Vežba 4
Metod Feautrier
(Feautrier, P.: 1964, C.R. Acad. Sci., Paris 258, 3189)

Zadatak 4.a)

Napisati program za formalno rešenje jednačine prenosa zračenja koristeći njen diferencijalni oblik i Feautrier rešenje. Funkcija izvora je data sa:

$$S(\tau) = 1 + 0.1\tau + 0.01\tau^2 + 10\, e^{-\tau}.$$

Uporediti tako dobijeni izlazni specifični intenzitet zračenja sa tačnim izlaznim specifičnim intenzitetom koji je dobijen analitički:

$$I^{ex}(0, x, \mu) = 1 + 0.1\frac{\mu}{\varphi_x} + 0.02(\frac{\mu}{\varphi_x})^2 + \frac{10}{1 + \mu/\varphi_x}$$

Monohromatska optička dubina u pravcu μ je:

$$\tau_{x,\mu} = \tau\varphi_x/\mu.$$

Naći maksimalnu apsolutnu grešku dobijenog formalnog rešenja u odnosu na tačno, analitičko rešenje:

$$e(x, \mu) = |I(0, x, \mu) - I^{ex}(0, x, \mu)|/I^{ex}(0, x, \mu).$$

Zadatak 4.b)

Rešiti jednačinu prenosa zračenja

$$\mu\frac{dI_{x\mu}}{d\tau} = \varphi_x(I_{x\mu} - S^L) \tag{1}$$

sa funkcijom izvora u liniji

$$S^L = \varepsilon B + (1 - \varepsilon)J_\varphi \quad . \tag{2}$$

gde je

$$J_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x J_x dx = \frac{1}{2}\int \varphi_x dx \int_{-1}^{1} I_{x\mu} d\mu \tag{3}$$

koristeći Feautrier metodu. Razmatrati slučaj izotermne atmosfere sa $B = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, φ_x =const (x je frekventno rastojanje od centra linije u jedinicama Doplerove širine) i Doplerov profil $\varphi_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$. Grafički prikazati dobijeno rešenje za $S(\tau)$ i za izlazni fluks zračenja u liniji $F_x(\tau = 0)$.

Feautrier metod (Paul Feautrier, 1964)

U plan-paralelnoj geometriji jednačinu prenosa zračenja (1) možemo pisati posebno za izlazno ($I^+_{\nu\mu}$) i za ulazno ($I^-_{\nu\mu}$) polje zračenja:

$$+\mu\frac{dI^+_{\nu\mu}}{d\tau} = \varphi_\nu(I^+_{\nu\mu} - S_\nu) \tag{3.1a}$$

$$-\mu\frac{dI^-_{\nu\mu}}{d\tau} = \varphi_\nu(I^-_{\nu\mu} - S_\nu). \tag{3.1b}$$

Koristimo uobičajenu notaciju: ν je frekvencija, pravac μ je sada ograničen na interval $0 \leq \mu \leq 1$, a $d\tau_\nu$ je element monohromatske optičke dubine

$$d\tau_\nu = -\alpha^L_\nu dz = -\varphi_\nu\alpha^L dz = \varphi_\nu d\tau \tag{3.2}$$

gde je φ_ν profil koeficijenta apsorpcije u liniji. Pretpostavljamo da funkcija izvora S_ν ne zavisi od pravca, kao napr.

$$S_\nu = \gamma_\nu + \beta_\nu J_\nu \tag{3.3a}$$

u slučaju koherentnog rasejanja u kontinuumu, ili

$$S_\nu = \gamma_\nu + \beta_\nu\int\varphi_{\nu'}J_{\nu'}d\nu' \tag{3.3b}$$

u slučaju kompletne redistribucije zračenja u spektralnoj liniji (γ_ν je termalni član, a β_ν je koeficijent rasejanja podeljen ukupnim koeficijentom ekstinkcije; zavisnost γ i β od ν se javlja u opštem slučaju ako razmatramo i kontinuum na koji naleže linija).

Feautrier (1964) je uveo dve nove promenljive:

$$u_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(I^+_{\nu\mu} + I^-_{\nu\mu}) \tag{3.4a}$$

$$v_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(I^+_{\nu\mu} - I^-_{\nu\mu}) \tag{3.4b}$$

koje su, za dati pravac, veličine slične srednjem intenzitetu i fluksu, respektivno. Sabiranjem jednačina (3.1a) i (3.1b) dobijamo:

$$\mu\frac{dv_{\nu\mu}}{d\tau} = \varphi_\nu(u_{\nu\mu} - S_\nu), \tag{3.5a}$$

a oduzimanjem (3.1a) i (3.1b):

$$\mu\frac{du_{\nu\mu}}{d\tau} = \varphi_\nu v_{\nu\mu}\ . \tag{3.5b}$$

Zamenom (3.5b) u (3.5a) eliminišemo $v_{\nu\mu}$ i konačno dobijamo jednačinu prenosa kao diferencijalnu jednačinu II reda (tj. sistem jednačina za svaku frekvenciju i svaki pravac):

$$\mu^2 \frac{d^2 u_{\nu\mu}}{d\tau_\nu^2} = u_{\nu\mu} - S_\nu. \tag{3.6}$$

Zbog zavisnosti koeficijenta apsorpcije u liniji od dubine (3.2), u opštem slučaju jednačina (3.6) ima oblik:

$$\frac{\mu^2}{\alpha_\nu(z)} \frac{d}{dz}[\frac{1}{\alpha_\nu(z)} \frac{du_{\nu,\mu}}{dz}] = u_{\nu,\mu} - S_\nu. \tag{3.7}$$

Ako, medjutim, pretpostavimo da se φ_ν ne menja sa dubinom (φ_ν=const) možemo pisati:

$$\frac{\mu^2}{\varphi_\nu^2} \frac{d^2 u_{\nu\mu}}{d\tau^2} = u_{\nu\mu} - S_\nu. \tag{3.8}$$

(Jednačinu prenosa u ovom obliku rešavaćemo u ovoj vežbi.) Koristeći granični uslov na $\tau = 0$:

$$I^-_{\nu\mu}(\tau = 0) = 0$$

iz (3.4) sledi da je $v_{\nu\mu}(0) = u_{\nu\mu}(0)$, tako da (3.5b) postaje:

$$\mu(\frac{du_{\nu\mu}}{d\tau_\nu})_0 = u_{\nu\mu}(0)\ . \tag{3.9}$$

Na $\tau = \tau_{max}$ sa zadatim $I^+_{\nu\mu}(\tau_{max})$ imamo:

$$\mu(\frac{du_{\nu\mu}}{d\tau_\nu})_{\tau_{max}} = I^+_{\nu\mu}(\tau_{max}) - u_{\nu\mu}(\tau_{max})\ . \tag{3.10}$$

Ako pretpostavimo da na τ_{max} važi difuzna aproksimacija, imamo:

$$I^+_{\nu\mu}(\tau_{max}) = B_\nu(\tau_{max}) + \mu(\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu})_{\tau_{max}}.$$

Kao donji granični uslov u polu-beskonačnoj atmosferi pretpostavićemo da važi:

$$(\frac{du_{\nu\mu}}{d\tau_\nu})_{\tau_{max}} = 0\ . \tag{3.11}$$

Jednačina (3.6) sa funkcijom izvora (3.3) i graničnim uslovima (3.9) i (3.10), odnosno (3.11) rešava se numerički. Za to je neophodno izraziti analitičke operatore preko algebarskih operacija. Za ovaj prelaz sa analize na algebru neophodni su sledeći koraci: diskretizacija promenljivih, zamena integrala kvadraturnim sumama i izvoda konačnim razlikama.

Izaberimo skup tačaka po dubini $\{\tau_l\}$ $(l = 1, N)$, skup pravaca $\{\mu_j\}$ $(j = 1, NM)$ i skup frekventnih tačaka $\{\nu_i\}$ $(i = 1, NF)$. Bilo koju neprekidnu funkciju $f(\tau, \nu, \mu)$ onda treba definisati vrednostima $f(\tau_l, \nu_i, \mu_j)$ na diskretnom skupu nezavisno promenljivih. U skraćenoj notaciji možemo ih pisati kao $f_{l,i,j}$.

Integrale u izrazu za funkciju izvora (3.3b) zamenjujemo kvadraturnim sumama:

$$S_{l,i} = \gamma_{l,i} + \beta_{l,i} \sum_i w_i \varphi_{l,i} \sum_j w_j u_{l,i,j}. \tag{3.12}$$

Ako pravce i frekvencije grupišemo u jedan skup vrednosti sa indeksom $k(k = 1, NK)$ tako da je $(\nu_k, \mu_k) = (\nu_i, \mu_j)$ sa $k = j + (i-1) \cdot NM$, funkcija izvora ima oblik:

$$S_{l,k} = \gamma_{l,k} + \beta_{l,k} \sum_{k'=1}^{NK} w_{l,k'} u_{l,k'}. \tag{3.13}$$

Izvod u jednačini (3.6), odnosno (3.8), zamenimo konačnim razlikama:

$$(\frac{d^2u}{d\tau^2})_l \approx \frac{(\frac{du}{d\tau})_{l+\frac{1}{2}} - (\frac{du}{d\tau})_{l-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta\tau_{l+\frac{1}{2}} + \Delta\tau_{l-\frac{1}{2}})}$$

gde je

$$(\frac{du}{d\tau})_{l+\frac{1}{2}} \approx (\frac{\Delta u}{\Delta\tau})_{l+\frac{1}{2}} = \frac{u_{l+1} - u_l}{\tau_{l+1} - \tau_l} \quad , (\frac{du}{d\tau})_{l-\frac{1}{2}} \approx (\frac{\Delta u}{\Delta\tau})_{l-\frac{1}{2}} = \frac{u_l - u_{l-1}}{\tau_l - \tau_{l-1}},$$

tako da je jednačina prenosa zračenja (3.8) u diskretnom obliku:

$$\mu_k^2 \frac{1}{\Delta\tau_l \Delta\tau_{l-\frac{1}{2}}} u_{l-1,k} - \mu_k^2 \frac{1}{\Delta\tau_l}(\frac{1}{\Delta\tau_{l-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\Delta\tau_{l+\frac{1}{2}}}) u_{l,k} + \mu_k^2 \frac{1}{\Delta\tau_l \Delta\tau_{l+\frac{1}{2}}} u_{l+1,k} = \varphi_k^2 (u_{l,k} - S_{l,k}) \tag{3.14}$$

Ovde su:

$$\Delta\tau_{l+\frac{1}{2}} = (\tau_{l+1} - \tau_l)$$

$$\Delta\tau_{l-\frac{1}{2}} = (\tau_l - \tau_{l-1})$$

$$\Delta\tau_l = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{l+\frac{1}{2}} + \Delta\tau_{l-\frac{1}{2}}) \tag{3.15}$$

Jednačinu (3.8) za svako $k = 1, NK$ i na svakoj dubini $l = 2, N-1$ onda prepisujemo kao:

$$a_{l,k} \cdot u_{l-1,k} + b_{l,k} \cdot u_{l,k} + c_{l,k} \cdot u_{l+1,k} = u_{l,k} - S_{l,k} = u_{l,k} - \gamma_l - \beta_l \sum_k w_k \cdot u_{l,k}$$

gde su koeficijenti dati sa:

$$a_{l,k} = \frac{\mu_k^2}{\varphi_k^2} \frac{1}{\Delta\tau_{l-\frac{1}{2}} \Delta\tau_l}$$

$$b_{l,k} = -\frac{\mu_k^2}{\varphi_k^2}\frac{1}{\Delta\tau_l}(\frac{1}{\Delta\tau_{l-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\Delta\tau_{l+\frac{1}{2}}})$$

$$c_{l,k} = \frac{\mu_k^2}{\varphi_k^2}\frac{1}{\Delta\tau_l\Delta\tau_{l+\frac{1}{2}}}.$$

Ako sa $\bar{u}_l$ označimo vektor dimenzija NK na dubini l, onda se jednačina (3.12) može prepisati kao matrična jednačina:

$$-\mathbf{A}_l\bar{u}_{l-1} + \mathbf{B}_l\bar{u}_l - \mathbf{C}_l\bar{u}_{l+1} = \bar{L}_l \tag{3.16}$$

za $l = 2, N-1$.

Matrice $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{B}_l$ i $\mathbf{C}_l$ su dimenzija NKxNK. Matrice $\mathbf{A}_l$ i $\mathbf{C}_l$ su dijagonalne, dok su u matrici $\mathbf{B}_l$ svi elementi različiti od nule. Nedijagonalni elementi potiču od kvadraturne sume u integralu rasejanja, a dijagonalni sadrže još i operator diferenciranja. $\bar{L}_l$ je vektor koji sadrži termalne članove ($\varepsilon_l B_l$).

Za kompletiranje sistema jednačina potrebni su nam diskretizovani granični uslovi. Na površini, jednačinu (3.9) možemo prepisati, sa tačnošću do prvog reda, kao:

$$\mu_k\frac{u_{2,k} - u_{1,k}}{\Delta\tau_{3/2}} = \varphi_k u_{1,k}$$

Medjutim, koristeći Tejlorov razvoj:

$$u_{2,k} = u_{1,k} + \Delta\tau_{3/2}(\frac{du}{d\tau})_1 + \frac{1}{2}\Delta\tau_{3/2}^2(\frac{d^2u}{d\tau^2})_1$$

granični uslov možemo pisati sa tačnošću do drugog reda:

$$\frac{\mu_k}{\varphi_k}\frac{u_{2,k} - u_{1,k}}{\Delta\tau_{3/2}} = u_{1,k} + \frac{\Delta\tau_{3/2}}{2(\mu_k/\varphi_k)}(u_{1,k} - S_{1,k})$$

odnosno

$$\{1 + \frac{2(\mu_k/\varphi_k)}{\Delta\tau_{3/2}} + \frac{2(\mu_k/\varphi_k)^2}{\Delta\tau_{3/2}^2} - \beta_{1,k}\sum_k w_k\}u_{1,k} - \frac{2(\mu_k/\varphi_k)^2}{\Delta\tau_{3/2}^2}u_{2,k} = \gamma_{1,k}.$$

Ovde je $w_k = w_{i,k}\cdot\varphi_{1,k}\cdot w_{j,k}$, a $w_{i,k}$ i $w_{j,k}$ su težine za integraciju po frekvencijama i pravcima.

U matričnom obliku uslov na gornjoj granici možemo pisati:

$$\mathbf{B}_1\bar{u}_1 - \mathbf{C}_1\bar{u}_2 = \bar{L}_1 \tag{3.17}$$

Slično, na donjoj granici, koristeći Tejlorov razvoj:

$$u_{N-1} = u_N - \Delta\tau_{N-\frac{1}{2}}(\frac{du}{d\tau})_N + \frac{1}{2}\Delta\tau_{N-\frac{1}{2}}^2(\frac{d^2u}{d\tau^2})_N \quad ,$$

(3.6) i (3.10) imamo:

$$\{1+\frac{2(\mu_k/\varphi_k)}{\Delta\tau_{N-\frac{1}{2}}}+\frac{2(\mu_k/\varphi_k)^2}{\Delta\tau^2_{N-\frac{1}{2}}}-\beta_{N,k}\sum w_k\}u_{N,k}-\frac{2(\mu_k/\varphi_k)^2}{\Delta\tau^2_{N-\frac{1}{2}}}u_{N-1,k}=\gamma_{N,k}-\frac{2(\mu_k/\varphi_k)}{\Delta\tau_{N-\frac{1}{2}}}\cdot I^+_{N,k}$$

ili, u matričnom obliku:

$$-\mathbf{A}_N\bar{u}_{N-1}+\mathbf{B}_N\bar{u}_N=\bar{L}_N. \tag{3.18}$$

Algoritam za rešavanje - procedura eliminacije i naknadne supstitucije

Skup jednačina:

$$\mathbf{B}_1\bar{u}_1-\mathbf{C}_1\bar{u}_2=\bar{L}_1$$

$$-\mathbf{A}_l\bar{u}_{l-1}+\mathbf{B}_l\bar{u}_l-\mathbf{C}_l\bar{u}_{l+1}=\bar{L}_l$$

$$-\mathbf{A}_N\bar{u}_{N-1}+\mathbf{B}_N\bar{u}_N=\bar{L}_N$$

predstavlja sistem koji ima tri-dijagonalnu strukturu. Sistem se rešava na sledeći način. Polazeći od gornjeg graničnog uslova (3.17) imamo:

$$\bar{u}_1=\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{C}_1\bar{u}_2+\mathbf{B}_1^{-1}\bar{L}_1=\mathbf{D}_1\bar{u}_2+\bar{\nu}_1 \tag{3.19}$$

Zamena (3.19) u (3.16) za $l=2$ dovodi do

$$\bar{u}_2=\mathbf{D}_2\bar{u}_3+\bar{\nu}_2$$

gde je

$$\mathbf{D}_2=(\mathbf{B}_2-\mathbf{A}_2\mathbf{D}_1)^{-1}\mathbf{C}_2$$

i

$$\bar{\nu}_2=(\mathbf{B}_2-\mathbf{A}_2\mathbf{D}_1)^{-1}(\bar{L}_2+\mathbf{A}_2\bar{\nu}_1)\ .$$

Tako imamo:

$$\bar{u}_l=\mathbf{D}_l\bar{u}_{l+1}+\bar{\nu}_l \tag{3.20}$$

gde su

$$\mathbf{D}_l=(\mathbf{B}_l-\mathbf{A}_l\mathbf{D}_{l-1})^{-1}\mathbf{C}_l \tag{3.21}$$

i

$$\bar{\nu}_l=(\mathbf{B}_l-\mathbf{A}_l\mathbf{D}_{l-1})^{-1}(\bar{L}_l+\mathbf{A}_l\bar{\nu}_{l-1}) \tag{3.22}$$

za $l=2,N$.

Polazeći od $l=1$, računamo sukcesivne vrednosti za $\mathbf{D}_l$ i $\bar{\nu}_l$ do $l=N-1$. U poslednjoj tački (N), $\mathbf{C}_N=0$, pa je $\mathbf{D}_N=0$ i $\bar{u}_N=\bar{\nu}_N$. Pošto imamo $\bar{u}_N$, zamenom u

(3.20) nalazimo sve ostale $\bar{u}_l, (l = N-1, 1)$. Pošto smo izračunali $u_{l,i,j}$ možemo izračunati $J_{l,i} = \sum_{j=1}^{NM} b_j u_{l,i,j}$ i funkciju izvora koja sadrži integrale po frekvencijama:

$$S_l = \gamma_l + \beta_l \Sigma_{i=1}^{NF} w_i \varphi_{l,i} J_{l,i} \ .$$

Formalno rešenje koje koristi Feautrier šemu

Formalno rešenje je rešenje jednačine prenosa zračenja sa poznatom funkcijom izvora. Pošto je S poznato, za svaku frekvenciju i svaki pravac (izostavljamo index k radi kraćeg zapisa) tražimo rešenje diskretizovanog sistema u obliku:

$$-A_l u_{l-1} + B_l u_l - C_l u_{l+1} = L_l$$

gde je l indeks koji se odnosi na tačku po dubini $l = 1, ...N$, a u je tzv. Feautrier promenljiva. Za unutrašnje tačke u modelu, $l = 2, ..., N-1$:

$$A_l = \frac{(\mu/\varphi)^2}{\Delta\tau_{l-\frac{1}{2}}\Delta\tau_l}, \quad C_l = \frac{(\mu/\varphi)^2}{\Delta\tau_{l+\frac{1}{2}}\Delta\tau_l}, \quad B_l = 1 + A_l + C_l$$

$$L_l = S_l$$

gde je

$$\Delta\tau_{l+\frac{1}{2}} = \tau_{l+1} - \tau_l \quad \Delta\tau_{l-\frac{1}{2}} = \tau_l - \tau_{l-1} \quad \Delta\tau_l = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{l+\frac{1}{2}} + \Delta\tau_{l-\frac{1}{2}}).$$

Na gornjoj granici je $A_1 = 0$. Pretpostavljajući da nema upadnog zračenja na gornjoj granici:

$$B_1 = 1 + \frac{2(\mu/\varphi)}{\Delta\tau_{3/2}} + \frac{2(\mu/\varphi)^2}{\Delta\tau_{3/2}^2} \quad , \quad C_1 = \frac{2(\mu/\varphi)^2}{\Delta\tau_{3/2}^2} \quad , \quad L_1 = S_1$$

Na donjoj granici $C_N = 0$, a

$$B_N = 1 + \frac{2(\mu/\varphi)}{\Delta\tau_{N-\frac{1}{2}}} + \frac{2(\mu/\varphi)^2}{\Delta\tau_{N-\frac{1}{2}}^2} \quad , \quad A_N = \frac{2(\mu/\varphi)^2}{\Delta\tau_{N-\frac{1}{2}}^2} \quad , \quad L_N = S_N - \frac{2(\mu/\varphi)}{\Delta\tau_{N-\frac{1}{2}}} I_N^+$$

gde je I_N^+ izlazni intenzitet zračenja na donjoj granici koji je, u difuznoj aproksimaciji, dat sa:

$$I_N^+ = S_N + (\frac{\mu}{\varphi})(\frac{dS}{d\tau})_N = S_N + (\frac{\mu}{\varphi})(\frac{S_N - S_{N-1}}{\tau_N - \tau_{N-1}}).$$

Rešenje je i dalje dato jednačinama (3.16)-(3.19) samo što su A_l, B_l i C_l sada brojevi, a ne matrice.

Formalno rešenje jednačine prenosa zračenja (II način)

Potrebno je rešiti jednačinu prenosa zračenja kao diferencijalnu jednačinu drugog reda sa poznatom funkcijom izvora:

$$(\frac{d^2u}{d\tau^2})_l = \frac{\varphi_\nu^2}{\mu^2}(u(l) - S(l)) \; . \tag{1}$$

Podjimo od gornjeg graničnog uslova (za $l = 1$). S obzirom da pretpostavljamo da nema upadnog zračenja na gornjoj granici atmosfere ($I^-(1) = 0$), sledi da je $u(1) = v(1)$ i da je:

$$(\frac{du}{d\tau})_1 = \frac{\varphi_\nu}{\mu}v(1) = \frac{\varphi_\nu}{\mu}u(1)$$

što možemo pisati u obliku:

$$(\frac{du}{d\tau})_1 = a_1 + b_1 u(1) \tag{2}$$

gde su koeficijenti $a_1 = 0$ i $b_1 = \varphi_\nu/\mu$ poznati.

Razvijmo $u(2)$ u Tejlorov red do članova drugog reda:

$$u(2) = u(1) + \Delta\tau(\frac{du}{d\tau})_1 + \frac{\Delta\tau^2}{2}(\frac{d^2u}{d\tau^2})_1 \; . \tag{3}$$

Ovde je $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$.

Zamenom jednačine (1) za $l = 1$ i (2) u (3) dobijamo relaciju:

$$u(1) = \alpha(1) + \beta(1)u(2) \; , \tag{4}$$

koja povezuje rešenja u dva susedna sloja. Pogledajmo sada ostale tačke u atmosferi ($l = 2, N-1$). Koristeći Lagranžov interpolacioni polinom, drugi izvod $d^2u/d\tau^2$ možemo pisati na sledeći način:

$$(\frac{d^2u}{d\tau^2})_l = DM\, u(l-1) + DL\, u(l) + DP\, u(l+1) \tag{5}$$

gde su:

$$DM = \frac{2}{(\tau_{l+1} - \tau_{l-1})(\tau_l - \tau_{l-1})}$$

$$DL = -\frac{2}{(\tau_{l+1} - \tau_l)(\tau_l - \tau_{l-1})}$$

$$DP = \frac{2}{(\tau_{l+1} - \tau_l)(\tau_{l+1} - \tau_{l-1})} \; .$$

Jednačina (1) se sada može prepisati kao:

$$(\frac{d^2u}{d\tau^2})_l = DM\,u(l-1) + DL\,u(l) + DP\,u(l+1) = \frac{\varphi^2}{\mu^2}(u(l) - S(l)) \tag{6}$$

Zamenjujući u (6) relaciju:

$$u(l-1) = \alpha(l-1) + \beta(l-1)u(l) \tag{7}$$

sa poznatim $\alpha(l-1)$ i $\beta(l-1)$ iz prethodnog sloja, dobija se relacija:

$$u(l) = \alpha(l) + \beta(l)u(l+1) \tag{8}$$

čiji se koeficijenti $\alpha(l)$ i $\beta(l)$ za sve $l = 2, N-1$ čuvaju za 'back-substitution'.

Sada primenjujemo donji granični uslov (za $l = N$):

$$(\frac{du}{d\tau})_N = a_N + b_N\,u(N) \tag{9}$$

sa zadatim a_N i b_N (napr. $a_N = 0, b_N = 0$).

Razvojem u Tejlorov red imamo:

$$u(N-1) = u(N) - \Delta\tau(\frac{du}{d\tau})_N + \frac{\Delta\tau^2}{2}(\frac{d^2u}{d\tau^2})_N$$

gde je $\Delta\tau = \tau_N - \tau_{N-1}$. Zamenjujući (9) i (1) za $l = N$ u gornju jednačinu imamo:

$$u(N-1) = \alpha^*_{N-1} + \beta^*_{N-1}\,u(N)\ , \tag{10}$$

gde su koeficijenti α^*_{N-1} i β^*_{N-1} poznati. Izjednačavanjem (10) sa izrazom (8) za $l = N-1$, dobijamo:

$$u(N) = \frac{\alpha^*_{N-1} - \alpha(N-1)}{\beta(N-1) - \beta^*_{N-1}}\ .$$

Sa tako izračunatim rešenjem na poslednjoj dubini, $u(N)$, koristeći (8) dobijamo $u(l)$ za sve ostale tačke u atmosferi, od $l = N-1$ do površine.