Diskretne strukture 1, 2024/2025, Primer pismenog ispita

1. Koristeći matematičku indukciju dokazati: $18 \mid 6 \cdot 10^n + 12$, za sve $n \geqslant 0$.

2. Dokazati skupovni identitet: $(A \smallsetminus B) \cup C = (A \cup C) \smallsetminus (B \smallsetminus C)$.

3. Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ data je relacija ρ sa: $x \,\rho\, y \overset{\text{def}}{\iff} x - y \leqslant 3$. Ispitati da li je ρ refleksivna, simetrična, antisimetrična, odnosno tranzitivna. U slučaju potvrdnog odgovora dati dokaz, u slučaju negativnog odgovora dati kontraprimer.

4. Neka je $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Dokazati: $f[A] \cap B = \emptyset \iff A \cap f^{-1}[B] = \emptyset$.

5. Rešiti sistem kongruencija: $x \equiv_5 2 \quad x \equiv_6 5 \quad x \equiv_7 4$.

6. Na Ostrvu žive dva plemena: pleme Istinozboraca i pleme Lažova. Ostrvljani se ni po čemu ne razlikuju, osim što Istinozborci uvek govore istinu, dok Lažovi uvek lažu. Stranac na ostrvu je naišao na grupu od šest ostrvljana: A, B, C, D, E, F, i od njih je čuo sledeće informacije:

A je rekao: Bar jedan od D i F je Istinozborac.
B je rekao: F i C su Lažovi.
C je rekao: B i D su Istinozborci.
D je rekao: Ako je A Lažov, onda je i F Lažov.
E je rekao: Ako je D Lažov, onda je A Istinozborac.

Ko je Istinozborac, a ko je Lažov?

Rešenja

1. Baza indukcije. Za $n = 0$ treba da proverimo $18 \mid 6 \cdot 10^0 + 12$. Kako je $6 \cdot 10^0 + 12 = 6 \cdot 1 + 12 = 18$, baza je ispunjena.

Indukcijski korak. Pretpostavimo:

$$18 \mid 6 \cdot 10^n + 12, \tag{IH}$$

i dokažimo $18 \mid 6 \cdot 10^{n+1} + 12$. Računamo:

$$\begin{aligned} 6 \cdot 10^{n+1} + 12 &= 6 \cdot 10^{n+1} + 120 - 120 + 12 \\ &= 10(6 \cdot 10^n + 12) - 120 + 12 \\ &= 10(6 \cdot 10^n + 12) - 108. \end{aligned}$$

Oba sabirka deljiva su sa 18: prvi po (IH), a drugi očigledno, pa je i zbir, tj. $6 \cdot 10^{n+1} + 12$, deljiv sa 18. Završili smo dokaz. ♣

2. I način. Dokaz izvodimo direktno po definiciji.

($\subseteq$) Neka $x \in (A \smallsetminus B) \cup C$; cilj je da dokažemo $x \in (A \cup C) \smallsetminus (B \smallsetminus C)$. Iz $x \in (A \smallsetminus B) \cup C$ imamo dva slučaja:

1. slučaj: $x \in A \smallsetminus B$. Tada $x \in A$ i $x \notin B$. Iz $x \in A$ sledi i $x \in A \cup C$, a iz $x \notin B$ sledi $x \notin B \smallsetminus C$. Dakle, $x \in (A \cup C) \smallsetminus (B \smallsetminus C)$.

2. slučaj: $x \in C$. Tada secijalno i $x \in A \cup C$ i $x \notin B \smallsetminus C$, pa opet $x \in (A \cup C) \smallsetminus (B \smallsetminus C)$.

U oba slučaja smo izveli željeni zaključak, pa smo završili dokaz inkluzije ($\subseteq$).

($\supseteq$) Neka $x \in (A \cup C) \smallsetminus (B \smallsetminus C)$; cilj je da dokažemo $x \in (A \smallsetminus B) \cup C$. Iz $x \in (A \cup C) \smallsetminus (B \smallsetminus C)$ sledi $x \in A \cup C$ i $x \notin B \smallsetminus C$. Razmotrimo dva slučaja: $x \in C$ i $x \notin C$.

1. slučaj: $x \in C$. Tada trivijalno $x \in (A \smallsetminus B) \cup C$.

2. slučaj: $x \notin C$. Tada iz $x \in A \cup B$ sledi $x \in A$, a iz $x \notin B \smallsetminus C$ sledi $x \notin B$, pa $x \in A \smallsetminus B$, odakle i $x \in (A \smallsetminus B) \cup C$.

U oba slučaja smo izveli željeni zaključak, pa smo završili i dokaz inkluzije $(\supseteq)$.

II način. Dokaz izvodimo korišćenjem karakterističnih fukcija. Označimo $L = (A \smallsetminus B) \cup C$ i $D = (A \cup B) \smallsetminus (B \smallsetminus C)$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\chi_L &= \chi_{(A\smallsetminus B)\cup C} \\
&= \chi_{A\smallsetminus B} + \chi C + \chi_{A\smallsetminus B}\chi_C \\
&= (\chi_A + \chi_A\chi_B) + \chi_C + (\chi_A + \chi_A\chi_B)\chi_C \\
&= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_C + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_D &= \chi_{(A\cup C)\smallsetminus(B\smallsetminus C)} \\
&= \chi_{A\cup C} + \chi_{A\cup C}\chi_{B\smallsetminus C} \\
&= \chi_A + \chi_C + \chi_A\chi_C + (\chi_A + \chi_C + \chi_A\chi_C)(\chi_B + \chi_B\chi_C) \\
&= \chi_A + \chi_C + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_B\chi_C + \chi_B\chi_C^2 + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C^2 \\
&= \chi_A + \chi_C + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C + \cancel{\chi_B\chi_C} + \cancel{\chi_B\chi_C} + \cancel{\chi_A\chi_B\chi_C} + \cancel{\chi_A\chi_B\chi_C} \\
&= \chi_A + \chi_C + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

Kako je $\chi_L = \chi_D$, zaključujemo $L = D$. ♣

3. Refleksivnost. Pitanje je da li za svako $x \in \mathbb{R}$ važi $x\,\rho\,x$, tj. $x - x \leqslant 3$. Kako je $x - x = 0$, sledi da ρ jeste refleksivna.

Simetričnost. Pitanje je da li $x\,\rho\,y$ povlači $y\,\rho\,x$, tj. da li $x - y \leqslant 3$ povlači $y - x \leqslant 3$. Kako $x - y \leqslant 3$ povlači (množenjem sa -1) $y - x \geqslant -3$, možemo da posumnjamo da ρ nije simetrična. I zaista, za npr. $x = 1$ i $y = 5$, $x - y = -4 \leqslant 3$, tj. $x\,\rho\,y$, ali $y - x = 4 \nleqslant 3$, pa nije $y\,\rho\,x$; dakle, ρ nije simetrična.

Antisimetričnost. Pitanje je da li $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,x$ povlače $x = y$, tj. da li $x - y \leqslant 3$ i $y - x \leqslant 3$ povlače $x = y$. Ponovo možemo da posumnjamo da ovo nije tačno. Npr. za $x = 1$ i $y = 2$, $x - y = -1 \leqslant 3$ i $y - x = 1 \leqslant 3$, tj. $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,x$, ali $x \neq y$; dakle, ρ nije antisimetrična.

Tranzitivnost. Pitanje je da li $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,z$ povlače $x\,\rho\,z$, tj. da li $x - y \leqslant 3$ i $y - z \leqslant 3$ povlače $x - z \leqslant 3$. Sabiranjem $x - y \leqslant 3$ i $y - z \leqslant 3$ povlače $x - z \leqslant 6$, pa možemo da posumnjamo da ρ nije tranzitivna. I zaista, npr. za $x = 5$, $y = 3$ i $z = 1$, $x - y = 2 \leqslant 3$ i $y - z = 2 \leqslant 3$, tj. $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,z$, ali $x - z = 4 \nleqslant 3$, pa nije $x\,\rho\,z$; dakle, ρ nije ni tranzitivna. ♣

4. $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo $f[A] \cap B = \emptyset$; cilj je da dokažemo $A \cap f^{-1}[B] = \emptyset$. Preptostavimo suprotno, $A \cap f^{-1}[B] \neq \emptyset$. Tada postoji $x \in A \cap f^{-1}[B]$, tj. $x \in A$ i $x \in f^{-1}[B]$. Iz $x \in A$ sledi $f(x) \in f[A]$, a iz $x \in f^{-1}[B]$ sledi $f(x) \in B$. Dakle, $f(x) \in f[A] \cap B$, pa $f[A] \cap B \neq \emptyset$; kontradikcija.

$(\Leftarrow)$ Pretpostavimo $A \cap f^{-1}[B] = \emptyset$; cilj je da dokažemo $f[A] \cap B = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, $f[A] \cap B \neq \emptyset$. Tada postoji $y \in f[A] \cap B$, tj. $y \in f[A]$ i $y \in B$. Iz $y \in f[A]$ sledi da postoji $x \in A$ takav da $y = f(x)$, pa kako $f(x) = y \in B$ dobijamo i $x \in f^{-1}[B]$. Dakle, $x \in A \cap f^{-1}[B]$, pa $A \cap f^{-1}[B] \neq \emptyset$; kontradikcija. ♣

5. I način. Iz $x \equiv_5 2$ sledi $x = 5k + 2$ za $k \in \mathbb{Z}$. Ubacivanjem u $x \equiv_6 5$ dobijamo $5k + 2 \equiv_6 5$, tj. $5k \equiv_6 3$. Kako $(5, 6) = 1$ i $5 \cdot 5 \equiv_6 1$, množenjem prethodne jednakosti sa 5 dobijamo $k \equiv_6 15 \equiv_6 3$; dakle, $k = 6m + 3$, $m \in \mathbb{Z}$, pa je $x = 5k + 2 = 5(6m + 3) + 2 = 30m + 17$, $m \in \mathbb{Z}$. Ubacivanjem u poslednju jednačinu $x \equiv_7 4$ dobijamo $30m + 17 \equiv_7 4$, tj. $2m \equiv_7 1$. Kako je $(7, 2) = 1$ i $2 \cdot 4 \equiv_7 1$, množenjem prethodne jednačine sa 4 dobijamo $m \equiv_7 4$; dakle, $m = 7n + 4$, $n \in \mathbb{Z}$, pa vraćanjem $x = 30m + 17 = 30(7n + 4) + 17 = 210n + 137$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dakle, opšte rešenje je $x = 210n + 137$, $n \in \mathbb{Z}$.

II način. Koristimo algoritam iz dokaza kineske teoreme o ostacima. Označimo $m_1 = 5$, $m_2 = 6$ i $m_3 = 7$, i $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ i $a_3 = 4$. Primetimo da su m_i po parovima uzajamno prosti, pa možemo da primenimo algoritam iz dokaza kineske teoreme. Tada je $M = m_1 m_2 m_3 = 210$, $M_1 = M/m_1 = 42$, $M_2 = M/m_2 = 35$, $M_3 = M/m_3 = 30$. Treba da nađemo p_i, q_i takve da $p_i M_i + q_i m_1 = 1$ za $i = 1, 2, 3$. Za $i = 1$ treba da važi $42p_1 + 5q_1 = 1$. Ako odmah ne vidimo rešenje, koristimo algoritam:

$$\begin{bmatrix} 42 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & 17 \end{bmatrix},$$

pa možemo uzeti $p_1 = -2$ i $q_1 = 17$. Za $i = 2$ treba da važi $35p_2 + 6q_2 = 1$. Rešenje $p_2 = -1$ i $q_2 = 6$ odmah se vidi. Za $i = 3$ treba da važi $30p_3 + 7q_3 = 1$. Imamo:

$$\begin{bmatrix} 30 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 13 \end{bmatrix},$$

pa možemo uzeti $p_3 = -3$ i $q_3 = 13$. Partikularno rešenje dobijamo po formuli:

$$x_0 = p_1 M_1 a_1 + p_2 M_2 a_2 + p_3 M_3 a_3 = -2 \cdot 42 \cdot 2 - 1 \cdot 35 \cdot 5 - 3 \cdot 30 \cdot 4 = -168 - 175 - 360 = -703,$$

pa je opšte rešenje $x = x_0 + Mn = -703 + 210n$, $n \in \mathbb{Z}$. Ako želimo najmanje pozitivno rešenje, ono se jasno dobija za $n = 4$: $x_1 = -703 + 210 \cdot 4 = -703 + 840 = 137$, pa se opšte rešenje može zapisati i u obliku $x = 137 + 210m$, $m \in \mathbb{Z}$. ♣

6. Sa a označimo tačnost iskaza „A je Istinozborac."; b, c, d, e, f imaju slično značenje. Ako A da izjavu tačnosti p, onda je $a = T$ ako i samo ako je A Istinozborac, ako i samo ako $p = T$; dakle, $a = p$. Prema tome iz datih izjava imamo sledeći sistem iskaznih jednačina:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & a & = & d \vee f; \\ (2) & b & = & \neg f \wedge \neg c; \\ (3) & c & = & b \wedge d; \\ (4) & d & = & \neg a \to \neg f; \\ (5) & e & = & \neg d \to a. \end{array}$$

Slova a, d i f imaju najveći broj pojavljivanja, pa ćemo diskutovati po nekom od njih, npr. po a.

I slučaj: $a = N$. Iz (1) sledi $d = f = N$, pa (4) postaje $N = T \to T$, što je kontradikcija. Dakle, u ovom slučaju nemamo rešenje.

II slučaj: $a = T$. Iz (4) direktno sledi $d = T$, a iz (5) $e = T$. Primetimo da je (1) zadovoljeno. Iz (3) imamo $c = b$, pa (2) postaje $b = \neg f \wedge \neg b$. Poslednja jednakost važi ako i samo ako $b = N$ i $f = T$. Sada je i $c = b = N$. Dakle, imamo rešenje $(a, b, c, d, e, f) = (T, N, N, T, T, T)$, tj. A, D, E, F su Istinozborci, a B, C su Lažovi. ♣