

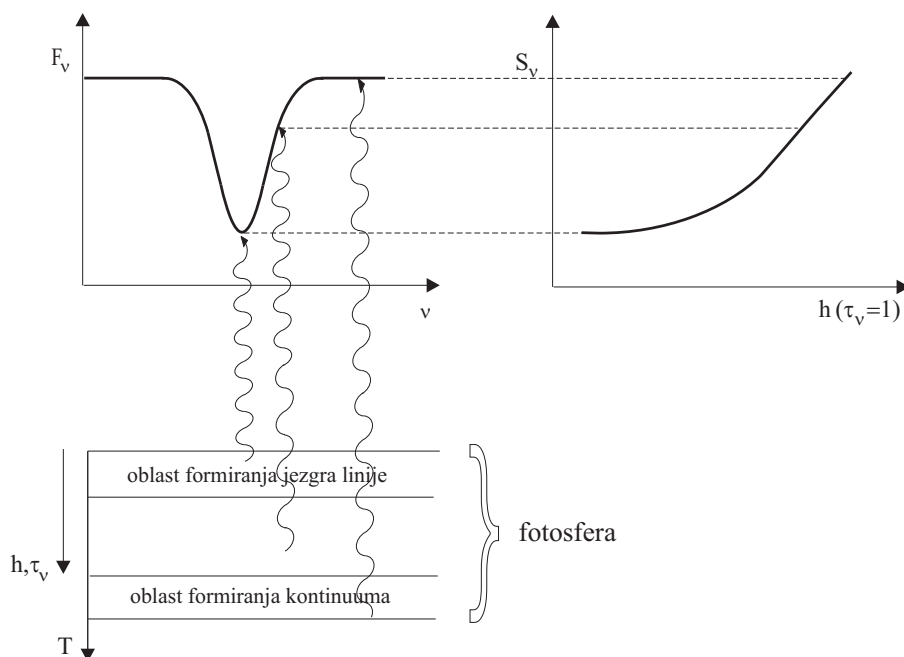
## FORMIRANJE SPEKTRALNIH LINIJA U ZVEZDANIM ATMOSFERAMA

Analiza prenosa zračenja u spektralnim linijama slična je analizi prenosa zračenja u kontinuumu. Razlike pre svega nastaju zbog veće neprozračnosti atmosfere na zračenje u linijama nego u kontinuumu. Na sve nižim temperaturama u atmosferama zvezda sve je više atoma i jona koji u vezano-vezanim prelazima apsorbuju fotone određenih frekvencija. Više energije se apsorbuje na tim diskretnim frekvencijama nego u susednom kontinuumu.<sup>(1)</sup> Tako fotoni u linijama imaju manju srednju slobodnu putanju nego fotoni u kontinuumu ( $l_\nu \propto 1/\alpha_\nu$ ), pa atmosferu mogu napustiti samo iz viših, plićih slojeva. U fotosferi, iz koje se emituje najveća količina zračenja i u kojoj se formira posmatrani apsorpcioni spektar, temperatura opada sa visinom. Ako pretpostavimo, jednostavnosti radi, da svaki sloj u fotosferi emituje kao crno telo (aproksimacija LTR), onda zračenje u liniji potiče iz oblasti niže temperature. U liniji je onda emitovano manje energije nego u susednom kontinuumu pa se javlja apsorpciona linija (sl.1). Dakle, apsorpcione linije nastaju kao posledica velikog koeficijenta apsorpcije u liniji i opadanja temperature sa visinom u atmosferi.

Stvarna situacija je složenija od opisane. Za razliku od zračenja u neprekidnom spektru koje je blisko ravnotežnom, ravnotežna (LTR) emisija u liniji je malo verovatna. Podsetimo se: zračenje u kontinuumu potiče iz dubljih i gušćih slojeva atmosfere u kojima su sudari česti i sudarni procesi dominiraju nad radijativnim. Srednje slobodne putanje čestica su male, gradijent temperature je na rastojanju reda srednje slobodne putanje mali, pa je zračenje praktično u ravnoteži sa materijom. Zato neprekidni spektar zračenja liči na raspodelu zračenja apsolutno crnog tela. Odstupanje od te raspodele, kao što smo videli, postoji, jer se, s jedne strane, koeficijent apsorpcije u kontinuumu menja sa frekvencijom (vidi pog. 'Utica j odstupanja koeficijenta apsorpcije od sivog na raspodelu energije u kontinuumu') a, sa druge, temperatura se od tačke do tačke u atmosferi menja. Zračenje koje primamo predstavlja superpoziciju zračenja sa raznih dubina u atmosferi na kojima vladaju različiti fizički uslovi.

---

<sup>(1)</sup> Ovo se ne vidi u spektru zračenja crnog tela jer takva sredina u linijama i više emituje (apsorpcije su uravnotežene emisijama - mikroreverzibilnost procesa). Međutim, čim se napuste uslovi crnog tela, emisioni i apsorpcioni procesi više nisu uravnoteženi i posmatraju se linije.



**Sl.1.** Formiranje apsorpcione linije u atmosferi zvezde. Pošto zračenje primamo sa jedinične optičke dubine  $\tau_\nu = \alpha_\nu \cdot h \approx 1$  (prema Eddington-Barbier relaciji: sa  $\tau_\nu = 2/3$ ), gde je  $h$  - geometrijska dubina u atmosferi, sledi da zračenje u liniji zbog veće neprozračnosti ( $\alpha_\nu^L \gg \alpha_\nu^c$ ) potiče iz viših atmosferskih slojeva ( $h^L \ll h^c$ ) nego zračenje u kontinuumu. Pošto je temperatura slojeva iz kojih nam stiže zračenje u liniji niža od temperature oblasti u kojima se formira neprekidni spektar ( $T(h^L) < T(h^c)$ ), intenzitet (fluks) zračenja u liniji je manji nego u susednom kontinuumu.

U višim i redjim slojevima u kojima se formiraju linije sudarni procesi su manje verovatni, pa su manje verovatni i procesi termalne apsorpcije/emisije kojima se uspostavlja lokalna ravnoteža gasa i zračenja neposrednim transformacijama energije zračenja u kinetičku energiju čestica gasa, i obrnuto. Veća je verovatnoća da foton koji je apsorbovan u vezano-vezanom prelazu (u liniji) bude *rasejan*, tj. reemitovan u nekom drugom pravcu. Rasejanje dovodi do slabije međusobne povezanosti zračenja sa lokalnim termodinamičkim karakteristikama sredine. U tim višim i redjim slojevima zračenje odstupa od ravnotežnog jer su srednje slobodne putanje fotona velike. Duž njih se temperatura znatno menja. Mnogi fotoni napuštaju atmosferu, pa anizotropnost zračenja postaje sve veća. Dakle, ako je rasejanje značajno, doći će do znatnih odstupanja od lokalne termodinamičke ravnoteže (LTR). U ovom

opštem slučaju kaže se da se linije formiraju u uslovima odstupanja od LTR, odnosno u ne-LTR.

### Sl.1b. Putanja fotona u nizu uzastopnih rasejanja

Foton koji trpi niz rasejanja pre nego što nestane (npr. u sudarnoj deekscitaciji atoma) prelazi neku karakterističnu dužinu  $L \gg l$  (sl.1b), gde je  $l$  – srednja slobodna putanja fotona u liniji data sa  $l = \int l_\nu \varphi_\nu d\nu$  ako pretpostavimo da foton pri rasejanju malo menja frekvenciju (o preraspodeli zračenja unutar profila linije videti kasnije). Tako je polje zračenja u nekoj tački sredine određeno delom i fotonima koji su nastali u oblasti dimenzija  $L$  oko te tačke, pa će zbog toga odstupati od vrednosti koja odgovara lokalnim uslovima ( $T$ ) u toj tački. Sa približavanjem granici atmosfere, verovatnoća da  $L$  obuhvati samu granicu kroz koju fotoni odlaze u okolni prostor, raste. Kao posledica "bekstva" fotona, intenzitet zračenja se u graničnom sloju smanjuje i vrednost funkcije izvora je manja od ravnotežne - Plankove. Dubina na kojoj se funkcija izvora  $S_\nu$  približava Plankovoj  $B_\nu(T)$  naziva se dubinom termalizacije  $\Lambda$  i predstavlja najveću dubinu sa koje fotoni, rasejanjem, imaju šanse da napuste atmosferu. Kao što ćemo videti, dubina termalizacije zavisi od načina na koji su fotoni preraspodeljeni unutar profila linije u procesu rasejanja<sup>(1)</sup>.

---

(1) Apsorbovani foton neke frekvencije u liniji posle niza interakcija zračenja i materije može biti pretvoren u drugi foton proizvoljne frekvencije, tj. energija apsorbovana na frekvenciji u liniji može konačno biti smeštena u kontinuum. Može se desiti, na primer, da se apsorbovani foton frekvencije  $\nu_0$  raseje u nekom drugom pravcu, da zatim bude apsorbovan nekim atomom prouzrokujući njegovu jonizaciju, oslobođeni elektron će posle interakcija sa drugim elektronima rekombinovati sa nekim jonom pri čemu će se emitovati foton proizvoljne frekvencije  $\nu$ . Na mestu  $\nu_0$ , zbog ovog ili sličnih procesa, javlja se manjak zračenja (formira se tamna linija na neprekidnom fonu zračenja).

Osim različitih dubina formiranja, tj. različitih uslova u kojima se formiraju kontinuum i spektralne linije (LTR i ne-LTR, respektivno), značajne su i razlike u obliku koeficijenta apsorpcije za vezano-slobodne i slobodno-slobodne prelaze (u kontinuumu), s jedne strane, i vezano-vezane prelaze (u liniji), sa druge. Za sve tri vrste prelaza koeficijenti apsorpcije zavise od: naseljenosti donjeg nivoa prelaza (koncentracije apsorbera) i verovatnoće prelaza. Medjutim, drastična razlika se javlja u frekventnoj zavisnosti ovih koeficijenata. Dok se koeficijent apsorpcije za prelaze u kontinuumu sporo menja sa frekvencijom ( $\propto \nu^{-3}$ ), zavisnost koeficijenta apsorpcije od frekvencije unutar spektralne linije je izuzetno jaka. Spektralne linije nisu beskonačno uske već imaju odredjenu širinu i oblik. Frekventna zavisnost koeficijenta apsorpcije u liniji (njegov profil  $\varphi_\nu$ ) najneposrednije utiče na oblik (profil) spektralne linije. Profil je posledica više različitih faktora koji deluju na atom u kome se prelaz vrši. O ovim uticajima ćemo detaljnije govoriti malo kasnije.

Atomski koeficijent apsorpcije, tj. koeficijent apsorpcije u liniji po jednom atomu je dat sa:

$$k_\nu^L = \frac{\pi e^2}{mc} f \varphi_\nu (1 - e^{-h\nu/kT}) \quad (1)$$

gde su u prvom članu konstante ( $e$  - naelektrisanje elektrona,  $m$  - masa elektrona,  $c$  - brzina svetlosti),  $f$  je jačina oscilatora, tj. verovatnoća prelaza u liniji koja se dobija ili kvantno-mehaničkim proračunima ili se meri u laboratoriji, a  $\varphi_\nu$  je profil (frekventna zavisnost koeficijenta apsorpcije). Član u zagradi je korekcija za indukovanu emisiju. Efektivan broj apsorpcija je ukupan broj apsorpcija minus broj indukovanih emisija, jer poslednje deluju kao obrnuta (negativna) apsorpcija. Profil  $\varphi_\nu$  je definisan tako da  $\varphi_\nu d\nu$  predstavlja verovatnoću da je apsorbovan foton frekvencije u intervalu  $\nu$  i  $\nu + d\nu$  ( $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\nu d\nu = 1$ ). Vrednost  $\varphi_\nu$  je velika blizu centralne frekvencije linije  $\nu_0$  i vrlo brzo opada na manjim i većim frekvencijama od nje.

Množenjem atomskog koeficijenta apsorpcije u liniji sa brojem apsorbujućih atoma po jedinici zapremine dobija se zapreminski koeficijent apsorpcije u liniji  $\alpha_\nu^L [\text{cm}^{-1}]$ , a množenjem sa brojem apsorbujućih atoma po jedinici mase materije - maseni koeficijent apsorpcije u liniji  $\kappa_\nu^L [\text{cm}^2/\text{g}]$ :

$$\alpha_\nu^L = k_\nu^L n = \kappa_\nu^L \rho \quad (2)$$

Linija se formira vezano-vezanim prelazima u atomu i superponirana je na kontinuum koji potiče od vezano-slobodnih prelaza u tom atomu ili drugim atomima (drugih hemijskih elemenata) u atmosferskom gasu. Ukupni

koeficijent apsorpcije  $\alpha_\nu$  na nekoj frekvenciji  $\nu$  u spektru na mestu gde se nalazi linija sastoji se iz odgovarajućih doprinosa u liniji  $\alpha_\nu^L$  i u kontinuumu  $\alpha_\nu^c$ :  $\alpha_\nu = \alpha_\nu^L + \alpha_\nu^c$ .

### Karakteristike profila spektralne linije

Spektralne linije nisu strogo monohromatske. Linije se odlikuju konačnom širinom i profilom - zračenje se apsorbuje (emituje) unutar određenog opsega talasnih dužina (frekvencija). Profil spektralne linije predstavlja raspodelu intenziteta, tj. fluksa zračenja u funkciji  $\lambda$  ili  $\nu$ . Profil apsorpcione linije neposredno oslikava frekventnu zavisnost koeficijenta apsorpcije u liniji (njegov profil  $\varphi_\nu$ ). Za razliku od koeficijenta apsorpcije u kontinuumu  $\alpha_\nu^c$ , koeficijent apsorpcije u liniji  $\alpha_\nu^L$  se vrlo brzo menja sa frekvencijom unutar linije. Tako,  $\alpha_\nu^c$  možemo smatrati konstantnim unutar profila linije.

Oblik spektralnih linija je određen prvenstveno frekventnom zavisnošću koeficijenta apsorpcije i emisije gasa ( $e_\nu, \alpha_\nu$ ) tj. apsorpcionim  $\varphi_\nu$  i emisijom  $\psi_\nu$  profilom, ali i apsorpcijom i reemisijom zračenja iz dubljih slojeva (prenosom zračenja). Ovde ćemo najpre razmatrati slučaj optički tanke sredine, kada su profili linija određeni samo odgovarajućim profilima apsorpcionog, odnosno emisijonog koeficijenta.

Ako je sredina koja zrači optički tanka, svo emitovano zračenje stiže bez re-apsorpcije i imamo (sl.2a) da je za  $\alpha_\nu^L = 0$ :

$$I_\nu \propto e_\nu^L (= e^L \psi_\nu) \quad (3)$$

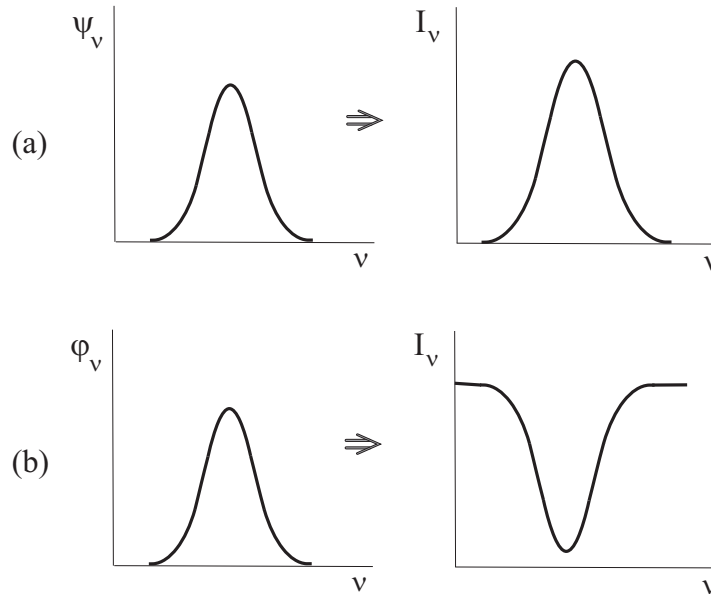
Ako, s druge strane, imamo sredinu koja samo apsorbuje zračenje ( $e_\nu^L = 0$ ), slabljenje intenziteta po prolasku kroz sloj te sredine debljine  $l$  vrši se po eksponencijalnom zakonu:

$$I_\nu = I_o e^{-\alpha_\nu^L l} \quad (4)$$

gde je  $I_o$  - intenzitet upadnog zračenja. Za optički tanak sloj na frekvencijama u liniji ( $\alpha_\nu^L l \ll 1$ ) imamo:

$$I_\nu = I_o (1 - \alpha_\nu^L l) \quad (5).$$

Vidimo (sl.2b) da je na mestu gde profil  $\varphi_\nu$  ima maksimum, najmanji intenzitet izlaznog zračenja u liniji.



**Sl. 2.** Linije formirane u optički tankoj sredini: (a) koja samo emituje na frekvencijama u liniji (emisioni profil  $\psi_\nu$  i emisiona linija); (b) koja samo apsorbuje na frekvencijama u liniji (apsorpcioni profil  $\varphi_\nu$  i apsorpciona linija).

Spektralne linije se karakterišu oblikom (profilom), dubinom i širinom. Različiti delovi jedne linije se formiraju na različitim mestima u atmosferi, tj. fotoni raznih frekvencija u liniji potiču sa različitih dubina u atmosferi. Zbog velikog koeficijenta apsorpcije fotoni koji formiraju jezgro apsorpcione linije imaju manje srednje slobodne putanje, pa potiču iz gornjih slojeva atmosfere, koje imaju šanse da napuste. S druge strane, fotoni koji formiraju krila linije, zbog malog koeficijenta apsorpcije, imaju veće srednje slobodne putanje pa potiču iz dubljih slojeva (sve do sloja koji je karakterističan za formiranje kontinuuma). Tako je spektralna linija značajno sredstvo za dijagnostiku fizičkih osobina atmosfere u znatnom opsegu dubina (sl.2c).

Veličine koje karakterišu spektralnu liniju i koje se mogu meriti su:

- (a) profil ili remanentni intenzitet (fluks)
- (b) ekvivalentna širina linije.

Jedna veličina koja karakteriše liniju je remanentni intenzitet: odnos intenziteta na nekoj frekvenciji unutar linije prema interpolovanom intenzitetu neprekidnog spektra na toj frekvenciji

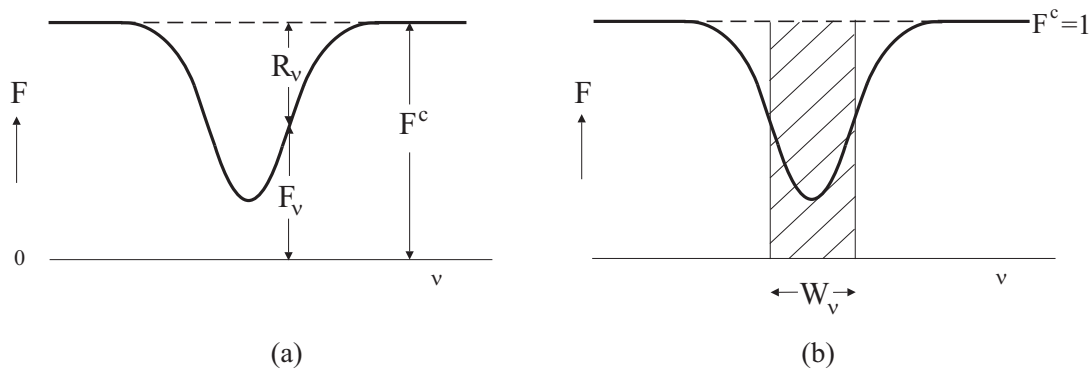
$$r_\nu = \frac{I_\nu}{I^c} \quad . \quad (6a)$$

Analogno se definiše remanentni fluks:

$$r_\nu = \frac{F_\nu}{F^c} . \quad (6b)$$

Njegova minimalna vrednost je centralni remanentni intenzitet (fluks)  $r_{\nu_0}$ .  $R_\nu = 1 - r_\nu$  je dubina linije:

$$R_\nu = \frac{F^c - F_\nu}{F^c} = 1 - \frac{F_\nu}{F^c} = 1 - r_\nu . \quad (7)$$



**Sl.3.** Raspodela energije u okolini spektralne linije: (a) Na frekvenciji u liniji fluks  $F_\nu$  je manji nego fluks u kontinuumu  $F^c$ ;  $R_\nu$  je dubina linije u jedinicama fluksa u kontinuumu; (b) Ekvivalentna širina linije  $W_\nu$  je širina koju ima pravougaona linija dubine  $R_\nu = 1$  i iste ukupne apsorbovane energije (površine) kao stvarna linija.

Veličina koja je mera ukupne količine energije apsorbovane u liniji je ekvivalentna širina linije  $W_\nu$ . Ona predstavlja površinu omeđenu konturom - profilom linije:

$$W_\nu = \int_0^\infty R_\nu d\nu = \int_0^\infty (1 - r_\nu) d\nu . \quad (8)$$

Često se pod intenzitetom ili jačinom linije podrazumeva upravo ekvivalentna širina linije. U definisanju ekvivalentne širine se takodje može koristiti intenzitet ili fluks.

Ekvivalentna širina je širina (u angstromima ili nm) potpuno crne linije pravougaonog oblika čija je površina jednaka površini omeđenoj profilom stvarne spektralne linije.

## Koeficijent apsorpcije u liniji

Videli smo (jedn.(2)) da se zapreminski koeficijent apsorpcije u liniji  $\alpha_\nu^L$  može izraziti preko odgovarajućeg masenog  $\kappa_\nu^L$ , odnosno atomskog koeficijenta apsorpcije  $k_\nu^L$ :

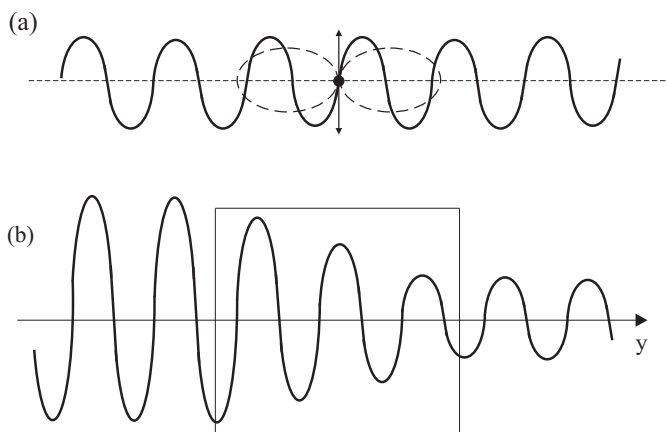
$$\alpha_\nu^L = \kappa_\nu^L \rho = k_\nu^L n = k^L \varphi_\nu n . \quad (9)$$

Ovde je  $\rho$  - gustina apsorbujuće materije,  $n$  - koncentracija apsorbera,  $k^L$  - srednji atomski koeficijent apsorpcije u liniji, a  $\varphi_\nu$  - frekventna zavisnost (profil) koeficijenta apsorpcije.

### *Klasični izraz za koeficijent apsorpcije u liniji*

Izraz za koeficijent apsorpcije u liniji se može jednostavno izvesti iz klasične elektromagnetne teorije.

Razmatramo slabljenje zračenja pri prolasku kroz neku sredinu kao posledicu njegove interakcije sa atomima te sredine. Najjednostavniji model interakcije zračenja sa atomima je model interakcije ravnog elektromagnetnog talasa sa dipolnim oscilatorima u kojima se negativno naelektrisanje drži u ravnoteži elastičnom silom  $F = -kx$ . Neka na sloj u kome ima  $N$  takvih oscilatora u jedinici zapremine pada ravan elektromagnetni talas koji se prostire u pravcu  $y$ -ose, a čiji električni vektor leži duž  $x$ -ose.



**Sl.4.** (a) Prostiranje svetlosti u pravcu  $y$ -ose (normalno na pravac oscilovanja naelektrisanja). Isprekidana kriva je dijagram zračenja oscilatora u funkciji pravca; (b) Slabljenje talasa pri prolasku kroz apsorbujući sloj.



Na naelektrisanje deluje električno polje ravnog talasa:

$$E = E_o e^{i(\omega t - ky)} = E_o e^{i\omega(t - (\frac{k}{\omega})y)} = E_o e^{i\omega(t - \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_o} \frac{y}{c})} . \quad (10)$$

Ovde je  $k = 2\pi/\lambda$  - talasni broj,  $\omega = 2\pi\nu$  - kružna frekvencija upadnog elektromagnetnog talasa,  $v = \omega/k = c/n$  - brzina prostiranja talasa,  $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_o}$  - indeks refrakcije sredine. Vezana naelektrisanja će biti uvučena u kretanje sa frekvencijom bliskoj osnovnoj (rezonantnoj)  $\omega_o = \sqrt{k/m}$ ,  $m$  = masa elektrona [ $m\ddot{x} = -kx$ ].

Ubrzano naelektrisanje je i samo izvor elektromagnetnog zračenja (sl. 4a). Od upadnog snopa oduzima deo energije i rasejava u drugim pravcima. Samo se deo apsorbovane energije upadnog elektromagnetnog talasa vraća u pravcu prvobitnog svetlosnog snopa. Tako intenzitet svetlosnog snopa, proporcionalan kvadratu amplitude talasa  $E^2$ , slabi pri prolasku kroz sloj - svetlost se apsorbuje. To slabljenje se, kao što ćemo videti, može opisati pomoću imaginarnog dela kompleksnog indeksa refrakcije (prelamanja).

Razmotrimo izraz za indeks refrakcije:

$$n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_o} .$$

Razlog za  $\varepsilon \neq \varepsilon_o$  je razdvajanje vezanih naelektrisanja (dipola) pod dejstvom polja  $\vec{E}$ . Ovaj odnos predstavlja odnos ukupnog električnog polja (polja talasa  $E$  + polja razdvojenih naelektrisanja) i polja talasa  $E$ .

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = \frac{E + 4\pi N \cdot e \cdot x}{E} = 1 + \frac{4\pi N \cdot e \cdot x}{E} . \quad (11)$$

$N$  je broj dipola u jedinici zapremine koji mogu apsorbovati zračenje frekvencije  $\omega(\nu)$ ,  $e \cdot x$  - dipolni moment,  $4\pi$ - faktor koji zavisi od sistema jedinica (u CGS sistemu).

Pomeranje  $x$  možemo dobiti ako razmatramo jedan oscilator koji osciluje duž  $x$ -ose pod dejstvom polja  $\vec{E}$ . Elektron je prinudjen na oscilovanje upadnim talasom ako je  $\omega \approx \omega_o$ , tj. ako se javi rezonancija ( $\omega$  - frekvencija upadnog talasa,  $\omega_o = \sqrt{k/m}$  - sopstvena frekvencija elektrona). Prema klasičnoj teoriji zračenja, frekvencija apsorbovanog (emitovanog) zračenja oscilatora poklapa se sa sopstvenom frekvencijom njegovog oscilovanja pod dejstvom restitucione sile  $-kx$ . Medjutim, pored "slobodnog oscilovanja" na sopstvenoj učestanosti  $\omega_o$  postoje još dve sile koje deluju na klasični oscilator:

1) oscilator se prinudjuje na oscilovanje upadnim talasom na  $\omega \approx \omega_o$  (sila koja deluje je  $eE = eE_o e^{i\omega t}$ );

2) oscilovanje je prigušeno jer bez upadnog zračenja koje ga pobudjuje na oscilovanje energija oscilatora bi se postepeno smanjivala s obzirom da on neprekidno zrači elektromagnetne talase; gubitke energije oscilatora zračenjem možemo razmatrati kao dejstvo sile trenja (koćenja usled zračenja) koja je proporcionalna brzini oscilovanja:  $-m\gamma\dot{x}$ .

Izjednačavanjem svih sila koje deluju na elektron sa  $m\ddot{x}$  dobijamo jedinačinu oscilovanja harmonijskog oscilatora:

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - m\omega_0^2x + eE_0e^{i\omega t} \quad (12)$$

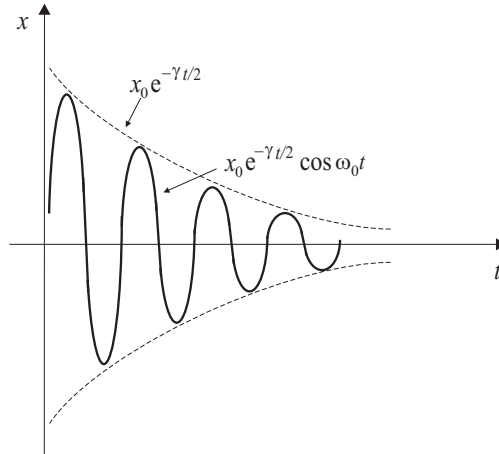
gde je

$$\gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3} \quad (13)$$

- konstanta prigušenja - brzina kojom ubrzano naelektrisanje gubi energiju ( $W(t) = W_0e^{-\gamma t}$ ).

Rešenje jednačine je oblika:  $x = x_0e^{i\omega t}$ . Zamenom prvog i drugog izvoda u jednačinu (12) imamo:

$$x = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (14)$$



### Sl.5. Prigušeno harmonijsko oscilovanje.

Zamenom (14) u (11) i koristeći činjenicu da je za malo  $\delta$ :  $\sqrt{1 + \delta} \approx 1 + \delta/2$ , za indeks prelamanja imamo:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} - i \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (15)$$

odnosno

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \tilde{n} = n - in^* \quad (16)$$

kompleksni indeks prelamanja u dielektriku koji se sastoji od oscilatora - vezanih naelektrisanja.

Kako je

$$E = E_0 e^{i\omega[t - (n - in^*)\frac{y}{c}]} = E_0 e^{-\omega n^* y/c} \cdot e^{i\omega(t - \frac{n}{c}y)} \quad (17)$$

vidimo da se amplituda talasa eksponencijalno prigušuje pri prolasku kroz sloj sa  $N$  oscilatora.

Kako je zakon slabljenja intenziteta zračenja po prolasku kroz apsorbujući sloj dat i sa:

$$I = I_0 e^{-\kappa_\nu \rho y} \quad (18)$$

izjednačavanjem tog izraza sa izrazom za intenzitet zračenja proporcionalan kvadratu amplitude talasa

$$I = E_0^2 \cdot e^{-2\frac{\omega n^*}{c}y} = I_0 \cdot e^{-2(\omega/c)n^*y} \quad (19)$$

dobijamo da je

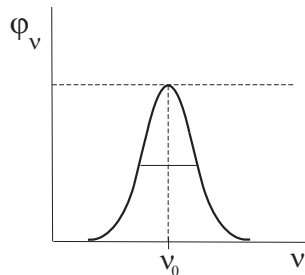
$$\alpha_\nu^L = \kappa_\nu^L \rho = 2\frac{\omega}{c}n^* = \frac{4\pi N e^2}{mc} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \frac{4\pi N e^2}{mc} \frac{\gamma \omega^2}{4\omega^2 \cdot \Delta\omega^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$\alpha_\nu^L = N \left( \frac{\pi e^2}{mc} \right) \frac{\gamma}{\Delta\omega^2 + (\gamma/2)^2} \quad (20)$$

(pošto je  $\omega \approx \omega_0$ ,  $\omega_0^2 - \omega^2 \approx (\omega_0 - \omega) \cdot 2\omega = 2\omega\Delta\omega$ ).  $N$  je broj oscilatora u jedinici zapremine koji mogu apsorbovati na frekvencijama unutar linije čija je centralna frekvencija  $\omega_0$ . Koristeći  $\omega = 2\pi\nu$  gornji izraz se može prepisati:

$$\alpha_\nu^L = \kappa_\nu^L \rho = k_\nu^L N = N \left( \frac{\pi e^2}{mc} \right) \frac{1}{\pi} \frac{(\gamma/4\pi)}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2} = N \frac{\pi e^2}{mc} \varphi_\nu^L \quad (21)$$

Profil  $\varphi_\nu^L$  se naziva Lorencovim (sl.6). Ima maksimum na  $\omega = \omega_o$  tj. na  $\nu = \nu_o$ , a na  $\Delta\omega = \gamma/2$  tj. na  $\Delta\nu = \gamma/4\pi$  ima polovinu svoje maksimalne vrednosti. Zato se  $\gamma$  zove širinom disperzionog (Lorentz-ovog) profila.



### Sl.6. Lorentzov profil

Profil apsorpcione linije je tesno povezan sa profilom koeficijenta apsorpcije  $\varphi_\nu^L$ . Za tanak sloj debljine  $\Delta l$ :

$$I_\nu = I_\nu^o e^{-\kappa_\nu \rho \Delta l} = I_\nu^o (1 - \kappa_\nu \rho \Delta l) \quad (22)$$

odnosno

$$I_\nu^o - I_\nu \approx \kappa_\nu \rho \Delta l I_\nu^o, \quad (23)$$

smanjenje intenziteta pri prolasku kroz sloj direktno je proporcionalno  $\kappa_\nu$  (vidi profil linije na sl.7). Maksimalna dubina profila je na  $\nu = \nu_o$ . Polupoluširina profila = polovina širine linije na polovini maksimalne dubine je

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\gamma}{4\pi} \quad (24)$$

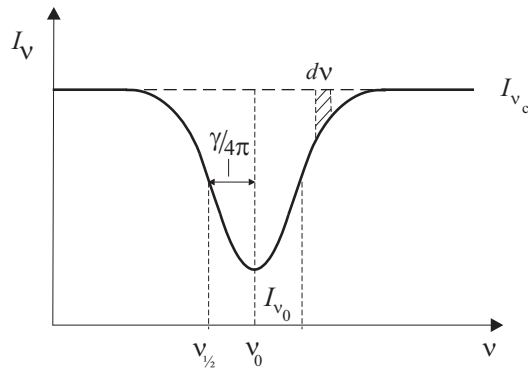
U jedinicama talasne dužine

$$\Delta\lambda_{1/2} = \frac{2}{3} \frac{\pi e^2}{mc^2} = 0.00012 \text{Å}$$

odnosno dvostruka vrednost - poluširina (širina na polovini maksimalne dubine) je

$$2\Delta\lambda_{1/2} = 0.00024 \text{Å} \quad (25)$$

što je vrlo mala vrednost i ista je za sve linije.



### Sl.7. Profil prirodno proširene linije

Integracijom atomskog koeficijenta apsorpcije (vidi (21)) po svim frekvencijama

$$\int_0^\infty k_\nu^L d\nu = \frac{\pi e^2}{mc} \quad (26)$$

dobijamo da je energija po atomu koja je apsorbovana u liniji ista za sve atome i sve linije.

Pošto merenja pokazuju da je  $\int k_\nu^L d\nu$  različito za različite linije, uvedena je jačina oscilatora  $f_{ij}$  da koriguje jačinu harmonijskog oscilatora za kvantno - mehaničke efekte. Ona je povezana sa verovatnoćom prelaza u datom atomu <sup>(3)</sup> i karakteriše sposobnost atoma da predje iz  $i$  u  $j$  stanje. Tako je  $\int k_\nu^L d\nu = \frac{\pi e^2}{mc} \cdot f_{ij}$ .

Kvantna mehanika zahteva 2 modifikacije klasičnog izraza (21):

1) Klasična konstanta prigušenja  $\gamma$  se zamenjuje sa novom konstantom prigušenja  $\Gamma_{rad}$  definisanom preko Ajnštajnovih verovatnoća prelaza;

2) Broj oscilatora  $N$  se zamenjuje sa  $n_i f_{ij}$  - brojem atoma u stanju  $i$  sposobnih da apsorbuju zračenje koje dovodi do prelaza  $i \rightarrow j$ .

Kvantno-mehanička formula za koeficijent apsorpcije je onda:

$$\kappa_\nu \rho = k_\nu n_i = \frac{\pi e^2}{mc} n_i f_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{rad}/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_{rad}/4\pi)^2} \quad (27)$$

<sup>(3)</sup> Kako je  $\alpha_\nu^L = \kappa_\nu^L \rho = k_\nu^L n_i = \frac{h\nu}{4\pi} \varphi_\nu (n_i B_{ij} - n_j B_{ji})$ , integral  $\int k_\nu^L d\nu$  mora biti jednak verovatnoći apsorpcije pomnoženoj sa energijom kvanta za dati prelaz ( $h\nu$ ):  $\int k_\nu^L d\nu = \frac{h\nu}{4\pi} B_{ij} = \frac{\pi e^2}{mc} f_{ij}$ .

## Prirodno širenje spektralne linije

*Klasično objašnjenje* konačne širine prirodno proširene linije koristi koncepciju **prigušenog harmonijskog oscilatora**. Oscilator u toku vremena gubi energiju:

$$W = W_o e^{-\gamma t} \quad (28)$$

dok se amplituda oscilovanja menja po zakonu (sl.5):

$$x_o(t) = x_o e^{-(\gamma/2)t} \quad . \quad (29)$$

S obzirom da se karakteristike oscilovanja menjaju u toku vremena, oscilator može da apsorbuje (emituje) i na frekvencijama malo drugačijim od svoje rezonantne frekvencije <sup>(4)</sup>.

*Kvantno objašnjenje* prirodne širine linije je u **konačnoj širini energetskeg nivoa** između kojih se vrši prelaz u liniji (sl.8). Širina energetskeg nivoa  $\Delta W$  i vreme života tog nivoa  $\tau$ , tj. vreme boravka elektrona na tom energetskeg nivou su, prema Hajzenbergovoj relaciji neodredjenosti:

$$\Delta W \cdot \tau \approx h \quad (30)$$

medjusobno povezani.

Po analogiji sa klasičnim oscilatorima koji gube energiju brzinom  $\gamma$  sledi da je

$$\frac{dW}{dt} = -\Gamma W \quad (31)$$

Za razliku od klasične teorije, atomi mogu zračiti samo u kvantima energije  $h\nu$ . Izračena energija je onda:

$$W = n_j h\nu \quad , \quad (32)$$

gde je  $n_j$  - naseljenost gornjeg nivoa prelaza, pa sledi da je brzina smanjenja naseljenosti nivoa  $n_j$ :

$$\frac{dn_j}{dt} = -\Gamma n_j \quad . \quad (33)$$

---

<sup>(4)</sup> Samo je neprekidni talasni niz konstantne amplitude strogo monohromatski. Zračenje koje emituje (kao i ono koje može da apsorbuje) prigušeni oscilator je promenljivih karakteristika i daje liniju konačne širine i profila  $\propto \frac{1}{(\nu - \nu_o)^2}$ .

Pošto za svaki prelaz koji polazi sa  $j$ -tog nivoa na niži nivo  $i$  možemo da pišemo:

$$\frac{dn_{ji}}{dt} = -A_{ji}n_j \quad , \quad (34)$$

gde je  $A_{ji}$  - verovatnoća spontanog prelaza, sledi da je smanjenje naseljenosti nivoa  $j$  spontanim prelazima dato izrazom:

$$\frac{dn_j}{dt} = \sum_{i<j} \frac{dn_{ji}}{dt} = -n_j \sum_i A_{ji} \quad . \quad (35)$$

Oдавde vidimo da je kvantno-mehanička "konstanta prigušenja"  $\Gamma_j$  - brzina smanjenja naseljenosti  $j$ -tog nivoa, jednaka sumi verovatnoća svih spontanih prelaza sa  $j$  nivoa na niže nivoe, tj. obrnuto srazmerna srednjem vremenu života atoma u  $j$ -tom stanju:

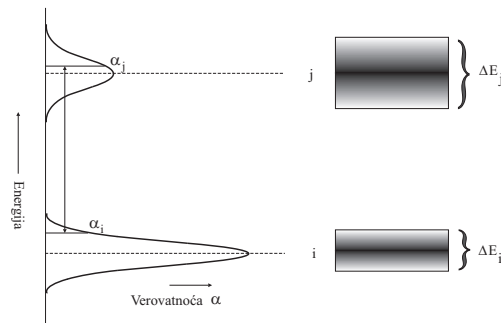
$$\Gamma_j = \sum_{i<j} A_{ji} = \frac{1}{\tau_j} \quad . \quad (36)$$

Širina prirodno proširene linije koja nastaje pri prelazu između  $i$ -tog i  $j$ -tog nivoa je onda:

$$\Gamma_{rad} = \Gamma_{ij} = \Gamma_i + \Gamma_j \quad . \quad (37)$$

U slučaju jakog polja zračenja moraju se uzeti u obzir i ostali prelazi u atomu - apsorpcije i indukovane emisije:

$$\Gamma_j = \sum_{i<j} A_{ji} + \sum_{i<j} B_{ji} I_{\nu ji} + \sum_{i'>j} B_{ji'} I_{\nu ji'} \quad . \quad (38)$$



**Sl.8.** Konačne širine energetskih nivoa između kojih se vrši prelaz u liniji ( $\Delta W_i \propto 1/\tau_i \propto \Gamma_i$ ).

## Doplerovo širenje

Doplerovo širenje je posledica termalnog kretanja atoma (apsorbera / emitera). Rezultat je Doplerovog efekta, tj. prividne promene talasne dužine primljenog zračenja u odnosu na talasnu dužinu zračenja koje apsorbuje/emituje atom koji se kreće u odnosu na nas kao posmatrača.

U trenutku apsorpcije/emisije neki atomi se kreću ka posmatraču, a neki od njega pri čemu je promena  $\Delta\lambda$  u prvom slučaju negativna, a u drugom pozitivna. Pomak u talasnoj dužini (frekvenciji) koji potiče od atoma čija je radijalna brzina  $v_r$  dat je Doplerovom formulom:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v_r}{c} . \quad (39)$$

Pošto mi primamo zračenje velikog broja atoma koji se kreću u raznim pravcima i različitim  $v_r$  doći će do širenja spektralne linije. Čak i da atomi apsorbuju/emituju samo zračenje na centralnoj frekvenciji  $\nu = \nu_0$  u liniji (da zanemarimo konačnu širinu energetske nivoa) posmatrač će videti zračenje u konačnom opsegu frekvencija.

Raspodela atoma po radijalnim brzinama data je sa:

$$\frac{dn(v_r)}{n} = \frac{n(v_r)dv_r}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-v_r^2/\alpha^2} \frac{dv_r}{\alpha} \quad (40)$$

gde je  $dn(v_r)$  - deo atoma koji ima radijalne brzine u intervalu  $(v_r, v_r + dv_r)$ , a  $\alpha = \sqrt{2kT/m}$  je najverovatnija brzina.

Frekventni pomak koji odgovara najverovatnijoj brzini  $\alpha$  je

$$\frac{\Delta\nu_D}{\nu_0} = \frac{\Delta\lambda_D}{\lambda_0} = \frac{\alpha}{c} \quad (41)$$

tj.

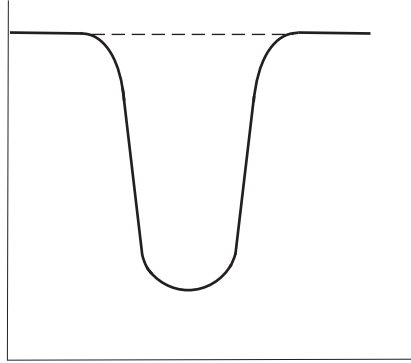
$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \alpha = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} . \quad (42)$$

Deo atoma koji apsorbuje (emituje) zračenje u intervalu  $(\nu, \nu + d\nu)$  će onda biti:

$$\frac{dn(\nu)}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\Delta\nu^2/\Delta\nu_D^2} \frac{d\nu}{\Delta\nu_D} = \varphi_\nu^D d\nu , \quad (43)$$

odnosno  $\varphi_\nu^D$  je verovatnoća da atom ima takvu radijalnu brzinu da frekvencija apsorbovana/emitovana na  $\nu_0$  bude posmatrana na  $\nu$ .





### Sl.9. Doplerovo širenje apsorpcione linije

U tankom sloju, intenzitet zračenja apsorbovan na nekoj  $\nu(\lambda)$  proporcionalan je broju čestica koje apsorbuju na toj  $\nu(\lambda)$ .

Intenzitet apsorbovan u nekoj traci  $d\nu$  prema intenzitetu apsorbovanom u celoj liniji je

$$\frac{(I_\nu^0 - I_\nu)d\nu}{\int_L (I_\nu^0 - I_\nu)d\nu} = \frac{n(v_r)dv_r}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-v_r^2/\alpha^2} \frac{dv_r}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2} \frac{d\nu}{\Delta\nu_D} = \varphi_\nu^D d\nu \quad (44)$$

Profil

$$\varphi_\nu^D = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} e^{-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2} \quad (45)$$

naziva se Doplerov (Gausov) profil. Za  $\nu = \nu_0$  (centar linije),  $\varphi_{\nu_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D}$ . Za  $\nu = \nu_{1/2}$  (frekvencija na kojoj linija dostiže polovinu maksimalne dubine):  $\varphi_{\nu_{1/2}} = 1/2\varphi_{\nu_0}$ , odakle se dobija da je polu-poluširina Doplerovski proširene linije:

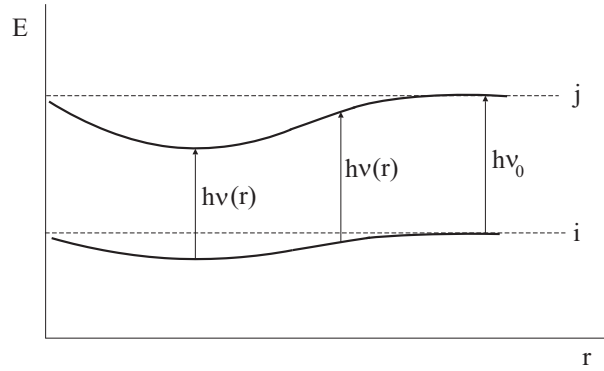
$$\Delta\nu_{1/2} = \Delta\nu_D \sqrt{\ln 2} = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} \ln 2} \quad (46)$$

Na primer, za H $\beta$  liniju ( $\lambda_0 = 4861\text{\AA}$ ) na Suncu (T=5800K) Doplerova poluširina linije iznosi  $0.264\text{\AA}$  i 1000 puta je veća od poluširine prirodno proširene linije ( $2\Delta\lambda_p = 0.00024\text{\AA}$ ).

### Sudarno širenje (širenje pritiskom)

Sudarno širenje nastaje kao posledica medjudejstva atoma koji apsorbuju (emituju) zračenje sa drugim česticama (jonima, elektronima, atomima, molekulima).

Usled interakcija sa okolnim česticama, atomski nivoi razmatranog prelaza se deformišu (trpe promene) i njihova energija se menja što dovodi do pomaka u frekvenciji spektralne linije. Veličina te deformacije (promene) zavisi od rastojanja  $r$  medju apsorbujućom i poremećajnom česticom. Može se očekivati da se energija gornjeg nivoa menja znatno jače nego donjeg. Na slici 10 je pokazano kako potencijalna energija nivoa  $E$  zavisi od rastojanja  $r$  do poremećajne čestice. Kada je poremećajna čestica na velikom rastojanju od apsorbera/emitera ne dolazi do deformacije energetskog nivoa i energija prelaza je  $h\nu_0$ . Medjutim, na manjim rastojanjima poremećajne čestice energija prelaza je  $h\nu(r_i) \neq h\nu_0$ . U zavisnosti od prostorne raspodele perturbatora i oblika krivih energije, ukupan doprinos svih apsorbera/emitera koji se nalaze duž pravca vizure može biti ne samo širenje linije već i njeni asimetrija i pomak.



**Sl. 10.** Zavisnost energije atomskih nivoa  $i$  i  $j$  i prelaza medju njima od rastojanja  $r$  do poremećajne čestice.

Postoje dve vrste perturbacija: diskretnim sudarima (sudarno širenje) i statističkim efektima više čestica (širenje pritiskom). Sudarno širenje je značajnije od statističkih efekata u jezgru linije, dok obrnuto važi u krilima.

Zavisnost veličine deformacije nivoa (promene energije nivoa perturbovane čestice) od rastojanja  $r$  izmedju čestice i perturbatora može se aproksimirati stepenim zakonom oblika:

$$\Delta W(r) = \frac{a}{r^n} \quad (47)$$

gde je  $a$  - konstanta,  $n$  - ceo broj koji zavisi od tipa medjudejstva. Odavde se za promenu frekvencije spektralne linije može dobiti sledeći izraz:

$$\Delta\nu(r) = \frac{1}{h} [\Delta W_j(r) - \Delta W_i(r)] = \frac{C_n}{r^n} \quad (48)$$

Konstanta medjudejstva  $C_n$  se meri ili izračunava za svaki prelaz (liniju) i svaki tip medjudejstva.

### Tablica

n	tip	apsorber	perturber	linija
2	linerni Štarkov efekat	H i He <sup>+</sup>	joni i e <sup>-</sup>	nepomerena, simetrično proširena
4	kvadratični Štarkov efekat	atomi ≠ H	joni i e <sup>-</sup>	asimetrija i pomak
3	rezonantno širenje	neutralni atomi	atomi iste vrste	nepomerena, simetrično proširena
6	van der Waalsovo	neutralni atomi	uglavnom H	širenje i pomak

Koeficijent apsorpcije usled širenja pritiskom (sudarima) ima takodje Lorentzov profil sa  $\Gamma_{coll}$  umesto  $\Gamma_{rad}$ . Na velikim pritiscima, pored prigušenja oscilatora usled zračenja imamo i prigušenje usled sudara. Ako je  $\tau_c$  - srednje vreme izmedju dva sudara u gasu, konstanta prigušenja usled sudara (frekvencija sudara) je  $\Gamma_{coll} = 2/\tau_c$ .

### Kombinovani koeficijent apsorpcije

Profil linije je najčešće proširen sa sva 3 efekta (prirodno + Doplerovo + sudarno) istovremeno. Konačan profil predstavljaće konvoluciju odgovarajućih profila.

#### *Konvolucija dve funkcije*

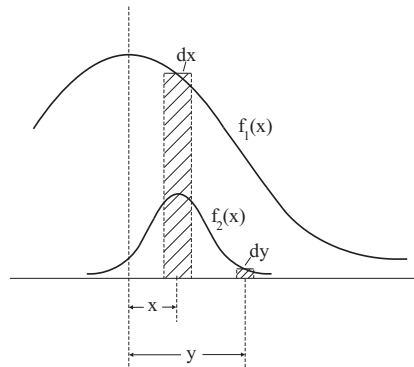
Označimo sa  $f_1(x)$  ( $x = \Delta\lambda$ ) profil koji odgovara jednom mehanizmu širenja spektralne linije. Kada bi delovao samo taj mehanizam širenja energija unutar linije bi bila raspodeljena samo po profilu  $f_1(x)$ . Medjutim, ako deluje i drugi mehanizam širenja (profila  $f_2$ ) energija unutar pravougaonika površine  $f_1(x)dx$  biće preraspodeljena drugim mehanizmom po profilu  $f_2(y)$  sa centrom u tački  $x$ . Tako će energija u intervalu  $(y, dy)$  kao rezultat preraspodele energije  $f_1(x)dx$  profilom  $f_2(y)$  biti:

$$f_1(x)dx f_2(y - x)dy \quad .$$

Ona je jednaka energiji unutar elementa kombinovanog profila  $d(f_c(y)dy)$  koji se dobija sumiranjem doprinosa svih elementarnih pravougaonika, tako

da za konvoluciju dve funkcije raspodele konačno imamo sledeći izraz:

$$f_c(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y-x) dx \quad . \quad (49)$$



**Sl. 11.** Konvolucija dva profila<sup>(1)</sup>.

Konvolucija dva disperziona (Lorencova) profila

$$f_1(x) = \frac{A}{x^2 + a^2}$$

$$f_2(x) = \frac{B}{x^2 + b^2}$$

je novi disperzioni profil

$$f_3(x) = \frac{C}{x^2 + c^2}$$

---

<sup>(1)</sup> Ako je  $f_3(x)$  konvolucija funkcija  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$ , za Furijeove transformacije tih funkcija  $F_1(k)$ ,  $F_2(k)$  i  $F_3(k)$  važi:

$$F_3(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx f_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-y)} e^{-iky} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y) dy$$

tj.

$$F_3(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) e^{-iky} dy \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-y) e^{-ik(x-y)} d(x-y) = F_1(k) \cdot F_2(k) \quad .$$

čija je poluširina jednaka  $c = a + b$ .

Konvolucija dva Gausova profila

$$f_1(x) = Ae^{-(x/a)^2}$$

$$f_2(x) = Be^{-(x/b)^2}$$

je novi Gausov profil

$$f_3(x) = Ce^{-(x/c)^2}$$

čija je poluširina jednaka  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Konvolucija Lorencovog i Gausovog profila naziva se Fojtov (Voigt) profil.

### Fojtov profil

Doplerovo pomeranje centralne frekvencije  $\nu_0$  prirodno proširenog profila zavisi od brzine apsorbujuće čestice ( $\Delta\nu = \nu_0 v_r/c$ ).

Zato posmatrajmo najpre koeficijent apsorpcije po jednoj apsorbujućoj čestici  $k_\nu$ . Za česticu koja ima radijalnu brzinu  $v_r$ ,  $\nu_0$  je pomereno za  $\Delta\nu_0 = \nu_0 v_r/c$ , pa je koeficijent apsorpcije dat sa:

$$k_\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f \frac{\Gamma_p + \Gamma_{coll}}{4\pi^2} \frac{1}{[\nu - (\nu_0 + \nu_0 v_r/c)]^2 + (\frac{\Gamma_p + \Gamma_{coll}}{4\pi})^2} . \quad (50)$$

Pošto na frekvenciji  $\nu$  ne apsorbuje samo dati atom sa brzinom  $v_r$  već i svi atomi sa radijalnim brzinama od  $-\infty$  do  $+\infty$ , sumiranjem dobijamo zapreminski koeficijent apsorpcije na frekvenciji  $\nu$ :

$$\alpha_\nu = \int k_\nu dn = \int k_\nu n(v_r) dv_r . \quad (51)$$

S obzirom da je raspodela atoma po brzinama data izrazom (40):

$$\frac{n(v_r) dv_r}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} e^{-v_r^2/\alpha^2} dv_r$$

konačno imamo:

$$\alpha_\nu = \frac{\pi e^2}{mc} n f \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} \frac{\Gamma_{uk}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-v_r^2/\alpha^2} dv_r}{[\nu - \nu_0(1 + v_r/c)]^2 + (\frac{\Gamma_{uk}}{4\pi})^2} . \quad (52)$$

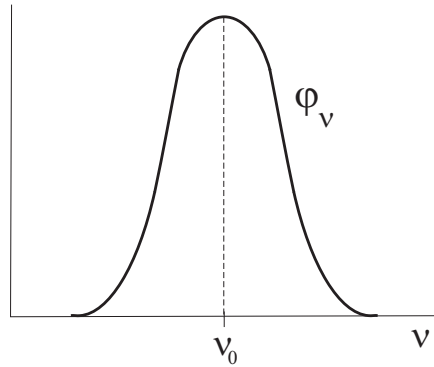
tj.

$$\alpha_\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f n \varphi_\nu^V \quad (53)$$

gde je

$$\varphi_\nu^V = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} H(a, b) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(b-y)^2 + a^2} \quad (54)$$

Fojtov profil. Ovde su  $a = \frac{\Gamma/4\pi}{\Delta\nu_D}$ ,  $b = \frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}$  i  $y = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}$ .



**Sl. 12.** Fojtov profil.

## Kriva rasta

Videli smo da je koeficijent apsorpcije u liniji

$$\alpha_\nu = k_\nu n = \frac{\pi e^2}{mc} \varphi_\nu n f(1 - \exp(-h\nu_0/kT))$$

funkcija koncentracije apsorbera  $n$ , tj. zastupljenosti hemijskog elementa i fizičkih uslova, pri čemu je

$$\varphi_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} H(a, b)$$

frekventna zavisnost koeficijenta apsorpcije - profil (u opštem slučaju Fojtov)

Ako se linija formira u uslovima LTR onda se pomoću jednačine

$$I_\nu(0, \mu) = \int_0^\infty B_\nu(T) e^{-\tau_\nu/\mu} \frac{d\tau_\nu}{\mu}$$

može izračunati intenzitet zračenja na frekvencijama  $\nu$  unutar linije. Za to je potrebno znati fizičke uslove na svim dubinama u atmosferi. Rezultat je raspodela intenziteta u funkciji frekvencije - profil linije. Profil ili oblik linije je složena funkcija velikog broja različitih fizičkih veličina, pa je tako i potencijalni izvor velikog broja informacija o uslovima u zvezdanim atmosferama. Međutim, ovu informaciju nije lako dobiti jer je, s jedne strane, teško dobiti dobra posmatranja profila jedne linije, a sa druge, ima još dosta neodređenosti u teoriji.

Umesto profila se često koristi jačina spektralne linije, odnosno ekvivalentna širina linije - širina potpuno crne pravougaone linije (nultog remanentnog intenziteta) u kojoj je apsorbovana ista količina energije kao i u stvarnoj liniji.

Ekvivalentna širina zavisi od zastupljenosti apsorbera, pa se koristi za njegovo odredjivanje. Za razne vrednosti zastupljenosti nekog hemijskog elementa izračunavaju se profili, tj. ekvivalentne širine neke njegove spektralne linije i porede se sa posmatranim. Iz najboljeg slaganja računata i posmatrane vrednosti ekvivalentne širine izvodi se zaključak o zastupljenosti. Da bi se povećala tačnost koristi se veći broj linija jednog hemijskog elementa.

Jačina spektralne linije raste sa porastom broja apsorbera (atoma ili jona koji je proizvode). Kriva rasta je grafički prikaz veze između ovih veličina. Na njoj je data zavisnost logaritma ekvivalentne širine linije od

logaritma proizvoda broja apsorbera i jačine oscilatora, tj.  $\log W_\nu$  vs.  $\log Nf$ .  $N$  može biti ili broj apsorbera nad  $\text{cm}^2$  fotosfere ili broj apsorbera po gramu zvezdane materije. Koristi se logaritam navedenih veličina s obzirom na to da se za određivanje zastupljenosti može koristiti više oblika analize krivih rasta koji koriste različite multiplikativne faktore uz  $W_\nu$  ili  $Nf$ , pa se takve različite krive onda razlikuju samo u njihovoj nultoj tački. Krivu rasta možemo konstruisati za jednu određenu spektralnu liniju menjajući broj apsorbera. Tako je npr. na slici dat profil linije K CaII sa porastom broja apsorbera. Kada je broj apsorbera mali, linija je plitka i proširena uglavnom Doplerovim efektom. Pošto je maksimum Maksvelove raspodele po komponentama brzina na nultoj brzini, najveća apsorpcija je na nultom Doplerovom pomaku (centar linije). Ako broj apsorbera raste ali ostaje mali u poredjenju sa brojem fotona, energija koja je apsorbovana na bilo kojoj frekvenciji unutar linije raste proporcionalno broju apsorbera. Širina linije malo raste, pa i površina omeđena profilom takodje raste ( $W_\nu \propto N$ ). Sa daljim povećanjem broja jona dubina linije i ekvivalentna širina sporije rastu, jer ima više jona nego fotona koji bi bili apsorbovani. Pošto centar linije postane potpuno crn dalje povećanje broja jona ne može na njega više uticati. Medjutim, ima još dosta jona koji mogu da apsorbuju u krilima linije, na talasnim dužinama daleko od centra. Za jake linije važi

$$W_\nu \propto \sqrt{Nf(\gamma_{\text{rad}} + \gamma_{\text{coll}})}.$$

Razmotrimo sada jedan pojednostavljeni primer. Pretpostavimo da na jednu stranu homogenog sloja debljine  $l$  pada kontinualno zračenje. Sloj sadrži atome koji mogu da apsorbuju samo u datoj liniji. Ako je  $I_c$  - upadni intenzitet na frekvenciji u okolini linije koji pada normalno na sloj, izlazni intenzitet će biti:

$$I_\nu = I_c e^{-\tau_\nu}$$

gde je

$$\tau_\nu = k_\nu nl = k^L nl \varphi_\nu$$

a

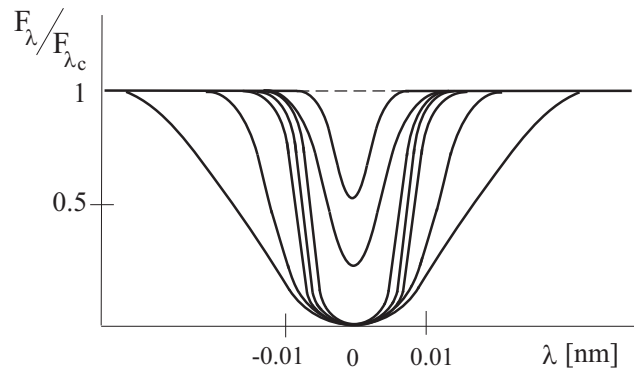
$$k^L = \frac{\pi e^2}{mc} f (1 - \exp(-h\nu_0/kT)) .$$

Ovde je  $n$  - koncentracija apsorbera (broj apsorbera u jedinici zapremine). Ekvivalentna širina je onda

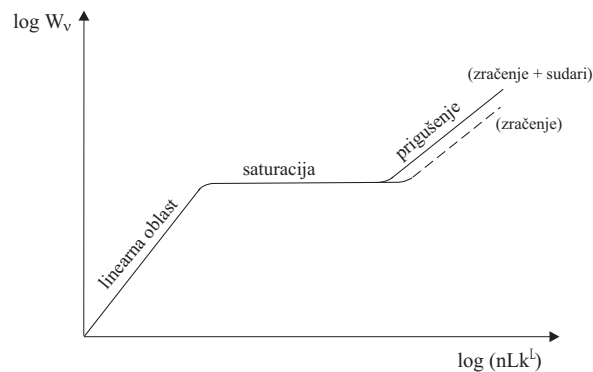
$$W_\nu = \int_0^\infty \frac{I_c - I_\nu}{I_c} d\nu = \int_0^\infty (1 - e^{-nlk^L \varphi_\nu}) d\nu .$$



Ovde možemo Fojtov profil aproksimirati Doplerovim  $\varphi_\nu^V \approx \varphi_\nu^D$  za  $|\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}| < 3$ , odnosno Lorencovim  $\varphi_\nu^V \approx \varphi_\nu^L = \frac{\Gamma}{4\pi^2(\nu-\nu_0)^2} = \frac{a}{\pi\Delta\nu_D b^2}$  za  $|\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}| > 3$ .



**Sl. 13.** Saturacija profila spektralne linije sa povećanjem zastupljenosti hemijskog elementa (apsorbera).



**Sl. 14.** Kriva rasta.

Razmatrajmo vrlo slabu liniju, toliko slabu da je  $nLk^L\varphi_\nu \ll 1$  za sve frekvencije. Onda ekvivalentna širina postaje:

$$W_\nu = nLk^L \int_0^\infty \varphi_\nu d\nu = nLk^L ,$$

tj. za vrlo slabe linije ekvivalentna širina je proporcionalna koncentraciji apsorbera. Sa porastom koncentracije apsorbera, jačina linije raste.

Suprotan je slučaj kada je apsorpcija u centru vrlo velika, tj. kada je  $nLk^L\varphi_\nu \gg 1$  u blizini centra linije  $\nu = \nu_0$ , dok je daleko od centra linije apsorpcija mala. Neka je na frekvencijama  $\nu_0 \pm \Delta$ ,  $nLk^L\varphi_\nu = 1$ . Onda skoro

sav doprinos ekvivalentnoj širini potiče od frekvencija blizu centra, pa je

$$W_\nu = \int_{\nu_0-\Delta}^{\nu_0+\Delta} (1 - e^{-nkk^L\varphi_\nu}) d\nu .$$

Pošto je apsorpcija velika unutar ovog frekventnog intervala, drugi član se može zanemariti, pa je

$$W_\nu \approx \int_{\nu_0-\Delta}^{\nu_0+\Delta} d\nu = 2\Delta .$$

Jake linije sada možemo podeliti u dva tipa u zavisnosti od toga koliko daleko od centra linije apsorpcija ostaje jaka. Za umereno jake linije, apsorpcija ostaje jaka unutar Doplerovog jezgra ( $\Delta < 3\Delta\nu_D$ ), dok za vrlo jake linije ona ostaje velika i u krilima ( $\Delta > 3\Delta\nu_D$ ). Ovo znači da za umereno jake linije imamo:

$$nkk^L\varphi_{\nu_0\pm\Delta}^D = 1$$

odnosno

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} e^{-(\Delta/\Delta\nu_D)^2} nkk^L = 1$$

odakle je

$$\Delta = \Delta\nu_D \sqrt{\ln\left(\frac{nkk^L}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D}\right)}$$

i

$$W_\nu = 2\Delta = 2\Delta\nu_D \sqrt{\ln\left(\frac{nkk^L}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D}\right)} .$$

Za vrlo jake linije imamo:

$$nkk^L\varphi_{\nu_0\pm\Delta}^L = 1$$

odnosno

$$nkk^L \frac{\Gamma}{4\pi^2\Delta^2} = 1$$

odakle je

$$\Delta = \frac{\sqrt{nkk^L\Gamma}}{2\pi}$$

i

$$W_\nu = 2\Delta = \frac{1}{\pi} \sqrt{nkk^L\Gamma} .$$

Na slici 14. je prikazana kriva rasta u vidu grafika  $\log W_\nu$  u funkciji  $\log nkk^L$ .

## Modeli formiranja spektralnih linija

Da bi objasnio tamne linije u spektrima Sunca i zvezda, Švarcšild je 1914. godine uveo aproksimaciju 'čiste apsorpcije', koja je danas poznatija kao aproksimacija lokalne termodinamičke ravnoteže (LTR).

Aproksimacija LTR je često korišćena u literaturi. Ona važi kada u naseljavanju atomskih nivoa dominiraju sudarni procesi. Radijativni prelazi pod dejstvom zračenja koje je blisko ravnotežnom takodje dovodi do ravnotežnih naseljenosti nivoa. Oba ova uslova se ostvaruju samo u dubljim i gušćim slojevima zvezdanih atmosfera. Ekscitaciono i jonizaciono stanje gasa određeno je tada samo lokalnim vrednostima temperature i elektronske koncentracije ( $n_i^* = n_i^*(T, n_e)$ ), a funkcija izvora u liniji je jednaka Plankovoj:

$$S^L(\tau) = B_\nu(T(\tau)) \quad . \quad (1)$$

Realna situacija je komplikovanija od opisane jer je stanje gasa, u opštem slučaju, osim sudarnim određeno i radijativnim prelazima, pri čemu polje zračenja može znatno odstupati od ravnotežnog. U redjoj sredini, foton koji je apsorbovan u vezano-vezanom prelazu ima veće šanse da bude rasejan nego termalizovan pri sudarnoj deekscitaciji atoma. Rasejanje omogućava fotonu da predje znatna rastojanja i dovodi do odstupanja od LTR.

Schuster (1905) je prvi interpretirao Fraunhoferove linije u spektru Sunca čistim rasejanjem. Čista apsorpcija (LTR) i čisto rasejanje su dva ekstremna slučaja - modela formiranja linija.<sup>(1)</sup> U slučaju čistog rasejanja, fotoni su samo preusmereni, nisu uništeni. Sudarne ekscitacije i deekscitacije se javljaju tako retko da nisu od značaja. Ova klasična teorija je pretpostavljala da je rasejanje koherentno, tj. da su apsorbovani i reemitovani foton iste frekvencije.

Iz izraza za ukupnu količinu emitovane energije rasejanjem, na frekvenciji  $\nu$  unutar prostornog ugla  $d\omega$  (vidi odeljak 'Koeficijent emisije')

$$e_\nu^r(\vec{r}, \vec{l}) d\nu \frac{d\omega}{4\pi} = \alpha^r(\vec{r}) d\nu \frac{d\omega}{4\pi} \int \frac{d\omega'}{4\pi} \int R(\nu', \vec{l}', \nu, \vec{l}) I_{\nu'}(\vec{r}, \vec{l}) d\nu' \quad ,$$

---

<sup>(1)</sup> Oba pristupa zanemaruju znatan deo fizike formiranja linija. Tako je u slučaju LTR detaljna ravnoteža radijativnih procesa uzeta a priori kao posledica detaljne ravnoteže sudarnih procesa, a u modelu čistog rasejanja kao posledica njihovog odsustva. Ovi pristupi su svoje najveće opravdanje našli u jednostavnosti algebarskog rešavanja jednačine prenosa.

za koherentno rasejanje imamo da je  $R(\nu', \vec{l}', \nu, \vec{l}) = \varphi(\nu')\delta(\nu - \nu')g(\vec{l}', \vec{l})$  gde je  $\delta(\nu - \nu')$  - Dirakova delta funkcija, a  $g(\vec{l}', \vec{l})$  - ugaona fazna funkcija, pa je:

$$e_{\nu}^r(\vec{r}, \vec{l}) = \alpha^r(\vec{r})\varphi(\nu) \int I_{\nu'}(\vec{r}, \vec{l})g(\vec{l}', \vec{l})\frac{d\omega'}{4\pi} ,$$

jer je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu')\varphi(\nu')d\nu' = \varphi(\nu) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu')d\nu' = \varphi(\nu) .$$

Ako je rasejanje izotropno ( $g(\vec{l}', \vec{l}) = 1$ ), emisijski koeficijent je:

$$e_{\nu}^r(\vec{r}) = \alpha_{\nu}^r(\vec{r})J_{\nu}(\vec{r}) ,$$

gde je  $\alpha_{\nu}^r(\vec{r}) = \alpha^r(\vec{r})\varphi(\nu)$ , tj. konačno, funkcija izvora u liniji data je sa:

$$S_{\nu}^L = e_{\nu}^r/\alpha_{\nu}^r = J_{\nu} . \quad (2)$$

Thomas (1957) je prvi pokazao da rasejanje u zvezdanim atmosferama nije koherentno. Atom može da apsorbuje i reemituje foton iste frekvencije u svom sistemu referencije ( $\zeta = \zeta'$ ), medjutim ako su pravac upadnog fotona  $\vec{l}'$  i rasejanog fotona  $\vec{l}$  različiti, zbog kretanja atoma:

$$\zeta = \nu(1 - \frac{\vec{l}\vec{v}}{c}) \approx \nu - \frac{\nu_o}{c}\vec{l} \cdot \vec{v} ,$$

vidimo da će u laboratorijskom sistemu frekvencija  $\nu$  emitovanog fotona biti Doplerovski pomeren u odnosu na frekvenciju  $\nu'$  upadnog fotona ( $\nu \neq \nu'$ ). Doplerovska preraspodela emitovanih fotona čini da je rasejanje skoro potpuno nekoherentno, bar u jezgru linije koje je prošireno pre svega termalnim kretanjem atoma, tj. Doplerovim efektom (vidi pog. 'Širenje spektralnih linija').

I u slučaju LTR i u slučaju čistog koherentnog rasejanja zračenje na jednoj frekvenciji u liniji se tretira nezavisno od zračenja na drugim frekvencijama u liniji, što ne važi kada je rasejanje nekoherentno. U slučaju nekoherentnog rasejanja, foton apsorbovan na jednoj frekvenciji u liniji može biti reemitovan na drugoj, malo promenjenoj frekvenciji što dovodi do toga da je zračenje svih frekvencija u liniji međusobno povezano i da svi fotoni unutar linije deluju kao celina. U nekoliko radova (Jefferies and White, 1960, Hummer, 1965) pokazano je da je rasejanje jako nekoherentno u jezgru linije, a da je koherentno u krilima linije.

Pre nego što predjemo na realniju sliku formiranja linija, nabrojmo tri klasična modela formiranja spektralnih linija:

(1) formiranje linija u uslovima LTR procesima prave (termalne) apsorpcije i emisije ( $S_\nu = B_\nu(T)$ ),

(2) Šusterov model, prema kome se apsorpcione linije formiraju samo koherentnim i izotropnim rasejanjem u jednom tankom sloju (reversing layer) iznad fotosfere ( $S_\nu = J_\nu$ ), dok sama fotosfera zrači kontinualni spektar, i

(3) Edington-Milnov model, koji pretpostavlja da se linija i kontinuum formiraju u istim atmosferskim slojevima, pri čemu se linija formira i procesima termalne apsorpcije/emisije i procesima koherentnog izotropnog rasejanja ( $S_\nu = L_\nu B_\nu(T) + (1 - L_\nu)J_\nu$ ). Ovaj model pretpostavlja da je odnos koeficijenta apsorpcije u liniji i koeficijenta apsorpcije u kontinuumu na jednoj frekvenciji konstantan na svim dubinama u atmosferi (detaljnije o klasičnim modelima formiranja linija na vežbama).

Sada ćemo detaljnije razmotriti četvrti model formiranja linija:

### **Formiranje linija atomima sa dva energetska nivoa u uslovima odstupanja od LTR (procesima prave tj. termalne apsorpcije/emisije i nekoherentnog rasejanja)**

#### *Odstupanje od LTR*

U prethodnim odeljcima smo pokazali da su u dubljim i gušćim slojevima zvezdanih atmosfera (u fotosferama) uslovi bliski uslovima važenja aproksimacije LTR: sudari medju česticama su dovoljno česti da se može smatrati da čestice imaju ravnotežne raspodele po brzinama (Maksvelova) i po stanjima ekscitacije (Bolcmanova) i jonizacije (Sahina). Ekscitaciono i jonizaciono stanje gasa određeno je samo **lokalnim** vrednostima temperature  $T$  i elektronske koncentracije  $n_e$ , odnosno naselejnosti nivoa u LTR su:

$$n_i^* = n_i^*(T, n_e) .$$

Stanje gasa u jednoj tački atmosfere uopšte ne zavisi od stanja gasa u drugim tačkama (tj. ne uzima se u obzir uticaj stanja jednog elementa zapremine gasa na drugi razmenom zračenja).

Atomski nivoi se naseljavaju pre svega sudarnim procesima, tako da se može smatrati da za svaki atomski nivo postoji ravnoteža izmedju broja sudarnih ekscitacija i deekscitacija. Osim toga, gas i zračenje su u lokalnoj ravnoteži, tj. postoji ravnoteža izmedju procesa termalne apsorpcije i emisije na lokalnoj temperaturi  $T$  (polje zračenja je blisko ravnotežnom).

U višim i redjim atmosferskim slojevima sudari su sve redji. Verovatnoća da atom bude radijativno ekscitovan ili deekscitovan je znatno veća u odnosu na odgovarajuće sudarne procese. Kroz radijativne procese, ekscitaciono i jonizaciono stanje gasa zavisi i od polja zračenja (a ne samo od lokalnih vrednosti  $T$  i  $n_e$ )

$$n_i = n_i(T, n_e, J_\nu) \quad .$$

Polje zračenja je, sa svoje strane, kao rešenje jednačine prenosa određeno stanjem gasa u celoj atmosferi. Tako, u opštem slučaju, **stanje gasa u jednoj tački atmosfere posredstvom polja zračenja zavisi od stanja gasa u svim drugim tačkama.**

Polje zračenja je nelokalna funkcija stanja gasa i može se znatno razlikovati od ravnotežnog, pa će i naseljenosti atomskih nivoa zbog dominantnih radijativnih prelaza odstupati od ravnotežnih. One se određuju rešavanjem jednačina statističke ravnoteže koja pretpostavlja da se polje zračenja i stanje gasa (naseljenosti atomskih nivoa) ne menjaju u toku vremena.

Tako, za  $i$ -ti nivo u atomu možemo pisati jednačinu:

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{j \neq i}^{NL} n_j P_{ji} - n_i \sum_{j \neq i}^{NL} P_{ij} = 0 \quad (3)$$

koja opisuje ravnotežu svih procesa (sudarnih i radijativnih) koji naseljavaju i onih koji raseljavaju razmatrani atomski nivo. Ovde je  $NL$  ukupan broj nivoa koji su neposredno ili posredno povezani sa  $i$ -tim nivoom, a  $P_{ij}$  su verovatnoće prelaza u jedinici vremena po čestici u  $i$ -tom stanju. One predstavljaju zbir verovatnoća odgovarajućih radijativnih  $R_{ij}$  i sudarnih  $C_{ij}$  prelaza:

$$P_{ij} = C_{ij} + R_{ij} \quad .$$

U radijativnim članovima sadržana je zavisnost naseljenosti nivoa od polja zračenja (kroz radijativne ekscitacije i deekscitacije).

Za atom sa  $NL$  nivoa imamo  $NL - 1$  linearno nezavisnu jednačinu statističke ravnoteže. Poslednja jednačina koja zatvara sistem od  $NL$  jednačina sa  $NL$  nepoznatih naseljenosti  $\{n_i\}; i = 1, NL$  predstavlja uslov održanja ukupnog broja čestica:

$$\sum_i^{NL} n_i = n_{uk} \quad .$$

Vidimo da se u uslovima odstupanja od LTR (ne-LTR), zbog uzajamne nelokalne zavisnosti polja zračenja ( $I_\nu$ ) i naseljenosti atomskih nivoa ( $\{n_i\}$ ), ove dve raspodele (fotona po frekvencijama i atoma po stanjima ekscitacije)

moraju odrediti istovremenim rešavanjem jednačine prenosa zračenja i jednačina statističke ravnoteže.

### Model atoma sa dva nivoa. Funkcija izvora u liniji.

Svaki atom ima beskonačno mnogo diskretnih vrednosti unutrašnje energije - energetske nivoa.

Najjednostavniji model atoma koji se koristi za opisivanje formiranja spektralnih linija je model atoma sa samo dva energetska nivoa. Iako se ovakvim atomskim modelom znatno pojednostavljuje realnost, on omogućava da se objasne svi najvažniji aspekti formiranja linija (postojanje dva osnovna tipa interakcija na mikroskopskom nivou: procesa termalne apsorpcije (emisije) i procesa rasejanja) i sagledaju teškoće koje se javljaju pri matematičkom rešavanju složenijih problema. Samo za ovaj atomski model znamo tačna rešenja problema prenosa koja nam služe pri testiranju tačnosti novih numeričkih metoda. Pri ispitivanju značaja pojedinih fizičkih fenomena to je nezamenljiv atomski model. On predstavlja dobru aproksimaciju pri analizi rezonantnih linija (linija koje polaze sa osnovnog nivoa u atomu), dok je za opisivanje subordinatnih prelaza model atoma sa dva nivoa manje dobra aproksimacija. U slučaju rezonantnih linija najčešće se pretpostavlja da su ili oba nivoa beskonačno uska ili da je donji (osnovni) nivo beskonačno tanak, a da gornji nivo ima neku konačnu širinu.

Između dva nivoa u atomu mogu se javiti sledeći procesi:

- radijativna ekscitacija - apsorpcija
- spontana radijativna deekscitacija - spontana emisija
- stimulisana radijativna deekscitacija - stimulisana (indukovana) emisija
- sudarna ekscitacija
- sudarna deekscitacija.

Analizirajmo prvo detaljnije radijativne procese (apsorpcije, spontane i stimulisane emisije) u atomu koji dovode do prelaza elektrona između dva vezana stanja  $i$  i  $j$  ( $i < j$ ). Ta tri procesa opisuju se odgovarajućim koeficijentima (Ajnštajnovim verovatnoćama prelaza).

(1) **Apsorpcija zračenja** koja dovodi do prelaza  $i \rightarrow j$ .

Broj prelaza u jedinici zapremine i u jedinici vremena do kojih dolazi apsorpcijom zračenja intenziteta  $I_\nu$  u jediničnom prostornom uglu i jediničnom frekventnom intervalu je:

$$n_i(\nu)B_{ij}I_\nu \frac{1}{4\pi} = n_i\varphi_\nu B_{ij}I_\nu \frac{1}{4\pi}$$

gde je  $n_i(\nu) = n_i\varphi_\nu$  - broj atoma u jedinici zapremine u  $i$ -tom stanju sposobnih da apsorbuju zračenje frekvencija u intervalu  $\nu, \nu + d\nu$ ;  $\varphi_\nu$  je apsorpcioni profil (frekventna zavisnost koeficijenta apsorpcije). Naime, zbog konačne širine nivoa (konačnog vremena života atoma u određenom energetsom stanju), zatim zbog kretanja atoma (Doplerovog efekta), kao i zbog perturbacija apsorbera susednim atomima i jonima, postoji određeni opseg frekvencija, sa verovatnoćom opisanom profilom  $\varphi_\nu$ , na kojima se vrši prelaz u datoj liniji.  $B_{ij}$  je Ajnštajnov koeficijent za apsorpciju - verovatnoća prelaza  $i \rightarrow j$  u jedinici vremena po čestici u  $i$ -tom stanju. On je karakteristika atoma i datog prelaza i određuje se eksperimentalno ili kvantno - mehaničkim proračunima. Prema tome, vidimo da je **broj prelaza u kojima se formira linija određen naseljenošću početnog nivoa i verovatnoćom prelaza.**

Pri prelazu  $i \rightarrow j$  apsorbuje se foton energije  $h\nu_{ij} = E_j - E_i$ , pa je količina apsorbovane energije u jedinici zapremine u jedinici vremena, u jediničnom prostornom uglu i jediničnom frekventnom intervalu jednaka:

$$[-] = n_i B_{ij} \left( \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \right) \varphi_\nu I_\nu \quad (4)$$

Vraćanje sa  $j$  - tog na  $i$  - ti nivo može se ostvariti na 2 načina:

(2) **Spontana emisija** tj. spontani prelaz  $j \rightarrow i$  uz emisiju fotona.

Količina emitovane energije pri spontanom prelazu je

$$[+]^{sp} = n_j A_{ji} \left( \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \right) \psi_\nu \quad , \quad (5)$$

gde je  $n_j$  - naseljenost  $j$ -tog nivoa,  $A_{ji}$  - verovatnoća spontane emisije u jedinici vremena po čestici u  $j$ -tom stanju, a  $\psi_\nu$  - emisijski profil (frekventna zavisnost koeficijenta emisije).

(3) **Stimulisana (indukovana) emisija** tj. prelaz  $j \rightarrow i$  koji je indukovano poljem zračenja.

Količina emitovane energije pri indukovanom prelazu je:

$$[+]^{ind} = n_j B_{ji} \left( \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \right) \psi_\nu I_\nu \quad . \quad (6)$$

Ovde je  $B_{ji}$  - Ajnštajnov koeficijent za stimulisanu emisiju - verovatnoća stimulisane emisije u jedinici vremena po čestici u  $j$ -tom stanju.

Spontana emisija je izotropna, dok stimulisana ima istu ugaonu zavisnost kao  $I_\nu$ . U tom procesu je verovatnoća emisije zračenja pojačana iradijacijom.



Kako indukovani foton izlazi u istom pravcu kao upadni, proces indukovane emisije se često označava i kao negativna apsorpcija. To je samo donekle korektno jer  $\psi_\nu \neq \varphi_\nu$ .

Između Ajnštajnovih koeficijenata postoje jednostavne relacije koje, iako se mogu izvesti pri uslovu TDR, važe uvek jer su ovi koeficijenti karakteristike atoma i prelaza u njima i ne zavise od prirode polja zračenja i spoljašnjih uslova. U TDR važi:  $I_\nu = B_\nu(T)$ ,  $n_j^*/n_i^* = g_j/g_i \exp(-h\nu/kT)$ , (sa zvezdicom su označene ravnotežne naseljenosti) i  $\psi_\nu = \varphi_\nu$  (svakom apsorbovanom fotonu odgovara identičan emitovan = mikroreverzibilnost). Koristeći izraze (4)-(6) možemo napisati uslov detaljne ravnoteže (jednakosti apsorbovane i emitovane energije) koji važi u slučaju TDR:

$$n_i^* B_{ij} B_\nu(T) = n_j^* A_{ji} + n_j^* B_{ji} B_\nu(T) \quad . \quad (7)$$

Odavde sledi da je:

$$B_\nu(T) = \frac{n_j^* A_{ji}}{n_i^* B_{ij} - n_j^* B_{ji}} = \frac{A_{ji}}{B_{ji}} \frac{1}{\frac{n_i^* B_{ij}}{n_j^* B_{ji}} - 1} = \frac{A_{ji}}{B_{ji}} \frac{1}{\frac{g_i}{g_j} e^{h\nu/kT} \frac{B_{ij}}{B_{ji}} - 1} \quad .$$

Kako je Plankova funkcija data sa:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

poredjenjem sa gornjim izrazom imamo:

$$A_{ji} = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} B_{ji} \quad (8a)$$

$$g_i B_{ij} = g_j B_{ji} \quad . \quad (8b)$$

Ajnštajnovi koeficijenti su konstante za dati atom. U atomu sa više nivoa, ukupni koeficijent spontanih prelaza sa nivoa  $j$  na sve moguće donje nivoe ( $i < j$ ) obrnuto je proporcionalan srednjem vremenu života atoma u  $j$ -tom kvantnom stanju  $\tau_j$ :

$$\Gamma_j = \sum_{i < j} A_{ji} = \frac{1}{\tau_j} \quad .$$

Srednje vreme života atoma u pobudjenom stanju je reda  $10^{-8} s$ . Verovatnoće prelaza određuju se eksperimentalno i teorijski. Na primer, verovatnoća za

spontanu emisiju  $A_{ji}$  za liniju Ly  $\alpha$  je  $4.68 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$ , a za liniju H $\alpha$  je  $4.39 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ .

Jednačinu prenosa zračenja možemo u najopštijem obliku pisati kao:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{dz} = [+ ] - [- ] \quad (9)$$

gde su sa  $[+]$  i  $[-]$  označene količine emitovane i apsorbovane energije, respektivno, u jedinici zapremine, u jedinici vremena, u jediničnom frekventnom intervalu i jediničnom prostornom uglu. Ako razmatramo samo liniju, tj. samo odgovarajuće vezano-vezane prelaze u atomu i zanemarimo vezano-slobodne prelaze na frekvencijama koje odgovaraju toj liniji a koji potiču od drugih atoma u gasu, korišćenjem izraza (4)-(6), jednačina prenosa (9) postaje:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{dz} = n_j A_{ji} \left( \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \right) \psi_\nu + n_j B_{ji} \left( \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \right) \psi_\nu I_{\nu\mu} - n_i B_{ij} \left( \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \right) \varphi_\nu I_{\nu\mu} \quad (10a)$$

tj.

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{dz} = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} [n_j A_{ji} \psi_\nu - (n_i B_{ij} \varphi_\nu - n_j B_{ji} \psi_\nu) I_{\nu\mu}] \quad (10)$$

Ako ovaj izraz uporedimo sa jednačinom prenosa zračenja u liniji izraženom pomoću odgovarajućih koeficijenata emisije i apsorpcije:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{dz} = e_\nu^L - \alpha_\nu^L I_{\nu\mu} \quad (11)$$

imamo da je koeficijent apsorpcije (sa korekcijom za stimulisanu emisiju) na frekvenciji  $\nu$  u liniji dat izrazom:

$$\alpha_\nu^L = \left( \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \right) n_i B_{ij} \varphi_\nu \left[ 1 - \frac{n_j B_{ji} \psi_\nu}{n_i B_{ij} \varphi_\nu} \right] \quad (12)$$

dok je koeficijent emisije na frekvenciji  $\nu$  u liniji dat sa:

$$e_\nu^L = \left( \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \right) n_j A_{ji} \psi_\nu \quad (13)$$

Vidimo da koeficijenti apsorpcije i emisije zavise od naseljenosti atomskih nivoa ( $n_i, n_j$ ) izmedju kojih se vrši prelaz u datoj liniji, verovatnoća prelaza - karakteristika atoma ( $B_{ij}, B_{ji}, A_{ji}$ ) i profila za apsorpciju i emisiju ( $\varphi_\nu, \psi_\nu$ ).

U profilima je sadržana frekventna zavisnost odgovarajućih koeficijenata. Deljenjem (11) sa  $-\alpha_\nu^L$  imamo:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{d\tau_\nu^L} = I_{\nu\mu} - S_\nu^L$$

gde je

$$d\tau_\nu^L = -\alpha_\nu^L dz$$

monohromatska optička dubina u liniji, a

$$S_\nu^L = \frac{e_\nu^L}{\alpha_\nu^L} = \frac{n_j A_{ji} \psi_\nu}{n_i B_{ij} \varphi_\nu - n_j B_{ji} \psi_\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\frac{n_i g_j \varphi_\nu}{n_j g_i \psi_\nu} - 1} \quad (14)$$

funkcija izvora u liniji.

Vidimo da funkcija izvora u liniji zavisi od odnosa naseljenosti nivoa ( $n_i/n_j$ ) i odnosa profila apsorpcije i emisije ( $\varphi_\nu/\psi_\nu$ ). Izraz za funkciju izvora se znatno pojednostavljuje ako pretpostavimo jednakost profila

$$\psi_\nu = \varphi_\nu \quad . \quad (15)$$

Osim u idealizovanom slučaju TDR, jednakost profila se može pretpostaviti ako pri rasejanju postoji potpuna nekoherentnost (redistribucija) zračenja = potpuna nezavisnost procesa apsorpcije i naknadne reemisije zračenja. Nezavisnost (nekorelisanost) sukcesivnih radijativnih procesa obezbeđuju elastični sudari medju atomima u toku vremena života ekscitovanog atoma. Njima se elektroni preraspodeljuju po podnivoima jednoga nivoa što dovodi do toga da se sukcesivni radijativni procesi koji se odnose na taj nivo mogu smatrati nezavisnim.

Sa ovom pretpostavkom kompletne redistribucije (*complete redistribution*, C.R.) zračenja, funkcija izvora u liniji postaje frekventno nezavisna:

$$S^L = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} \frac{1}{\frac{n_i g_j}{n_j g_i} - 1} \quad . \quad (16)$$

Ovo je *implicitni* izraz za funkciju izvora jer naseljenosti nivoa  $\{n_i\}$  u opštem slučaju nisu date Boltzmanovom raspodelom, već zavise od polja zračenja koje je nepoznato. Koeficijent apsorpcije sa pretpostavkom C.R. zračenja postaje

$$\alpha_\nu^L = \left(\frac{h\nu_{ij}}{4\pi}\right) n_i B_{ij} \varphi_\nu \left(1 - \frac{n_j B_{ji}}{n_i B_{ij}}\right) = \alpha^L \cdot \varphi_\nu \quad , \quad (17)$$

gde je sa  $\alpha^L$  označen srednji koeficijent apsorpcije u liniji. Odnos naseljenosti nivoa je poznat samo u slučaju LTR kada je dat Bolcmanovom formulom:

$$\frac{n_j^*}{n_i^*} = \frac{g_j}{g_i} \exp(-h\nu/kT) \quad . \quad (18)$$

Zamenom  $n_j^*/n_i^*$  iz (18) u izraz (16) za  $S^L$  dobijamo da je u LTR:

$$S^L = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = B_\nu(T) \quad (19)$$

dok je koeficijent apsorpcije u liniji oblika:

$$\alpha_\nu^L = \left(\frac{h\nu_{ij}}{4\pi}\right) n_i B_{ij} \varphi_\nu (1 - e^{-h\nu/kT}) \quad . \quad (20)$$

Ovde treba obratiti pažnju na razliku u korekcionom faktoru za stimulisanu emisiju u ne-LTR (17) i LTR (20).

Potražimo sada odnos naseljenosti nivoa u opštem ne-LTR slučaju koristeći uslov statističke ravnoteže. Za model atoma sa dva nivoa jednačina statističke ravnoteže ima oblik:

$$n_i(R_{ij} + C_{ij}) = n_j(R_{ji} + C_{ji}) \quad . \quad (22)$$

Ovde su svi radijativni prelazi sa  $i$ -tog na  $j$ -ti nivo dobijeni integracijom po svim frekvencijama u liniji i svim prostornim uglovima:

$$n_i R_{ij} = n_i B_{ij} \frac{1}{4\pi} \int \int \varphi_\nu I_\nu d\nu d\omega = n_i B_{ij} \int \varphi_\nu d\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} = n_i B_{ij} J_\varphi^{ij} \quad . \quad (23)$$

Isto važi i za radijativne prelaze sa  $j$ -tog na  $i$ -ti nivo:

$$n_j R_{ji} = n_j A_{ji} \int \varphi_\nu d\nu \int \frac{d\omega}{4\pi} + n_j B_{ji} \int \varphi_\nu d\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} = n_j (A_{ji} + B_{ji} J_\varphi^{ji}) \quad . \quad (24)$$

U gornjim izrazima

$$J_\varphi^{ij} = J_\varphi^{ji} = J_\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \varphi_\nu d\nu \int I_\nu d\omega = \int \varphi_\nu d\nu \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{\nu\mu} d\mu = \int J_\nu \varphi_\nu d\nu \quad (25)$$

je srednji intenzitet zračenja  $J_\nu$  integraljen po profilu linije, tzv. integral rasejanja. Zamenom (23) i (24) u (22) imamo:

$$n_i(B_{ij}J_\varphi + C_{ij}) = n_j(A_{ji} + B_{ji}J_\varphi + C_{ji}) . \quad (26)$$

Verovatnoće za sudarnu ekscitaciju  $C_{ij}$  i deekscitaciju  $C_{ji}$  povezane su sa:

$$C_{ji} = C_{ij} \frac{n_i^*}{n_j^*} \quad (27)$$

pri čemu je za sudare sa elektronima koji su najznačajniji:

$$C_{ij} = n_e \int_{v_0} \sigma_{ij} v f(v) dv = n_e q_{ij}(T) .$$

Ovde je  $\sigma_{ij}$  - poprečni presek za sudar sa elektronom,  $f(v) = f^M(v)$  - Maksvelova raspodela po brzinama, a  $v_0$  - minimalna brzina koju elektron treba da ima da izazove prelaz ( $mv_0^2/2 = h\nu_{ij}$ ). Zamenom odnosa naseljenosti nivoa iz jednačine statističke ravnoteže (26) u izraz za funkciju izvora (16), posle manjih transformacija, dobija se funkcija izvora u *eksplicitnom* obliku:

$$S^L = \varepsilon B_\nu(T) + (1 - \varepsilon) J_\varphi . \quad (28)$$

Funkciji izvora doprinos daju i procesi termalne apsorpcije i emisije i procesi nekoherentnog rasejanja. Ovde je

$$\varepsilon = \frac{C_{ji}(1 - \exp(-h\nu/kT))}{A_{ji} + C_{ji}(1 - \exp(-h\nu/kT))} \quad (29)$$

standardni ne-LTR parametar koji predstavlja verovatnoću da je po apsorpciji fotona atom sudarno deekscitovan, tj. da je foton termalizovan. U izrazu (28) član  $\varepsilon B_\nu(T)$  (izvor fotona) predstavlja fotone kreirane sudarnom ekscitacijom i spontanom emisijom,  $J_\varphi$  je integral koji opisuje rasejanje, dok  $\varepsilon J_\varphi$  predstavlja fotone koji su po apsorpciji termalizovani sudarnom deekscitacijom atoma (ponor fotona).

U optičkom i UV delu spektra je  $h\nu \gg kT$ , pa je korekcionni član za stimulisanu emisiju  $\approx 1$ . Tada za  $\varepsilon$ , umesto (29), imamo jednostavniji izraz:

$$\varepsilon = \frac{C_{ji}}{A_{ji} + C_{ji}} \quad (30)$$

Vidimo da kada je  $C_{ji} \gg A_{ji}$ , tada  $\varepsilon \rightarrow 1$ , tj.  $S_\nu^L \rightarrow B_\nu(T)$  (LTR). Tako je parametar  $\varepsilon$  mera odstupanja od LTR. Za većinu linija u zvezdanim atmosferama  $\varepsilon \ll 1$  (odstupanja od LTR mogu biti znatna i iza i do  $\varepsilon = 10^{-8}$ ). Međutim, važno je naglasiti da iako je onda član  $\varepsilon B_\nu(T)$  mnogo manji od  $J_\varphi$  da se ne sme zanemariti jer on određuje raspon dubina koje su međusobno povezane procesom rasejanja <sup>(1)</sup> i dubinu na kojoj intenzitet teži lokalnoj termalnoj funkciji izvora.

Činjenica da stanje gasa zavisi od polja zračenja unosi teškoće u rešavanje problema, jer smo već videli da polje zračenja zavisi od stanja gasa (naseljenosti nivoa) kroz koeficijente apsorpcije i emisije zračenja u jednačini prenosa. **Stanje gasa u jednoj tački, preko polja zračenja, zavisi od stanja gasa u svim drugim tačkama sredine.** Zračenje se menja u interakcijama sa materijom kroz koju prolazi i istovremeno utiče na njena svojstva. Prema tome, neophodno je istovremeno, samousaglašeno rešavanje jednačine prenosa zračenja i jednačina statističke ravnoteže.

Obratimo pažnju na jednu važnu činjenicu. U slučaju atmosfere konstantne  $T_e$  i  $n_e$ , kada aproksimacija LTR ne daje nikakvu liniju<sup>(2)</sup>, ne-LTR daje apsorpcionu liniju čiji centralni intenzitet zavisi od parametra  $\varepsilon$ . U opštem, ne-LTR, slučaju zbog procesa rasejanja će se formirati linija čak i ako je sredina izotermna. Zbog  $J_\varphi = J_\varphi(\tau)$ , biće  $S = S(\tau)$ , tj. postojaće gradijent funkcije izvora, koji je zajedno sa velikom neprozračnošću gasa na frekvencijama u liniji uslov za formiranje linije.

#### *Promena funkcije izvora sa dubinom*

Razmatrajmo sada ponašanje funkcije izvora u atmosferi konstantne  $T_e$  i  $n_e$ , u kojoj se  $\varepsilon$  i  $B(T_e)$  ne menjaju sa dubinom. Ovaj vrlo pojednostavljeni slučaj će nam omogućiti da dodjemo do nekih korisnih i interesantnih rezultata i zaključaka.

---

<sup>(1)</sup> Za nekoherentno rasejanje mnogo udaljenije tačke u atmosferi mogu uticati jedne na druge nego u slučaju koherentnog rasejanja, jer fotoni iz jezgra mogu biti preraspodeljeni (redistribuirani) u transparentna krila linije gde su im srednje slobodne putanje veće pa od mesta nastanka mogu stići u udaljenije delove atmosfere.

<sup>(2)</sup> Ako je  $S_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(T) = \text{const}$  u celoj sredini, izlazni intenzitet zračenja je dat

$$I_{\nu\mu}^+(\tau_\nu = 0) = B_\nu(T) \int_0^\infty e^{-t_\nu/\mu} dt_\nu/\mu = B_\nu(T)$$

Plankovom funkcijom (nema linija).

Analizom asimptotskog ponašanja rešenja na velikim optičkim dubinama dobija se da se rešenje termalizuje, tj. da  $S^L$  teži Plankovoj funkciji  $B$  na tzv. dubini termalizacije  $\Lambda_T$ <sup>1)</sup>, dok se na manjim dubinama  $S^L$  i  $B$  znatno razlikuju, odnosno  $S^L < B$ . Za razne profile linije dobijaju se različite vrednosti dubina termalizacije. Za Doplerov profil

$$\Lambda_T \approx \frac{C}{\varepsilon} , \quad (31a)$$

za Lorencov profil

$$\Lambda_T \approx \frac{8}{9\varepsilon^2} , \quad (31b)$$

a za Fojtov profil

$$\Lambda_T \approx \frac{8a}{9\varepsilon^2} . \quad (31c)$$

Vidimo da je dubina termalizacije veća što su jača krila linije. Za koherentno rasejanje se dobija da je

$$\Lambda_T \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} . \quad (31d)$$

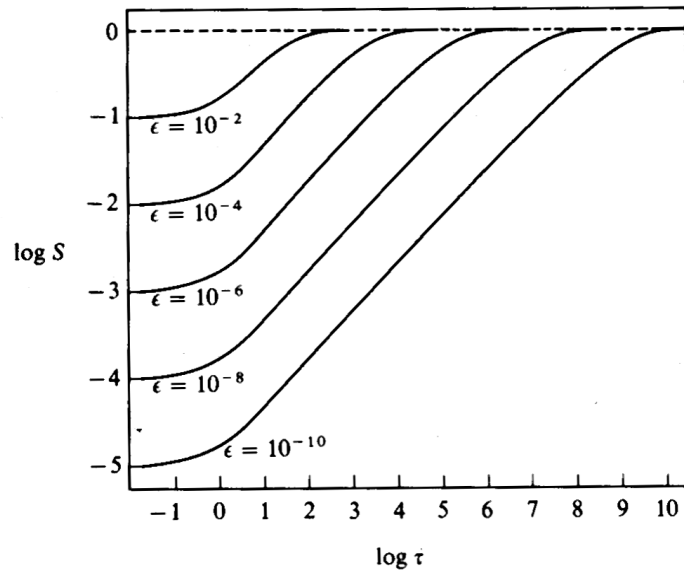
Da bi se odredilo ponašanje funkcije izvora na manjim dubinama neophodno je rešiti jednačinu prenosa. Za sredinu konstantnih fizičkih svojstava može se primeniti metod diskretnih ordinata (Avrett and Hummer, 1965) koji je izložen u dodatku I. Za vrednost funkcije izvora na površini dobija se

$$S^L(0) = \sqrt{\varepsilon} B . \quad (32)$$

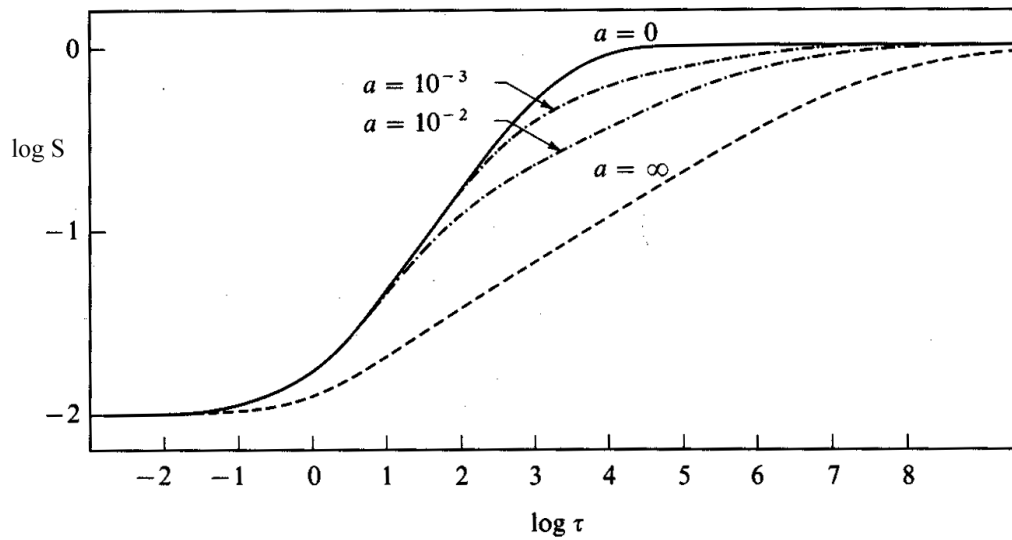
Ovaj rezultat je sasvim opšti, jer ne zavisi ni od reda aproksimacije u kvadraturnim sumama ni od oblika profila. Za tipične vrednosti parametra  $\varepsilon \ll 1$  postojaće znatna odstupanja između površinske vrednosti funkcije izvora u liniji  $S^L(0)$  i njene granične lokalne termalne vrednosti  $B(T)$ .

---

<sup>1)</sup> To je najveća dubina sa koje fotoni imaju šanse da napuste atmosferu.

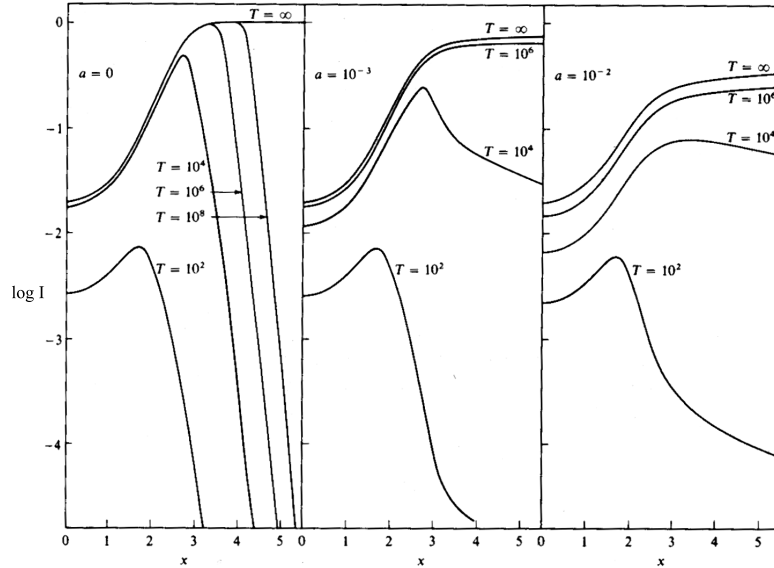


Sl. 15. Funkcija izvora u liniji za Doplerovo širenje i polu-beskonačnu atmosferu (Avrett and Hummer, 1965).



Sl. 16. Funkcija izvora u liniji u polu-beskonačnoj atmosferi za  $\epsilon = 10^{-4}$  i Fojtove profile (Avrett and Hummer, 1965).





**Sl. 17.** Izlazni intenziteti zračenja za konačne i beskonačne atmosfere sa Doplerovim i Fojtovim profilima i za  $\varepsilon = 10^{-4}$  (Avrett and Hummer, 1965).

Promena funkcije izvora sa optičkom dubinom u polu-beskonačnoj izotermnoj atmosferi ( $B = 1$ ), za Doplerov profil i razne vrednosti parametra  $\varepsilon$  prikazana je na slici 15. Vidimo da je za  $B = 1$ ,  $S^L(0) = \sqrt{\varepsilon}$  i da  $S \rightarrow B$  na  $\tau \approx 1/\varepsilon$ . Na slici 16. prikazane su funkcije izvora u liniji za  $B = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  i za razne Fojtove profile (od čisto Doplerovog ( $a = 0$ ) do čisto Lorencovog ( $a = \infty$ )). Vidimo da dubina termalizacije raste od  $1/\varepsilon$  (Doplerov profil) do  $1/\varepsilon^2$  (Lorencov profil).

Na slici 17. su prikazani profili linija koje se formiraju u sredinama (slojevima) konačne debljine  $T$ . U slučaju kada je debljina sloja mnogo veća od dubine termalizacije ( $T \gg \Lambda$ ), rešenje je kao za polu-beskonačnu atmosferu u kojoj uvek dobijamo apsorpcionu liniju. U slučaju kada je  $T \ll \Lambda$ , rešenje se nikada ne termalizuje. U sredini konačne debljine dobijaju se emisione linije, jer krila linija postaju potpuno transparentna na velikim  $x$  ( $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$  je frekventno rastojanje od centra linije u jedinicama Doplerove širine) i intenzitet pada na nulu. Za male vrednosti  $x$  intenzitet raste i za dovoljno debele slojeve dostiže saturaciju do vrednosti koja odgovara polu-beskonačnoj atmosferi. Na vrlo malim  $x$  rasejanje dovodi do apsorpcije u jezgri.<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> U stvari, u sloju u kome fotoni, čak i oni emitovani u centru linije, ne trpe više od 1-2

*Linija formirana atomima sa dva nivoa koja naleže na kontinuum*

Ako na nekoj frekvenciji  $\nu$  u spektru imamo liniju (formiranu vezano-vezanim prelazima u atomu) "superponiranu" na kontinuum koji potiče od vezano-slobodnih prelaza drugih atoma u gasu, ukupni koeficijent apsorpcije na toj frekvenciji  $\nu$  je suma doprinosa apsorpcije u liniji  $\alpha_\nu^L$  i u kontinuumu  $\alpha_\nu^c$  tj.

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu^L + \alpha_\nu^c \quad . \quad (33)$$

Slično, za ukupni koeficijent emisije imamo:

$$e_\nu = e_\nu^L + e_\nu^c \quad . \quad (34)$$

Može se smatrati da se koeficijenti apsorpcije i emisije u kontinuumu praktično ne menjaju sa frekvencijom unutar linije, tj. da je  $\alpha_\nu^c = \alpha^c$ ,  $e_\nu^c = e^c$ . Onda jednačina prenosa zračenja na frekvenciji  $\nu$  ima oblik:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{dz} = (e_\nu^L + e^c) - (\alpha_\nu^L + \alpha^c)I_{\nu\mu} \quad . \quad (35)$$

Definišimo ukupnu optičku dubinu (u liniji i kontinuumu)

$$d\tau_\nu = -(\alpha_\nu^L + \alpha^c)dz = -(\alpha^L \varphi_\nu + \alpha^c)dz = -\alpha^L dz(\varphi_\nu + \beta) \quad (36)$$

$$d\tau_\nu = d\tau^L(\varphi_\nu + \beta) \quad (37)$$

gde je  $\beta = \alpha^c/\alpha^L$ ,  $d\tau^L = -\alpha^L dz$  - srednja optička dubina u liniji,  $\alpha^L$  = srednji koeficijent apsorpcije u liniji koji zavisi samo od koncentracije apsorbera i verovatnoće prelaza ( $\alpha^L = (\frac{h\nu}{4\pi})n_i B_{ij}(1 - \frac{n_j g_i}{n_i g_j})$ ), a  $\varphi_\nu$  je profil = frekventna zavisnost koeficijenta apsorpcije u liniji.

Deleći jednačinu prenosa (35) sa  $-(\alpha_\nu^L + \alpha^c)$  imamo:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} = I_{\nu\mu} - S_\nu^{uk} \quad . \quad (38)$$

---

rasejanja pre bekstva iz sloja (optički tanak sloj  $\tau \rightarrow 0$ ) nastaje emisiona linija bez centralne apsorpcione karakteristike. U opštem slučaju, kada kreirani fotoni u sloju konačne debljine trpe nekoliko apsorpcija i reemisija pre bekstva, javlja se centralna apsorpciona karakteristika u emisionom profilu.

gde je ukupna funkcija izvora data sa:

$$S_\nu^{uk} = \frac{\Sigma e_\nu}{\Sigma \alpha_\nu} = \frac{e_\nu^L + e^c}{\alpha_\nu^L + \alpha^c} . \quad (39)$$

Ako posebno definišemo funkciju izvora u liniji

$$S_\nu^L = \frac{e_\nu^L}{\alpha_\nu^L} \quad (40)$$

i u kontinuumu

$$S^c = \frac{e^c}{\alpha^c} \quad (41)$$

i pretpostavimo da je  $S^c = B_\nu(T)$  imamo da je:

$$S_\nu^{uk} = \frac{\alpha_\nu^L S_\nu^L + \alpha^c S^c}{\alpha_\nu^L + \alpha^c} = \frac{\alpha^L \varphi_\nu}{\alpha^L \varphi_\nu + \alpha^c} S_\nu^L + \frac{\alpha^c}{\alpha^L \varphi_\nu + \alpha^c} B_\nu(T) \quad (42)$$

odnosno

$$S_\nu^{uk} = \frac{\varphi_\nu}{\varphi_\nu + \beta} S_\nu^L + \frac{\beta}{\varphi_\nu + \beta} B_\nu(T) . \quad (43)$$

Za liniju koja nastaje prelazima u atomu sa samo dva nivoa i koja naleže na kontinuum ukupna funkcija izvora na frekvenciji  $\nu$  data je sa:

$$S_\nu^{uk} = \frac{\varphi_\nu}{\varphi_\nu + \beta} [\varepsilon B_\nu(T) + (1 - \varepsilon) J_\varphi] + \frac{\beta}{\varphi_\nu + \beta} B_\nu(T) , \quad (44)$$

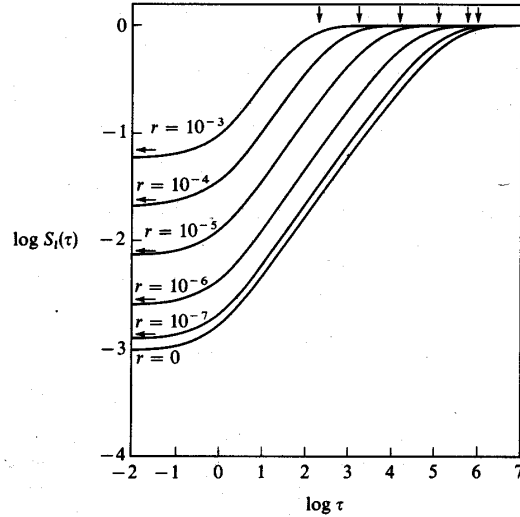
tj. kraće sa:

$$S_\nu^{uk} = \xi_\nu B_\nu(T) + (1 - \xi_\nu) J_\varphi \quad (45)$$

gde je

$$\xi_\nu = \frac{\varphi_\nu \varepsilon + \beta}{\varphi_\nu + \beta} \quad (46)$$

parametar koji opisuje povezanost polja zračenja na frekvenciji  $\nu$  sa termalnim izvorima u liniji i kontinuumu.



**Sl. 18.** Funkcija izvora u liniji za atom sa dva nivoa za Doplerov profil,  $\varepsilon = 10^{-6}$  i naležući kontinuum (razne vrednosti  $\beta$ ) u polu-beskonačnoj atmosferi  $B = 1$  (Hummer, 1968).

Uticao kontinuum na funkciju izvora u liniji za atom sa dva nivoa u polu-beskonačnoj atmosferi prikazan je na slici 18. Rezultati su iz rada Hummer-a (1968) dobijeni metodom diskretnih ordinata pod pretpostavkom da se  $\varepsilon$ ,  $\varphi_\nu$ ,  $\beta$  i  $B$  ne menjaju sa dubinom u atmosferi. Rezultati pokazuju povećanje površinske vrednosti funkcije izvora i smanjenje dubine termalizacije sa porastom vrednosti  $\beta = \alpha^c / \alpha^L$ .

*Atom sa dva vezana stanja i kontinuumom*

Razmotrimo sada model atoma koji se sastoji od dva vezana stanja i kontinuumom. Dodavanjem kontinuumom povećava se broj fizičkih procesa koji se mogu desiti. Pored fotoekscitacija i sudarnih ekscitacija sa donjeg nivoa i radijativnih i sudarnih deekscitacija sa gornjeg nivoa u modelu atoma sa dva nivoa, sada imamo i fotojonizacije i sudarne jonizacije sa svakog od vezanih stanja u kontinuum, a iz kontinuumom u vezana stanja radijativne i sudarne rekombinacije. Sada imamo opštiji model koji nam može dati nove informacije.

Ako opet pretpostavimo kompletnu redistribuciju (nekoherentnost) zračenja, za funkciju izvora u liniji imamo:

$$S^L = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[ \frac{n_1 g_2}{n_2 g_1} - 1 \right]^{-1} . \quad (51)$$

Jednačina statističke ravnoteže za prvi nivo u ovom atomskom modelu će biti:

$$\begin{aligned} n_1(B_{12} \int \varphi_\nu J_\nu d\nu + n_e C_{12} + R_{1k} + n_e C_{1k}) - n_2(A_{21} + B_{21} \int \varphi_\nu J_\nu d\nu + n_e C_{21}) \\ = n_1^*(R_{k1} + n_e C_{1k}) \quad , \end{aligned} \quad (52)$$

a za drugi nivo:

$$\begin{aligned} -n_1(B_{12} \int \varphi_\nu J_\nu d\nu + n_e C_{12}) + n_2(A_{21} + B_{21} \int \varphi_\nu J_\nu d\nu + n_e C_{21} + R_{2k} + n_e C_{2k}) \\ = n_2^*(R_{k2} + n_e C_{2k}) \end{aligned} \quad (53)$$

Jednačina za kontinuum predstavlja sumu prve dve. U gornjim jednačinama su:

$$R_{ik} = 4\pi \int_{\nu_i}^{\infty} \frac{\alpha_i(\nu) J_\nu}{h\nu} d\nu \quad (54)$$

$$R_{ki} = 4\pi \int_{\nu_i}^{\infty} \frac{\alpha_i(\nu)}{h\nu} [B_\nu(1 - e^{-h\nu/kT}) + J_\nu e^{-h\nu/kT}] d\nu \quad (55)$$

verovatnoće za fotojonizaciju i radijativnu rekombinaciju.

Rešavanjem jednačina statističke ravnoteže za  $n_1/n_2$ , korišćenjem Ajnštajnovih relacija i  $n_1^* C_{12} = n_2^* C_{21}$  imamo u skraćenoj notaciji izraz za funkciju izvora u liniji koji je izveo Thomas (1957):

$$S^L = \frac{\int \varphi_\nu J_\nu d\nu + \varepsilon B_\nu(T) + \eta B^*}{1 + \varepsilon + \eta} \quad (56)$$

U gornjem izrazu za funkciju izvora sadržani su svi relevantni fizički procesi interakcija zračenja i atoma sa dva vezana stanja i kontinuumom. U brojiocu prvi član je član koji opisuje rasejanje fotona, drugi je izvorni član koji opisuje verovatnoću sa kojom su fotoni kreirani sudarnom ekscitacijom, a treći je takodje izvorni član koji opisuje deo elektrona koji prelaze iz osnovnog stanja u kontinuum puta deo koji rekombinuje na više stanje i tako stoji na raspolaganju za radijativni prelaz na osnovno stanje. U imeniocu, drugi član predstavlja one fotone koji su uništeni sudarnom deekscitacijom atoma u gornjem stanju, dok treći član uračunava gubitke fotona u liniji fotojonizacijom sa gornjeg stanja praćene rekombinacijom u osnovno stanje.

### *Klasifikacija linija*

Analiza gornjeg izraza za funkciju izvora omogućava da razlikujemo razne vrste problema formiranja linija. Tako je Tomas kao linije u kojima dominiraju sudari označio one linije za koje su članovi u funkciji izvora koji sadrže parametar  $\varepsilon$  mnogo veći od onih koji sadrže  $\eta$ , odnosno kao fotojonizaciono dominantne one za koje važi obrnuto. Ponašanje, pre svega izgled profila, ovih linija se naročito razlikuje u slučaju kada u atmosferi postoji temperaturski rast u spoljnim slojevima (hromosfere). Kategorija kojoj će pripasti određena linija zavisi pre svega od strukture atoma (jona) i odgovarajućih poprečnih preseka, a u manjoj meri od strukture atmosfere (s obzirom da izvesne verovatnoće prelaza zavise od  $T$  i  $n_e$ ). Tako se razne linije jednog istog atoma (jona) mogu svrstati u različite kategorije. Klasifikacija nije jednostavna, i u principu se svaki slučaj ponaosob mora razmotriti. Ipak može se izvršiti grubo grupisanje kao ono koje je dao Thomas (1957):

(1) **Dominiraju sudari:** rezonantne linije jedanput jonizovanih metala (CaII, SrII, itd.) i rezonantne linije H i drugih nemetala (C,N,O, itd.)

(2) **Dominira fotojonizacija:** rezonantne linije neutralnih metala i Balmerove linije vodonika.

Kao primer jednog od izuzetaka gornje klasifikacije imamo rezonantne linije D<sub>1</sub> i D<sub>2</sub> NaI. Iako bi po ovoj klasifikaciji trebalo da pripadaju kategoriji (2), NaI D linije su, zbog neobično velikog poprečnog preseka za sudare, u stvari sudarno dominantne (1).

### *Ponašanje funkcije izvora u liniji u atmosferama sa hromosferskim rastom temperature*

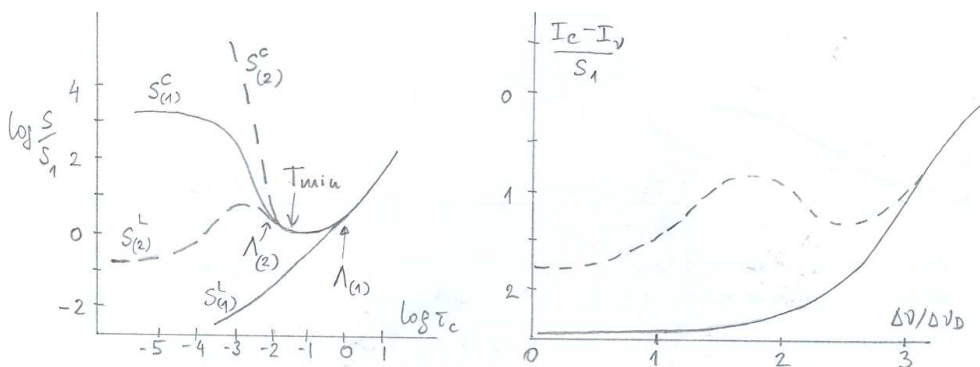
Kod sudarno-dominantnih linija članovi koji opisuju izvore i ponore fotona u izrazu za funkciju izvora direktno su povezani sa lokalnom elektronskom (kinetičkom) temperaturom. Za razliku od njih, fotojonizaciono dominantne linije povezane su sa nekom karakterističnom temperaturom zračenja mnogo dublje u atmosferi gde kontinuum počinje da biva neprozračan. Zbog toga se može očekivati da će sudarno-dominantne linije, za razliku od fotojonizaciono-dominantnih, biti vrlo osetljive na lokalne vrednosti elektronske temperature  $T_e$ . Ovu razliku su jasno pokazali Jefferies i Thomas (1959). Oni su razmatrali atmosferu u kojoj temperatura opada sa visinom u fotosferi do temperaturskog minimuma od oko  $T \approx 4000\text{K}$  na  $\tau_c \approx 10^{-2}$ , a zatim raste u hromosferi. Za funkciju izvora u kontinuumu je pretpostavljen sledeći oblik:

$$S^c(\tau) = B_\nu(T_e) = S_1(1 + \alpha\tau + \beta e^{-\tau})$$

gde je  $\tau$  optička dubina u centru linije. Jednačina prenosa u Eddingtonovoj aproksimaciji

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_\nu}{d\tau^2} = (\varphi_\nu + \beta)^2 \left[ J_\nu - \frac{\varphi_\nu S^L + \beta S^c}{\varphi_\nu + \beta} \right]$$

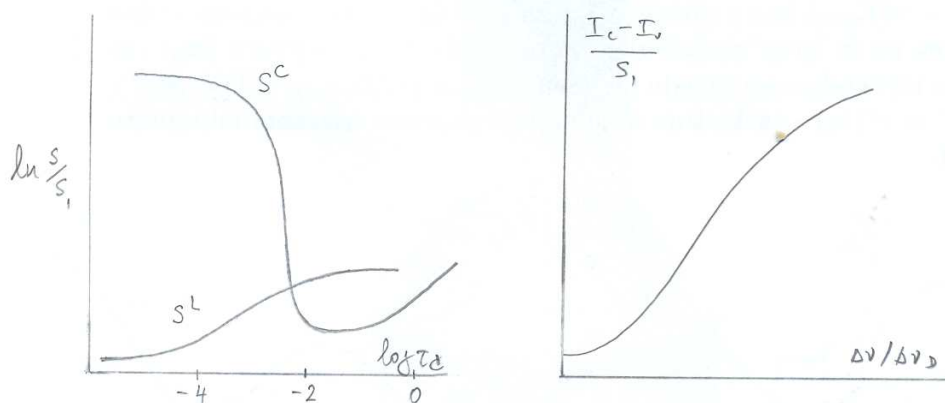
je rešena metodom diskretnih ordinata za Doplerov profil sa tipičnim vrednostima  $\varepsilon$ ,  $\eta$ ,  $\beta$  i  $B^*$ . Na slici 19. prikazani su rezultati za sudarno-dominantne linije ( $\eta = 0$ ) za  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\beta = 10^{-4}$  i datu funkciju izvora u kontinuumu  $S^c$ . Funkcija izvora u kontinuumu (jednaka Plankovoj) sledi rast temperature ka spolja. Funkcija izvora u liniji pokušava da sledi taj rast kroz sudarne procese, ali rasejanje dominira na površini tako da je vrednost funkcije izvora u liniji na površini 5 do 6 redova veličine manja od lokalne termalne vrednosti. Vidimo da se na velikim dubinama  $S^L$  termalizuje do  $S^c$ , ali da kako krila linije počinju da bivaju transparentna ( $\tau_c \leq 1$ ), funkcija izvora u liniji leži ispod  $S^c$ . Dubina termalizacije  $\Lambda$  zavisi od radijativnog prelaza u atomu (od naseljenosti donjeg nivoa i verovatnoće prelaza). Ako je  $\Lambda > \tau(T_{min})$  kao u slučaju (1) na slici 19, funkcija izvora u liniji  $S_{(1)}^L$  monotono opada, pa imamo apsorpcionu liniju (slučaju (1) odgovaraju krive prikazane punom linijom). Ako je  $\Lambda < \tau(T_{min})$ , kao u slučaju (2), termalizacija je iznad temperaturnog minimuma, pa će 'grba' na krivoj  $S_{(2)}^L$  dovesti do emisije u jezgru linije (isprekidana kriva odgovara slučaju (2)) (Setimo se da je  $I(0, x_i, \mu = 1) = S(\tau_i^*)$ , gde je  $\tau_i^* = \tau^*(x_i)$  - tačka koja daje najveći doprinos izlaznom intenzitetu zračenja).



**Sl. 19.** (a) Funkcija izvora u liniji i (b) profil sudarno-dominantne linije (sa  $\varepsilon = 10^{-4}$  i  $\beta = 10^{-4}$ ) u polu-beskonačnoj atmosferi sa hromosferskim temperaturnim rastom (Jefferies and Thomas, 1959).

Ovakva emisija je posmatrana u jezgrima rezonantnih linija K (393.3nm) i H (396.8nm) CaII na Suncu i drugim zvezdama poznih spektralnih klasa ( $T_{ef} < 8000\text{K}$ ). Ove linije imaju karakteristične profile: duboku i široku (unutar  $\approx 2\text{nm}$ ) apsorpciju sa emisijom jezgrom. Jedan interesantan empirijski rezultat je otkriće Wilson-a i Bappu-a (1957) da su širine emisijonih komponenta korelisane sa luminoznošću zvezde. Intenzitet i oblik emisijonog jezgra varira sa spektralnim tipom, klasom luminoznosti i starošću zvezde. Intenzitet emisijonog jezgra u ovim linijama se znatno menja i u toku 11-godišnjeg Sunčevog ciklusa, pa se one koriste kao jedan od indeksa Sunčeve aktivnosti.

Ponašanje fotojonizaciono-dominantnih linija je drugačije. Na slici je prikazan rezultat za liniju sa  $\varepsilon = 0$ ,  $\eta = 10^{-2}$  i  $\beta = 10^{-4}$ . Funkcija izvora u liniji pokazuje stalno opadanje ka spolja sa znatnim padom na površini što je karakteristika rasejanja.  $S^L$  nije osetljiva na (ne prati) promene  $T_e$ . Na velikim dubinama ona se termalizuje. Međutim, kako idemo ka spolja, ona prvo leži iznad  $S^c$ , a zatim ispod (na površini). Linija je onda potpuno apsorpciona, bez centralne emisije. Odsustvo emisijonih jezgara u linijama kao što su fotojonizaciono-dominantne Balmerove linije vodonika je takodje u saglasnosti sa posmatranjima.



**Sl. 20.** (a) Funkcija izvora u liniji i (b) profil fotojonizaciono - dominantne linije u polu-beskonačnoj atmosferi sa hromosferskim temperaturskim rastom.

U slučaju kada postoji hromosferski temperaturski rast jasno se uočava i razlika do koje dolazi kada se primene LTR odnosno ne-LTR model formiranja linija. Ovde bi primena LTR (zbog  $S^L = B_\nu(T_e)$ , tj. funkcije izvora u liniji koja prati temperaturski rast) dovela do emisijonih jezgara u svim jakim linijama. Tako bi, na primer, jake rezonantne linije NaI sintetizovane u aproksimaciji LTR imale emisijono jezgro, koje se ne posmatra. Ne-LTR



teorija, međutim, pravi razliku između sudarno-dominantnih slučajeva, koji **moгу imati** emisiona jezgra (sa tzv. self-reversal-om (centralnom apsorpcijom)) i fotojonizaciono - dominantnih slučajeva, koji ne pokazuju emisiju.