Konstrukcija i analiza algoritama
vežbe 1

Nina Radojičić
nina@matf.bg.ac.rs

Matematčki fakultet

oktobar 2016.

Sadržaj

Sadržaj

Matematička indukcija

Princip matematičke indukcije:

Da bi za svako $n \in \mathcal{N}$ važilo tvrdjenje $T(n)$ dovoljno je pokazati:

bazu indukcije: tvrdjenje $T(1)$
induktivni korak: za svaki prirodan broj $n \geq 1$ važi da ako je tačno tvrdjenje $T(n)$, onda je tačno i tvrdjenje $T(n+1)$

Analogno, ako je potrebno dokazati da je tvrdjenje $T(n)$ tačno za svaki ceo broj $n \geq b$, onda je dovoljno pokazati da je tačno tvrdjenje $T(b)$ i da je tačna implikacija $T(i) \Rightarrow T(i+1)$ za svaki ceo broj $i \geq b$. Primetimo da b može biti negativan broj, nula ili pozitivan broj.

Princip potpune matematičke indukcije:

Da bi za svako $n \in \mathcal{N}$ važilo tvrdjenje $T(n)$ dovoljno je pokazati:

bazu indukcije: tvrdjenje $T(1)$
induktivni korak: za svaki prirodan broj $n \geq 1$ važi da ako je tačno tvrdjenje $T(k)$ za svako $k < n$, onda je tačno i tvrdjenje $T(n)$

Zadaci

Zadatak 1.

Koristeći princip matematičke indukcije dokazati da za svako $n \in \mathcal{N}$ važi: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Zadatak 3.

Koristeći princip matematičke indukcije dokazati da važi $2^n > n^2$ za svaki ceo broj n veći od 4.

Zadatak 6.

Dato je $n \geq 3$ pravih u ravni u opštem položaju (nikoje dve nisu paralelne, a nikoje tri se ne seku u istoj tački). Dokazati da je bar jedna od oblasti koje one formiraju - trougao.

Zadaci - nastavak

Zadatak 8.

Dokazati da se svaka poštarina koja je pozitivni celi broj dinara veći od 7 može formirati korišćenjem samo markica od 3 i od 5 dinara.

Zadatak 10.

Neka je T kompletno binarno stablo visine h. Visina čvora u T je h umanjeno za rastojanje čvora od korena tako je npr. koren visine h a listovi su visine 0. Dokazati da je suma visina svih čvorova u T jednaka $2^{h+1} - h - 2$.

Zadatak 12.

Neka su $d_1, d_2, \ldots, d_n$ prirodni brojevi i $n \geq 2$. Dokazati da ako je $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$ onda postoji stablo sa n čvorova čiji su stepeni brojevi $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Zadaci - nastavak

Zadatak 13.

Neka je n pozitivan ceo broj. Dokazati da se $2^n \times 2^n$ šahovska tabla sa jednim izbačenim poljem može pokriti korišćenjem delova L-oblika, gde ovi delovi prekrivaju 3 polja odjednom.

Zadatak 15.

Potpunom indukcijom pokazati da se svaka poštarina koja je pozitivni celi broj dinara veći od 12 može formirati korišćenjem samo markica od 4 i od 5 dinara.

Zadatak 16.

Šta nije u redu u sledećem dokazu?
Teorema: Za svaki nenegativan ceo broj n važi $5n = 0$.
Baza indukcije: $5 \cdot 0 = 0$
Induktivni korak: Pretpostavimo da je $5 \cdot j = 0$ za sve nenegativne cele brojeve j, tako da je $0 \leq j \leq k$. Napišimo $k + 1 = i + j$, gde su i i j nenegativni celi brojevi manji od $k + 1$. Prema induktivnoj hipotezi važi: $5(k + 1) = 5(i + j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$.

Složenost algoritama

Postoje 3 mere na osnovu kojih se porede efikasnosti algoritama:

1. najgori mogući slučaj,
2. prosečan slučaj,
3. brzina izvršavanja na unapred određenom skupu instanci (eng. benchmarks).

Za merenje u druga 2 slučaja potrebno je imati više informacija o problemu: koji je to prosečan ulaz i koliko se često javlja, kakva je priroda problema i kakve instance problema se najčešće susreću.
U prvom slučaju prednost je što se pomoću matematičkog proračuna često lako odredi efikasnost nekog algoritma.
Prvi način se pokazao dobar i zato je opšte prihvaćen.

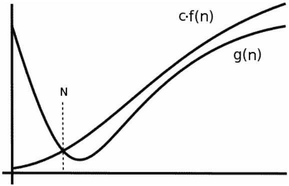
Oznake O, Ω, Θ

Veliko O notacija koristi se za procenu efikasnosti algoritama.

Definicija 1:

Neka su f: N→N i g: N→N proizvoljne funkcije argumenta n. Kažemo da je $\boldsymbol{g(n)=O(f(n))}$ ako postoje pozitivne konstante $c \in \mathbb{R}$ i $N \in \mathbb{N}$, takve da $\forall\ n \geq N$ važi: $g(n) \leq c \cdot f(n)$.

Napomena: U profesorovoj knjizi prethodna definicija je data za $\forall\ n > N$ (što je suštinski isto).



Oznake O, Ω, Θ

Oznaka $O(f(n))$ u stvari se odnosi na klasu funkcija, tako da je

$$g(n) = O(f(n))$$

drugi zapis za

$$g(n) \in O(f(n))$$

.

$O(1)$ oznaka za klasu ograničenih funkcija.

Primer:

$5n^2 + 8 = O(n^2)$ jer je

$$5n^2 + 8 \leq \frac{11}{2}n^2$$

za $n \geq 4$, tj. $c = \frac{11}{2}$, $N = 4$

Oznake O, Ω, Θ

Funkcije se smeštaju u različite klase u zavisnosti od njihove brzine rasta. U prethodnom primeru se pokazuje da funkcija $5n^2 + 8$ ne raste brže od $6 \cdot n^2$.
Umesto

$$O(a \cdot n + b)$$

se koristiti

$$O(n),$$

gde su a i b proizvoljne konstante.
Isto važi za $O(n^2)$, $O(\log n)$ itd...
Osnova logartima nije relevantna, što sledi iz jednakosti

$$\log_a n = log_a(b^{log_b n}) = log_b n \cdot log_a b = log_b n \cdot c$$

Oznake O, Ω, Θ

Definicija 2:

Neka su f:N→N i g:N→N proizvoljne funkcije argumenta n. Kažemo da je $f(n)$ asimptotska donja granica funkcije $g(n)$ i pišemo $g(n) = \Omega(f(n))$ ako postoje pozitivne konstante $c \in \mathbb{R}$ i $N \in \mathbb{N}$, takve da $\forall n \geq N$ važi: $g(n) \geq c \cdot f(n)$.

Definicija 3:

Ako za funkcije $f(n)$ i $g(n)$ istovremeno važi

$$g(n) = O(f(n))$$

i

$$g(n) = \Omega(f(n))$$

onda pišemo

$$g(n) = \Theta(f(n)).$$

Zadaci

Zadatak 1.

Dokazati da važi: $T(n) = 2n^2 + n - 1 = \Theta(n^2)$

Zadatak 2.

Dokazati da važi: $17n \log_2 n - 23n - 10 = \Theta(n \log_2 n)$