Konstrukcija i analiza algoritama
FFT

Nina Radojičić

December 7, 2016

1 Numerički algoritmi - FFT i množenje polinoma

Problem: Dati su polinomi $p(x)$ i $q(x)$. Zadatak je da se izračuna njihov proizvod.

Direktni računanje zahteva $O(n^2)$ koraka (množenja i sabiranja).

Polinom stepena $n-1$ se, osim nizom svojih koeficijenata, može predstaviti i vrednostima u n različitih tačaka. Proizvod dva polinoma stepena $n-1$ je polinom stepena $2n-2$, pa ako su date vrednosti činioca u $2n-1$ tačaka, proizvod se može izračunati uz pomoć $2n-1$ množenja.

Prelaz od predstave koeficijentima na predstavu vrednostima u tačkama rešava se izračunavanjem vrednosti polinoma (npr. pomoću Horneove sheme). Dakle, računanje vrednosti polinoma $p(x)$ u n tačaka izvoljivo je pomoću n^2 množenja.

Prelaz od predstave vrednostima na predstavu koeficijentima se naziva interpolacija i u opštem slučaju zahteva $O(n^2)$ operacija.

FFT pogodnim izborom skupa tačaka uspeva da efikasnije izvrši obe operacije - algoritam je složenosti $O(nlogn)$. Dobar izbor je

$$x_{n/2+j} = -x_j$$

Ako je $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, važi:

$$P(x) = P_e(x^2) + xP_o(x^2)$$

$$P_e(x) = \sum_{j=0}^{n/2-1} a_{2j}x^j, P_o(x) = \sum_{j=0}^{n/2-1} a_{2j+1}x^j$$

$$P(-x) = P_e(x^2) + (-x)P_o(x^2)$$

$$\vdots$$

Dobili smo dva potproblema dimenzije $n/2 + O(n)$ dopunskih operacija.

Dobija se da treba uzeti n-ti koren iz jedinice w:

$w^n = 1, w^j \neq 1$ za $0 < j < n$ Za n tačaka biramo $1, w, w^3, \ldots, w^{n-1}$.

Algoritam 1 $FFT(n, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, w, V)$

Ulaz: n (prirodan broj, stepen dvojke) $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ niz elemenata w - primitivni n-ti koren iz jedinice

Izlaz: V(niz izlaznih elemenata sa indeksima od 0 i $n-1$)

begin
if $n = 1$ **then** $V[0] := a_0$
else
    $FFT(n/2, a_0, a_2, \ldots, a_{n-2}, w^2, U)$;
    $FFT(n/2, a_1, a_3, \ldots, a_{n-1}, w^2, W)$;
    for $j := 0$ to $n/2 - 1$ **do**
        $V[j] := U[j] + w^j W[j]$;
        $V[j + n/2] := U[j] - w^j W[j]$;
    end for
end if
end

Pokazuje se da je problem interpolacije veoma sličan problemu izračunavanja vrednosti, i da se praktično može iskoristiti isti algoritam.

Ako je

$$V(w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(w) \\ \vdots \\ P(w^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Onda važi $V(w)a = v$

$$V^{-1}(w)V(w)a = V^{-1}(w)v$$

$$a = V^{-1}(w)v = 1/nV(w^{-1})v$$

I ovo se računa pomoću FFT - tako što se w zameni sa w^{-1}. Ovo je *inverzna Furijeova transformacija.*

1. Izračunati brzu Furijeovu transformaciju vektora $P(x) = 1+2x+3x^2+4x^3$.

   Rešenje: Dakle, dat je polinom sa koeficijentima $(1, 2, 3, 4)$. Potprobleme ćemo označavati sa $P_{j_0,\ldots,j_k}(x_0, \ldots, x_k)$ gde $j_0, \ldots, j_k$ označavaju koeficijente polinoma, a $x_0, \ldots, x_k$ tačke u kojima se izračunavaju vrednosti polinoma.

   Treba da rešimo $P_{1,2,3,4}(1, w, w^2, w^3)$, pri čemu važi $w^4 = 1$ i $w^2 = -1$.

   U prvom koraku problem svodimo na $P_{1,3}(1, w^2)$ i $P_{2,4}(1, w^2)$, a korišćenjem veze

$$P(x) = P_e(x^2) + xP_o(x^2)$$

   dobijamo:

$$P_{1,3}(1) = P_1(1^2) + 1 \cdot P_3(1^2) = P_1(1) + P_3(1) = 1 + 3 = 4$$
$$P_{1,3}(w^2) = P_1(w^4) + w^2 \cdot P_3(w^4) = P_1(1) - P_3(1) = 1 - 3 = -2$$
$$\implies P_{1,3}(1, w^2) = (4, -2)$$

$$P_{2,4}(1) = P_2(1^2) + 1 \cdot P_4(1^2) = P_2(1) + P_4(1) = 2 + 4 = 6$$
$$P_{2,4}(w^2) = P_2(w^4) + w^2 \cdot P_4(w^4) = P_2(1) - P_4(1) = 2 - 4 = -2$$
$$\implies P_{2,4}(1, w^2) = (6, -2)$$

$$P_{1,2,3,4}(1) = P_{1,3}(1^2) + 1 \cdot P_{2,4}(1^2) = 4 + 6 = 10$$
$$P_{1,2,3,4}(w) = P_{1,3}(w^2) + w \cdot P_{2,4}(w^2) = -2 + w(-2) = -2 - 2w$$
$$P_{1,2,3,4}(w^2) = P_{1,3}(w^4) + w^2 \cdot P_{2,4}(w^4) = P_{1,3}(1) - P_{2,4}(1) = 4 - 6 = -2$$
$$P_{1,2,3,4}(w^3) = P_{1,3}(w^6) + w^3 \cdot P_{2,4}(w^6) = P_{1,3}(w^2) - wP_{2,4}(w^2)$$
$$= -2 - w(-2) = -2 + 2w$$

   Dakle,

$$P_{1,2,3,4}(1, w, w^2, w^3) = (10, -2 - 2w, -2, -2 + 2w)$$

2. Izračunati inverznu Furijeovu transformaciju vektora $(10, -2-2w, -2, -2+2w)$.

Rešenje: Zadatak je da rešimo $P_{10,-2-2w,-2,-2+2w}(1, w^{-1}, w^{-2}, w^{-3})$ i na kraju sve pomnožimo sa $\frac{1}{n} = \frac{1}{4}$.

$$P_{10,-2}(1) = P_{10}(1^2) + 1 \cdot P_{-2}(1^2) = 10 - 2 = 8$$
$$P_{10,-2}(w^{-2}) = P_{10}(w^{-4}) + w^{-2} \cdot P_{-2}(w^{-4}) = 10 - 1(-2) = 12$$
$$\implies P_{10,-2}(1, w^{-2}) = (8, 12)$$

$$P_{-2-2w,-2+2w}(1) = P_{-2-2w}(1^2)+1 \cdot P_{-2+2w}(1^2) = -2-2w-2+2w = -4$$
$$P_{-2-2w,-2+2w}(w^{-2}) = P_{-2-2w}(w^{-4})+w^{-2} \cdot P_{-2+2w}(w^{-4}) = -2-2s+2-2w = -4w$$
$$\implies P_{-2-2w,-2+2w}(1, w^{-2}) = (-4, -4w)$$

$$P_{10,-2-2w,-2,-2+2w}(1, w^{-1}, w^{-2}, w^{-3}) =?$$

$$P_{10,-2-2w,-2,-2+2w}(1) = P_{10,-2}(1^2) + 1 \cdot P_{-2-2w,-2+2w}(1^2) = 8 - 4 = 4$$
$$P_{10,-2-2w,-2,-2+2w}(w^{-1}) = P_{10,-2}(w^{-2}) + w^{-1} \cdot P_{-2-2w,-2+2w}(w^{-1}) =$$
$$= 12 + w^{-1}(-4w) = 12 - 4 = 8$$
$$P_{10,-2-2w,-2,-2+2w}(w^{-2}) = P_{10,-2}(w^{-4})+w^{-2} \cdot P_{-2-2w,-2+2w}w^{-4}) = 8-(-4) = 12$$
$$P_{10,-2-2w,-2,-2+2w}(w^{-3}) = P_{10,-2}(w^{-6})+w^{-3} \cdot P_{-2-2w,-2+2w}(w^{-3}) = 12+4 = 16$$
$$\{w^{-4} = 1, w^{-2} = -1\}$$

$$\implies P_{10,-2-2w,-2,-2+2w}(1, w^{-1}, w^{-2}, w^{-3}) = (4, 8, 12, 16)$$

Kada sve pomnožimo sa $\frac{1}{4}$ dobijamo $(1, 2, 3, 4)$.