaza.

# Iskazi

### Definicija

*Iskaz* je rečenica ili matematički izraz koji ima istinitosnu vrednost, tj. za koji možemo da kažemo da je tačan ili netačan.

### Primeri

- Ako je ceo broj $n$ deljiv sa 6 onda je $n$ paran. **Tačan iskaz.**
- Skup $\{1, 2\}$ ima tri elementa. **Netačan iskaz.**
- Rešiti jednačinu $x^2 - 3x + 2 = 0$ u skupu $\mathbb{R}$. **Nije iskaz.**
- Tačka $T$ je težište $\triangle ABC$. **Nije iskaz.**
- Za beskonačno mnogo $p \in \mathbb{N}$ važi da su $p$ i $p + 2$ prosti brojevi. **Iskaz nepoznate tačnosti.**
- Za sve tačke $A$ i prave $a$ važi da kroz tačku $A$ prolazi tačno jedan prava paralelna sa pravom $a$. **Iskaz čija je tačnost zavisna od geometrije.**

# Negacija

Tačno obeležavamo sa **t** / netačno sa **n**.

**Definicija**

*Negacija* iskaza $p$ je iskaz „ne $p$" („nije $p$", „ne važi $p$") koji obeležavamo sa $\neg p$. Iskaz $\neg p$ ima suprotnu vrednost od $p$:

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| **t** | **n** |
| **n** | **t** |

# Konjunkcija

## Definicija

*Konjunkcija* iskaza $p$ i $q$ je iskaz „$p$ i $q$" koji obeležavamo sa $p \wedge q$. Iskaz $p \wedge q$ je tačan jedino ako su i $p$ i $q$ tačni:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** |
| **t** | **n** | **n** |
| **n** | **t** | **n** |
| **n** | **n** | **n** |

# (Inkluzivna) disjunkcija

**Definicija**

*Disjunkcija* iskaza $p$ i $q$ je iskaz „$p$ ili $q$" („važi bar jedno od $p$ i $q$") koji obeležavamo sa $p \vee q$. Iskaz $p \vee q$ je tačan ako je bar jedan od $p$ i $q$ tačan:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** |
| **t** | **n** | **t** |
| **n** | **t** | **t** |
| **n** | **n** | **n** |

**Definicija**

*Ekskluzivna disjunkcija* iskaza $p$ i $q$ je iskaz „ili $p$ ili $q$" („važi tačno jedno od $p$ i $q$") koji obeležavamo sa $p \veebar q$. Iskaz $p \veebar q$ je tačan ako je tačno jedan od $p$ i $q$ tačan:

| $p$ | $q$ | $p \veebar q$ |
|---|---|---|
| **t** | **t** | **n** |
| **t** | **n** | **t** |
| **n** | **t** | **t** |
| **n** | **n** | **n** |

# Implikacija

## Definicija

*Implikacija* iskaza $p$ i $q$ je iskaz „ako $p$ onda $q$" („iz $p$ sledi $q$", „$p$ povlači $q$", „$q$, ako $p$", „$p$, samo ako $q$", „$p$ je dovoljan uslov za $q$", „$q$ je potreban uslov za $p$") koji obeležavamo sa $p \to q$. Iskaz $p \to q$ je netačan jedino ako je $p$ tačan i $q$ netačan:

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** |
| **t** | **n** | **n** |
| **n** | **t** | **t** |
| **n** | **n** | **t** |

# Implikacija

Iskaz „Ako je broj $n$ veći od 5, onda je $n$ veći i od 3." je implikacija $n > 5 \rightarrow n > 3$ za koju bismo rekli da je tačna (ne pitajući se koliko je to $n$).

| | $n > 5$ | $n > 3$ | $n > 5 \rightarrow n > 3$ |
|---|---|---|---|
| $n = 6$ | **t** | **t** | **t** |
| $n = 4$ | **n** | **t** | **t** |
| $n = 2$ | **n** | **n** | **t** |

Posmatrajmo iskaz „Ako položiš ispit, kupiću ti telefon.". Kada možemo da kažemo da smo prekršili obećanje?

# Ekvivalencija

**Definicija**

*ekvivalencija* iskaza $p$ i $q$ je iskaz „$p$ ako i samo ako $q$” („$p$ akko $q$”, „$p$ je potreban i dovoljan uslov za $q$”) koji obeležavamo sa $p \leftrightarrow q$. Iskaz $p \leftrightarrow q$ je tačan ako su $p$ i $q$ jednake tačnosti:

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** |
| **t** | **n** | **n** |
| **n** | **t** | **n** |
| **n** | **n** | **t** |

# Primeri

Simbolički zapisati:

- Imaćemo seminarski ili domaći zadatak, ali nećemo imati i seminarski i domaći zadatak.
- Ili i Aca i Bane govore istinu, ili obojica lažu.
- Naručiću ćevape ili Karađorđevu, ali neću ćevape i salatu.
- Ako Aca ili Bane idu, ja sigurno neću.
- Aca je glup, ili nije glup ali je lenj.
- Vuk dlaku menja, ali ćud nikada.
- Gde mačke nema, tu miševi kolo vode.
- Ko pita, ne skita.
- Što je brzo, to je i kuso.
- Ljubav je lepa, ali slepa.

# Promenljiva i univerzum diskursa

## Definicija

*Promenljiva* je simbol koji koristimo da predstavimo matematičke objekte.

Svaka promenljiva ima (najčešće iz konteksta) određen svoj *univerzum diskursa*, tj. skup čije elemente ta promenljiva predstavlja (u kome ta promenljiva uzima vrednosti).

Univerzum diskursa promenljive $x$ obeležavamo sa $\mathcal{U}_x$.

## Primeri

Šta su promenljive i njihovi univerzumi diskursa u sledećim matematičkim izrazima:

$$m \mid n,\ \sin x = \frac{1}{2},\ p \perp q,\ \alpha \parallel \beta,$$

$$AB = d,\ |S| = 5,\ f'(x) = e^x,\ \deg(p) = n.$$

# Predikati

**Definicija**

Rečenica ili matematički izraz u kome figurišu jedna ili više promenljivih, a koji postane iskaz (tačan ili netačan) kada svaka promenljiva uzme konkretnu vrednost iz svog univerzuma diskursa, naziva se *predikat*.

**Primeri**

- $x$ je prost broj;
- $ax^2 + bx + c = 0$;
- $m \mid n$.

# Kvantifikatori

Neka je $p(x)$ predikat. Iskaz „Za svako $x$ iz univerzuma diskursa važi $p$." zapisujemo:

$$(\forall x)\, p(x).$$

Iskaz „Za neko $x$ iz univerzuma diskursa važi $p$." zapisujemo:

$$(\exists x)\, p(x).$$

**Primeri**

Simbolički zapisati:

- Neko nije uradio domaći.
- Sve u toj radnji je preskupo ili nekvalitetno.
- Niko nije savršen.
- Svi koji su bili u kontaktu sa zaraženom osobom moraju u izolaciju.

# Primeri

Dati su predikati $m(x)$: „$x$ je muško”, $r(x, y)$: „$x$ je roditelj od $y$”, $b(x, z)$: „$x$ je u braku sa $y$”. Simbolički zapisati:

- $x$ je otac od $y$;
- $x$ je ujak od $y$;
- $x$ je svastika od $y$.

Pročitati:

- $\neg m(x) \wedge \neg r(x, y) \wedge (\exists z)(m(z) \wedge b(x, z) \wedge r(z, y))$;
- $\neg m(x) \wedge (\exists z)(z \neq x \wedge r(z, y) \wedge (\exists u)(r(u, x) \wedge r(u, z)))$;
- $\neg m(x) \wedge m(y) \wedge (\exists z)(\exists u)[z \neq x \wedge u \neq y \wedge \neg m(z) \wedge b(z, y) \wedge$
  $\wedge m(u) \wedge b(u, x) \wedge (\exists v)(r(v, z) \wedge r(v, u))]$.

# Ograničeni kvantifikatori

Neka je $p(x)$ predikat i $A \subseteq \mathcal{U}_x$. Sa $(\forall x \in A)\, p(x)$ kraće pišemo iskaz:

$$(\forall x)(x \in A \to p(x)),$$

tj. iskaz „Za svaki objekat skupa $A$ važi $p$."

Sa $(\exists x \in A)\, p(x)$ kraže pišemo iskaz:

$$(\exists x)(x \in A \wedge p(x)),$$

tj. iskaz „Za neki objekat skupa $A$ važi $p$."

# Ograničeni kvantifikatori

## Primeri

Simbolički zapisati:

- Kvadrat svakog realnog broja većeg od 1 veći je od njega samog.
- Kvadrat realnog broja iz intervala $(0, 1)$ manji je od njega samog.
- Kvadrat neparnog broja deljiv je sa 8.
- Svaki pozitivan realan broj je kvadrat nekog negativnog broja.

## Nota bene

$(\forall x \in \emptyset)\, p(x) = \mathbf{t}$ i $(\exists x \in \emptyset)\, p(x) = \mathbf{n}$.

# Kvantifikator $\exists_1$

Neka je $p(x)$ predikat. Sa $(\exists_1 x)\, p(x)$ ili $(\exists! x)\, p(x)$ kraće pišemo iskaz:

$$(\exists x)(p(x) \wedge (\forall y)(p(y) \rightarrow y = x)),$$

tj. iskaz „Postoji jedinstven objekat za koji važi $p$."

**Zadatak**

Kako bismo zapisali kvantifikatore $\exists^{=3}$, $\exists^{\geqslant 3}$, $\exists^{\leqslant 3}$, $\exists^{<3}$ i $\exists^{>3}$?

# Kako dokazujemo implikaciju

## Postupak dedukcije

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $p \to q$, postupamo na sledeći način:

Dokazujemo $p \to q$ je tačan iskaz.

> Pretpostavimo da je $p$ tačan.
>
> *Dokazujemo da je $q$ tačan koristeći da je $p$ tačan.*
>
> Dakle, $q$ je tačan.

Dakle, $p \to q$ je tačan.

## Primeri

1. Neka $a, b \in \mathbb{R}$. Ako $0 < a < b$, onda $a^2 < b^2$.
2. Neka $a \in \mathbb{R}$. Ako $a = 2$, onda $a^2 - 3a + 2 = 0$.

# Dokaz kontrapozicije

Implikacije $p \to q$ i $\neg q \to \neg p$ su ekvivalentne (imaju jednake tačnosti).

## Postupak dokaza kontrapozicije

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $p \to q$, možemo da dokažemo $\neg q \to \neg p$ postupkom dedukcije:

Dokazujemo $p \to q$ je tačan iskaz.

> Pretpostavimo da je $q$ netačan.
>
> *Dokazujemo da je $p$ netačan koristeći da je $q$ netačan.*
>
> Dakle, $p$ je netačan.

Dakle, $p \to q$ je tačan.

## Primeri

1. Neka $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a > b$. Ako $ac \leqslant bc$, onda $c \leqslant 0$.
2. Neka $a \in \mathbb{R}$. Ako $a^2 - 3a + 2 = 0$, onda $a \neq 3$.

# Reductio ad absurdum

Implikacije $p \to q$ i $(p \land \neg q) \to \bot$ su ekvivalentne (imaju jednake tačnosti).

### Postupak svođenja na protivrečnost

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $p \to q$, možemo da dokažemo $(p \land \neg q) \to \bot$ postupkom dedukcije:

Dokazujemo $p \to q$ je tačan iskaz.

> Pretpostavimo da je $p$ tačan i $q$ netačan.
>
> *Dokazujemo kontradikciju koristeći pretpostavke.*
>
> Kontradikcija.

Dakle, $p \to q$ je tačan.

### Primer

Neka $a, b \in \mathbb{R}$. Ako $a^2 + b = 13$ i $b \neq 4$, onda $a \neq 3$.