Konstrukcija i analiza algoritama
vežbe 1 - nastavak

Nina Radojičić

6. oktobar 2016

1 Složenost algoritama[1]

Postoje 3 mere na osnovu kojih se porede efikasnosti algoritama:

1. najgori mogući slučaj,
2. prosečan slučaj,
3. brzina izvršavanja na unapred određenom skupu instanci (eng. benchmarks).

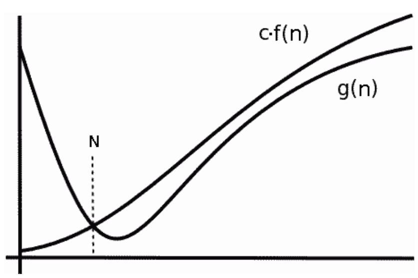
Za merenje u druga 2 slučaja potrebno je imati više informacija o problemu: koji je to prosečan ulaz i koliko se često javlja, kakva je priroda problema i kakve instance problema se najčešće susreću. U prvom slučaju prednost je što se pomoću matematičkog proračuna često lako odredi efikasnost nekog algoritma; prvi način se pokazao dobar i zato je opšte prihvaćen.

1.1 Oznake O, Ω, Θ

Veliko O notacija koristi se za procenu efikasnosti algoritama.

Definicija 1: Neka su f: N→N i g: N→N proizvoljne funkcije argumenta n. Kažemo da je ***g(n)=O(f(n))*** ako postoje pozitivne konstante $c \in \mathbb{R}$ i $N \in \mathbb{N}$, takve da $\forall\ n \geq N$ važi: $g(n) \leq c \cdot f(n)$.

Napomena: U profesorovoj knjizi prethodna definicija je data za $\forall\ n > N$ (što je suštinski isto).



Slika pokazuje odnos funkcija $g(n)$ i $f(n)$: $g(n)$ **ne raste brže od** $c{\cdot}f(n)$.

Oznaka $O(f(n))$ u stvari se odnosi na klasu funkcija, tako da je $g(n) = O(f(n))$ drugi zapis za $g(n) \in O(f(n))$.

Uočimo i da je $O(1)$ oznaka za klasu ograničenih funkcija.

Takođe važi:
$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$
$O(f(n)) \cdot O(g(n)) = O(f(n) \cdot g(n))$

Primer: $5n^2 + 8 = O(n^2)$ jer je $5n^2 + 8 \leq \frac{11}{2}n^2$ za $n \geq 4$, tj. $c = \frac{11}{2}, N = 4$.

Dakle, kada je potrebno dokazati da jedna funkcija pripada nekoj klasi funkcija, traže se konstante c i N da bude zadovoljena nejednakost. Prvo se traži c, a potom dovoljno veliko N. Obično postoji veliki (neograničen) broj kombinacija c i N pomoću kojih se može dokazati tvrđenje.

[1]Materijali velikim delom preuzeti od Jelene Hadži-Purić: `www.math.rs/~jelenagr`

Funkcije se smeštaju u različite klase u zavisnosti od njihove brzine rasta. U prethodnom primeru se pokazuje da funkcija $5n^2 + 8$ ne raste brže od $6 \cdot n^2$. Vidimo da nam multimplikativne konstante ne igraju bitnu ulogu, pa ćemo uvek umesto $O(a \cdot n + b)$ koristiti $O(n)$, gde su a i b proizvoljne konstante (isto važi za $O(n^2), O(\log n)$ itd). Osnova logartima nam nije bitna, što sledi iz jednakosti $\log_a n = log_a(b^{log_b n}) = log_b n \cdot log_a b = log_b n \cdot c$, gde $log_a b$ menjamo oznakom c za konstantu.

Definicija 2: Neka su f:N→N i g:N→N proizvoljne funkcije argumenta n. Kažemo da je $f(n)$ asimptotska donja granica funkcije $g(n)$ i pišemo $g(n) = \Omega(f(n))$ ako postoje pozitivne konstante $c \in \mathbb{R}$ i $N \in \mathbb{N}$, takve da $\forall n \geq N$ važi: $g(n) \geq c \cdot f(n)$.

Definicija 3: Ako za funkcije $f(n)$ i $g(n)$ istovremeno važi $g(n) = O(f(n))$ i $g(n) = \Omega(f(n))$ onda pišemo $g(n) = \Theta(f(n))$.

1. Dokazati da važi: $T(n) = 2n^2 + n - 1 = \Theta(n^2)$
DOKAZ: Potrebno je dokazati da postoje konsante c_1, c_2, N, takve da $\forall\ n \geq N$ važi:

$$c_1 n^2 \leq 2n^2 + n - 1 \leq c_2 n^2, \text{ to jest}$$

$$c_1 \leq 2 + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n^2} \leq c_2$$

Pronalazimo prvo konstante c_1 i N_1 za koje je zadovoljena leva nejednakost, pa konstante c_2 i N_2 za koje je zadovoljena desna nejednakost. Odatle dobijamo c_1, c_2 i $N = \max\{N1, N2\}$. Jedno rešenje je $c_1 = 2, c_2 = 3, N = 1$.

2. Dokazati da važi:$17n \log_2 n - 23n - 10 = \Theta(n \log_2 n)$
DOKAZ: Potrebno je dokazati da postoje konsante c_1, c_2, N tako da $\forall n \geq N$ važi:

$$c_1 n \log_2 n \leq 17n \log_2 n - 23n - 10 \leq c_2 n \log_2 n, \text{ to jest}$$

$$c_1 \leq 17 - \tfrac{23}{\log_2 n} - \tfrac{10}{n \log_2 n} \leq c_2$$

Poslednja nejednakost važi za $c_1 = 4, c_2 = 17, N = 4$. Obrazložiti zašto nejednakost važi.