CRTICA O KARAMATI

(sastavio **Miroslav Pavlović**)

§1

Pre sto godina rodjen je Jovan Karamata, srpski matematičar koji je pokolenjima ostavio rezultate. U današnje vreme, širom matematičkog sveta, poznat je kao utemeljitelj teorije pravilno promenljivih funkcija ([8], [9]) i autor važnih tauberskih† teorema, u kojima se takve funkcije pojavljuju prirodno i neminovno. Svetsku slavu je stekao 1930. godine munjevitim dokazom teoreme Hardija i Litlvuda:

Teorema HL. *Ako je red zbirljiv po Abelu, onda je takav i po Čezaru, pod uslovom da je niz parcijalnih suma ograničen s jedne strane.*

Dokaz je objavljen u dvostranoj crtici‡ *O Hardijevim i Litlvudovim obratima Abelovog stava o neprekidnosti*, [3], čija je vrednost ponovo potvrdjena, posle više od četrdeset godina, izborom u grupu od pedeset najboljih radova objavljenih u listu *Mathematische Zeitschrift* u periodu od 1918. do 1970. godine. Medjutim, vrednost nije samo u novom dokazu kao novom već, mnogo više, u novoj metodi, kojom je Karamata, u drugim radovima, [4, 5], vrlo jednostavno dokazao dublje (¶) i daleko opštije tauberske teoreme. Evo Karamatinog stava:

Hauptsatz. *Iz*

$$(1) \qquad (1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu r^\nu \;\to\; s\ (\in \mathbf{R}) \quad (r\to 1^-)$$

i

$$s_\nu \geqq -M, \quad M = const.,$$

sledi

$$(2) \qquad (1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu g(r^\nu) r^\nu \;\to\; s\int_0^1 g(t)\,dt$$

za svaku funkciju g integrabilnu po Rimanu na intervalu $[0,1]$.

†Euklid $\mapsto$ euklidski

‡Na Mreži je okačen PDF. Popnite se na `www.emis.de`, viknite „Jarbuch Project“ pa, kad se odazovu, „Search“. I tako dalje.

¶kao što je Litlvudova

▶ Svesti na sučaj $s_\nu \geqq 0$ primenom formule $s_\nu = (s_\nu + M) - M$. Zatim, zameniti r sa $r^{1+\alpha}$ u (1); ispašće da (2) važi ako je g polinom. Ako je g proizvoljna, uzeti polinome P i Q tako da bude $P < g < Q$ i $\int(Q - P) < \varepsilon$. To je sve. ◀

Dokaz teoreme HL. U *Hauptsatz* staviti $r = \exp(-1/n)$ $(n \to \infty)$ i $g(r)r$ =krkt.f. intervala $[1/e, 1]$. ◀

§2. Litlvudova teorema

Setimo se, iz Analize II, Abelovog stava o neprekidnosti: *Iz naivne zbirljivosti sledi zbirljivost po Abelu, uz održanje sume,* tj. iz $\lim_n s_n = s$ sledi (1). Obrat ne važi, ali, što prvi primeti

Tauber (1897): *Iz (1) i*

$$a_\nu = s_\nu - s_{\nu-1} = o(1/\nu) \quad \textit{(ovde je „o“ malo)} \tag{3}$$

sledi $\lim_n s_n = s$.

Na to je replicirao[§]

Litlvud (1910): *Tauberova teorema ostaje na snazi ako se* (3) *zameni sa*

$$a_\nu = O(1/\nu) \quad \textit{(ovde je „o“ veliko).} \tag{4}$$

▶ Na vatri naloženoj pod uslovima (1) i (4) zagrevati veličinu $|f(e^{-1/n}) - s_n|$, gde je

$$f(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu = (1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n,$$

ne više od deset minuta. Videće se da je niz s_n ograničen. Zatim, u *Hauptsatz* staviti $g(r)r$ =k.f. intervala $[e^{-\lambda}, e^{-1}]$, pri čemu je $\lambda > 1$ prethodno pripremljeno da, kad ustreba, teži jedinici. Kuvati na tihoj vatri dok se ne pojavi kraj dokaza. .... ◀

§3. Lakunarni redovi

Na Karamatin način, modifikovan kao kod Zigmunda ([7], str. 81–83), može se prići sledećem čistom rezultatu:

[§]Litlvudova replika je izložena na povećem broju strana, [2].

(Gurarij/Macajev [6]**):** *Ako je*

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, r^{2^k} = s \ (\in \mathbf{R}),$$

onda je $\lim_n \sum_{k=0}^{n} a_k = s$. (Tačan je i obrat, prema Abelovom stavu.)

Dakle, dodatnih uslova za koeficijente ovde nema.

Nekoliko datuma

1. **(1897)** A. Tauber, *Ein Satz aus der Theorie der Unendlichen Reihen,* Monatsh. für Mathematik und Physik 8, 273–278.
2. **(1910)** J.E. Littlewood, *The converse on Abel's theorem of power series,* Proc. Lond. Math. Soc. 9, 434–448.
3. **(1930)** J. Karamata, *Über die Hardy–Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes,* Math. Z. 32, 319–320.
4. **(1931)** J. Karamata, *Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian Sätze,* Math. Z. 33, 294–299.
5. **(1931)** J. Karamata, *Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen,* J. Reine Angew. Math. 164, 27–39.
6. **(1966)** V.I. Gurarij & V.I. Macajev, *Lakunarni stepeni redovi u prostorima C i L_p,* Izvestija AN SSSR 30, 3–14. (Na ruskom.)

Literatura

7. A. Zygmund, *Trigonometric series I,* Cambridge University Press, 1958.
8. E. Seneta, *Regularly Varying Functions,* Lecture Notes in Math. 508, 1976.
9. N.H. Bingham & C.M. Goldie & J.L. Teugels, *Regular Variation,* Cambridge Univ. Press, 1987.
10. M. Pavlović, *Uvod u prostore funkcija na disku,* (*neodštampani fajl*)

Rečnik. Red $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ je *zbirljiv po Abelu* (sa sumom s) ako je ispunjen uslov (1), $s_\nu = \sum_{j=0}^{\nu} a_j$.

Red je *zbirljiv po Čezaru* (sa sumom s) ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu = s$. Iz „po Čezaru“ sledi „po Abelu“.

Zadaci za vežbu

(1) Abelov stav

(2) Tauberova teorema

(3) Najslabija tauberska teorema: Ako je red $\sum a_\nu$ zbirljiv po Čezaru i $\nu a_\nu \to 0$, onda je konvergentan.

(4) Hardi je otežao prethodni zadatak stavivši $\nu a_\nu = O(1)$.

(5) Neka je niz $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ograničen i neka je ispunjen uslov (1). Ako je φ apsolutno neprekidna funkcija na segmentu $[0, 1]$ i $\varphi(0) = 0$, onda je

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \, \varphi(r^k) \;=\; \varphi(1)\, s.$$