## DISKRETNE STRUKTURE 1

JANUAR 1 2025: REŠENJA

**1.** Koristeći matematičku indukciju dokazati: $\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$, za sve $n \geqslant 1$.

*Rešenje.* Baza indukcije: Za $n=1$ treba da proverimo da li je $\frac{1}{2^1}=2-\frac{1+2}{2^1}$, tj. da li je $\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}$, što jeste tačno.

Indukcijski korak: Pretpostavimo da je:

$$\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}; \tag{IH}$$

cilj je da dokažemo:

$$\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}} &\overset{(IH)}{=} 2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\\
&= 2-\frac{2(n+2)}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\\
&= 2-\frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}}\\
&= 2-\frac{n+3}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Završili smo dokaz. ♣

**2.** Dokazati da za proizvoljne skupove $A, B, C$ važi: $A \smallsetminus (B \cup C) \subseteq A \smallsetminus B$. Primerom pokazati da obratna inkluzija ne mora da važi.

*Rešenje.* Najpre dokažimo $A \smallsetminus (B \cup C) \subseteq A \smallsetminus B$.

<u>I način</u>. Pretpostavimo $x \in A \smallsetminus (B \cup C)$. Tada $x \in A$ i $x \notin B \cup C$; iz $x \notin B \cup C$ specijalno važi $x \notin B$. Iz $x \in A$ i $x \notin B$ sledi $x \in A \smallsetminus B$. Dakle, $A \smallsetminus (B \cup C) \subseteq A \smallsetminus B$.

<u>II način</u>. Koristimo karekateristčne funkcije:

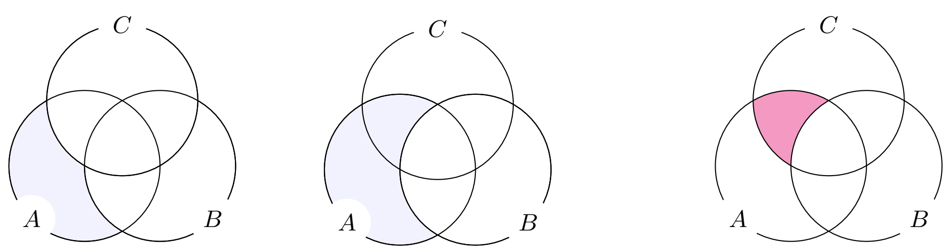
$$\chi_{A \smallsetminus (B \cup C)} = \chi_A + \chi_A(\chi_B + \chi_C + \chi_B\chi_C) = \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C \quad \text{i} \quad \chi_{A \smallsetminus B} = \chi_A + \chi_A\chi_B.$$

Tvrđenje $A \smallsetminus (B \cup C) \subseteq A \smallsetminus B$ ekvivalentno je sa $[A \smallsetminus (B \cup C)] \cap [A \smallsetminus B] = A \smallsetminus (B \cup C)$, tj. sa $\chi_{A \smallsetminus (B \cup C)}\chi_{A \smallsetminus B} = \chi_{A \smallsetminus (B \cup C)}$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\chi_{A \smallsetminus (B \cup C)}\chi_{A \smallsetminus B} &= (\chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C)(\chi_A + \chi_A\chi_B) = \\
&= \chi_A^2 + \chi_A^2\chi_B + \chi_A^2\chi_B + \chi_A^2\chi_B^2 + \chi_A^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C + \chi_A^2\chi_B^2\chi_C = \\
&= \chi_A + \cancel{\chi_A\chi_B} + \cancel{\chi_A\chi_B} + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \cancel{\chi_A\chi_B\chi_C} + \cancel{\chi_A\chi_B\chi_C} + \chi_A\chi_B\chi_C = \\
&= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C = \chi_{A \smallsetminus (B \cup C)}.
\end{aligned}$$

Završili smo dokaz.

Nađimo sada primer skupova $A, B, C$ takvih da je $A \smallsetminus (B \cup C) \subsetneq A \smallsetminus B$. Nacrtajmo Venove dijagrame skupova $A \smallsetminus (B \cup C)$ i $A \smallsetminus B$:




$A \smallsetminus (B \cup C)$ $\qquad$ $A \smallsetminus B$ $\qquad$ $(A \cap C) \smallsetminus B$

Slika nam sugeriše da jednakost $A \smallsetminus (B \cup C) = A \smallsetminus B$ važi ako i samo ako je skup na trećoj slici $(A \cap C) \smallsetminus B$ prazan (ako i samo ako $A \cap C \subseteq B$). Prema tome primer treba da bude takav da je ovaj skup neprazan, tj. mora da postoji element u $A$ i $C$ koji nije u $B$. I najlakše je uzeti baš $A = C = \{x\}$ i $B = \emptyset$. Tada je $A \smallsetminus (B \cup C) = \{x\} \smallsetminus \{x\} = \emptyset$, a $A \smallsetminus B = \{x\} \smallsetminus \emptyset = \{x\}$. ♣

**3.** Neka je $S \neq \emptyset$ i $T \subseteq S$. Na skupu $\mathcal{P}(S)$ data je relacija $\sim$ sa: $A \sim B \overset{\text{def}}{\iff} A \cap T = B \cap T$. Dokazati da je $\sim$ ekvivalencija na $\mathcal{P}(S)$. Ako je $S = \{1,2,3,4\}$ i $T = \{1,2\}$, izračunati klasu $[\{1,3\}]_\sim$.

*Rešenje.* Proverimo najpre da je $\sim$ ekvivalencija.

<u>Refleksivnost</u>. Po definiciji, $A \sim A \iff A \cap T = A \cap T$, što je očigledno.

<u>Simetričnost.</u> Pretpostavimo $A \sim B$, tj. $A \cap T = B \cap T$. Tada je naravno i $B \cap T = A \cap T$, tj. $B \sim A$.

<u>Tranzitivnost.</u> Pretpostavimo $A \sim B$ i $B \sim C$, tj. $A \cap T = B \cap T$ i $B \cap T = C \cap T$. Tada je naravno $A \cap T = C \cap T$, tj. $A \sim C$.

Pretpostavimo sada da je $S = \{1,2,3,4\}$ i $T = \{1,2\}$, i izračunajmo klasu skupa $A := \{1,3\}$. Po definiciji, za $X \subseteq S$, $X \in [A]_\sim \iff X \sim A \iff X \cap T = A \cap T \iff X \cap \{1,2\} = \{1\}$. Dakle, $X$ je podskup od $S$ koji sadrži 1, ali ne sadrži 2. Svi takvi skupovi su:

$$\{1\},\ \{1,3\},\ \{1,4\} \text{ i } \{1,3,4\},$$

pa oni čine klasu skupa $A$. ♣

**4.** Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funkcija data sa $f(x) = x^2$, neka je $A = [-1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ i $B = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$. Izračunati $f[A]$ i $f^{-1}[B]$.

*Rešenje.* Po definiciji direktne slike:

$$\begin{aligned} f[A] &= \{f(x) \colon x \in A\} \\ &= \{x^2 \colon -1 \leqslant x < 2\}. \end{aligned}$$

Za $-1 \leqslant x < 0$ kvadriranjem dobijamo $0 < x^2 \leqslant 1$, a za $0 \leqslant x < 2$ kvadriranjem dobijamo $0 \leqslant x^2 < 4$. Prema tome, $f[A] = (0, 1] \cup [0, 4) = [0, 4)$. (Ovde $[0, 4)$, kao podskup od $\mathbb{C}$, označava skup svih brojeva $a + 0 \cdot i$, gde $0 \leqslant a < 4$.)

Po definiciji inverzne slike, za $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[B] &\iff f(x) \in B \\ &\iff |x^2| < 1 \\ &\iff x^2 < 1 \text{ jer je } x^2 \in \mathbb{R} \\ &\iff -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Dakle, $f^{-1}[B] = (-1, 1)$. ♣

**5.** Rešiti Diofantovu jednačinu: $20x + 16y = 500$. Koliko rešenja zadovoljava uslov $x, y \geqslant 0$?

*Rešenje.* Primetimo da je očigledno $(20, 16) = 4$, i $4 \mid 500$, pa jednačina ima rešenje. Takođe, očigledno, imamo:

$$20 \cdot 1 + 16 \cdot (-1) = 4,$$

pa množenjem sa 125 dobijamo da je $(x_0, y_0) = (125, -125)$ jedno partikularno rešenje naše jednačine. Opšte rešenje dobijamo po formuli:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - k\frac{b}{(a,b)} \\ y &= y_0 + k\frac{a}{(a,b)},\ k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

tj. u našem slučaju rešenje je:

$$\begin{aligned} x &= 125 - 4k \\ y &= -125 + 5k,\ k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

Da bismo videli koliko rešenja zadovoljava uslov $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$, gledamo sistem nejednačina $125 - 4k \geqslant 0$ i $-125 + 5k \geqslant 0$. Iz prve jednačine imamo $4k \leqslant 125$, tj. $k \leqslant \frac{125}{4} < 31.25$, a iz druge da je $5k \geqslant 125$, tj. $k \geqslant \frac{125}{5} = 25$. Dakle, $x, y \geqslant 0$ za celo $k$ koje zadovoljava $25 \leqslant k \leqslant 31.25$, tj. $k \in \{25, 26, 27, 28, 29, 30, 31\}$. Imamo sedam željenih rešenja, i to su:

| $k$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| 25 | 25 | 0 |
| 26 | 21 | 5 |
| 27 | 17 | 10 |
| 28 | 13 | 15 |
| 29 | 9 | 20 |
| 30 | 5 | 25 |
| 31 | 1 | 30 |

(Sama rešenja nisu bila tražena u zadatku.) ♣

**6.** Na Ostrvu žive dva plemena: pleme Istinozboraca i pleme Lažova. Ostrvljani se ni po čemu ne razlikuju, osim što Istinozborci uvek govore istinu, dok Lažovi uvek lažu. Stranac na ostrvu je naišao na grupu od šest ostrvljana: $A, B, C, D, E, F$, i od njih je čuo sledeće informacije:

$A$ je rekao: $F$ je Lažov, a $E$ je Istinozborac.
$B$ je rekao: Ako je $F$ Lažov, onda je $E$ Istinozborac.
$C$ je rekao: $D$ je Istinozborac, a $E$ je Lažov.
$D$ je rekao: $A$ i $C$ su Lažovi.
$E$ je rekao: Bar jedan od $F$ i $B$ je Lažov.

Ko je Istinozborac, a ko je Lažov?

*Rešenje.* Sa $a$ označimo tačnost iskaza „$A$ je Istinozborac."; $b, c, d, e, f$ imaju slično značenje. Ako $A$ da izjavu tačnosti $p$, onda je $a = T$ ako i samo ako je $A$ Istinozborac, ako i samo ako $p = T$; dakle, $a = p$. Prema tome iz datih izjava imamo sledeći sistem iskaznih jednačina:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & a & = & \neg f \wedge e; \\
(2) & b & = & \neg f \rightarrow e; \\
(3) & c & = & d \wedge \neg e; \\
(4) & d & = & \neg a \wedge \neg c; \\
(5) & e & = & \neg f \vee \neg b.
\end{array}$$

Slovo $e$ ima najveći broj pojavljivanja, pa ćemo diskutovati po njemu.

I slučaj. $e = N$. Tada iz (1) imamo $a = N$, iz (3) imamo $c = d$, pa iz (4) dobijamo $d = \neg c$. Ova kontradikcija pokazuje da ovaj slučaj nije moguć.

II slučaj. $e = T$. Iz (2) direktno dobijamo $b = T$, a iz (3) $c = N$. Sada iz (5) sledi $f = N$, pa iz (1) imamo $a = T$, i konačno iz (4) $d = N$. Prema tome imamo jedinstveno rešenje: $(a, b, c, d, e, f) = (T, T, N, N, T, N)$, tj. $A, B, E$ su Istinozborci, a $C, D, F$ su Lažovi. ♣