Konstrukcija i analiza algoritama
vežbe 1

Nina Radojičić

6. oktobar 2016

1 Matematička indukcija[1]

Princip matematičke indukcije: Da bi za svako $n \in \mathcal{N}$ važilo tvrdjenje $T(n)$ dovoljno je pokazati:

bazu indukcije: tvrdjenje $T(1)$

induktivni korak: za svaki prirodan broj $n \geq 1$ važi da ako je tačno tvrdjenje $T(n)$, onda je tačno i tvrdjenje $T(n+1)$

Analogno, ako je potrebno dokazati da je tvrdjenje $T(n)$ tačno za svaki ceo broj $n \geq b$, onda je dovoljno pokazati da je tačno tvrdjenje $T(b)$ i da je tačna implikacija $T(i) \Rightarrow T(i+1)$ za svaki ceo broj $i \geq b$. Primetimo da b može biti negativan broj, nula ili pozitivan broj.

Princip matematičke indukcije se često koristi u izmenjenom obliku:

Princip potpune matematičke indukcije: Da bi za svako $n \in \mathcal{N}$ važilo tvrdjenje $T(n)$ dovoljno je pokazati:

bazu indukcije: tvrdjenje $T(1)$

induktivni korak: za svaki prirodan broj $n \geq 1$ važi da ako je tačno tvrdjenje $T(k)$ za svako $k < n$, onda je tačno i tvrdjenje $T(n)$

1.1 Zadaci

1. Koristeći princip matematičke indukcije dokazati da za svako $n \in \mathcal{N}$ važi: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

2. Koristeći princip matematičke indukcije dokazati da za svako $n \in \mathcal{N}$ važi: $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ je deljivo sa 8.

   Uputstvo: Uvedimo oznaku $S(n) = 5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$. Za $n+1$ se dobija da je $S(n+1) = S(n) + 4 \cdot (5^{n+1} + 3^n)$ pa je na osnovu induktivne hipoteze $S(n)$ deljivo sa 8, a i drugi sabirak je deljiv sa 8 jer je izraz u zagradi deljiv sa 2 kao zbir 2 neparna broja.

3. Koristeći princip matematičke indukcije dokazati da važi $2^n > n^2$ za svaki ceo broj n veći od 4.

   Uputstvo: Jednostavno se može pokazati da za broj 5 važi baza indukcije. Za svaki prirodan broj $n \geq 5$ ako se pretpostavi da važi $2^n > n^2$, onda važi: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n > n^2 + n^2 > n^2 + 4n = n^2 + 2n + 2n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, te je tačan i induktivni korak.

4. Koristeći princip matematičke indukcije dokazati da za svaki celi broj $n > 1$ važi sledeća nejednakost:
   $\sum\limits_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} > \frac{13}{24}$

5. Koristeći princip matematičke indukcije dokazati da za svaki celi broj $n > 1$ važi sledeća nejednakost:
   $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$

[1] Materijal je osmišljen na osnovu knjiga: Algoritmi, Miodraga Živkovića i Discrete Mathematics and Its Applications, Kenneth H. Rosen

6. Dato je $n \geq 3$ pravih u ravni u opštem položaju (nikoje dve nisu paralelne, a nikoje tri se ne seku u istoj tački). Dokazati da je bar jedna od oblasti koje one formiraju - trougao.

   Uputstvo: Dokaz za 3 tačke je trivijalan. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n \geq 3$. Ako je u opštem položaju $n+1$ tačka među njima na proizvoljan način izdvojimo jednu i posmatramo ostalih n tačaka. Po induktivnoj hipotezi jedna od oblasti koju formiraju je trougao. Izdvojena prava može da nema zajedničkih tačaka sa trouglom (u tom slučaju je isti trougao rešenje za $n+1$ tačku) ili može da seče trougao. U slučaju da ga seče ne može imati nijednu zajedničku taču sa njegovim temenima jer bi u suprotnom imali tri prave koje se seku u jednoj tački. U tom slučaju ta prava zajedno sa dve od tri prave koje su činile prethodni trougao, gradi novi trougao.

7. Dat je niz $1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40, ...$ koji počinje kao aritmetička progresija, a posle prvih pet članova postaje geometrijska progresija. Dokazati da se svaki prirodan broj može predstaviti u obliku zbira različitih brojeva iz ovog niza.

   Uputstvo: Preformulišimo tvrdjenje na sledeći način: dokazati da se brojevi manji od $5 \cdot 2^n, n \geq 0$ mogu predstaviti u obliku zbira različitih brojeva iz ovog niza. Bazu indukcije (za $n = 0$) lako dokazujemo, jer se svaki broj manji od 5 može predstaviti u traženom obliku. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $k-1$ i pokažimo da važi za k. Neka je $x < 5 \cdot 2^k$ proizvoljan takav broj. Ako je $x < 5 \cdot 2^{k-1}$ onda prema induktivnoj hipotezi tvrdjenje važi. Inače $x \in [5 \cdot 2^{k-1}, 5 \cdot 2^k)$. U tom slučaju važi: $0 \leq x - 5 \cdot 2^{k-1} < 5 \cdot 2^k - 5 \cdot 2^{k-1} = 5 \cdot 2^{k-1}$. Broj $x - 5 \cdot 2^{k-1}$ se prema induktivnoj hipotezi može predstaviti u obliku zbira različitih brojeva manjih od $5 \cdot 2^{k-1}$, pa x dobijamo kada tom zbiru dodamo još $5 \cdot 2^{k-1}$. Ne možemo imati ponavljanja medju sabircima jer ih po induktivnoj hipotezi nema u prethodnom zbiru, a broj $5 \cdot 2^{k-1}$ se ne može javiti u tom zbiru jer je broj $x - 5 \cdot 2^{k-1}$ strogo manji od $5 \cdot 2^{k-1}$.

8. Dokazati da se svaka poštarina koja je pozitivni celi broj dinara veći od 7 može formirati korišćenjem samo markica od 3 i od 5 dinara.

   Uputstvo: Broj $n = 8$ se predstavlja kao zbir jednog broja 3 i jednog broja 5. Pretpostavimo da tvrđenje važi za prirodan broj $n \geq 8$. Razlikujemo 2 slučaja:

   (a) n je predstavljen samo kao zbir broja 3. Najmanji takav broj je 9, pa se svaki takav broj predstavlja kao zbir najmanje tri broja 3. U tom slučaju ukloniti tri puta broj 3 i dodati dva puta broj 5 - tako se dobija broj $n+1$.

   (b) n je predstavljen kao zbir brojeva od kojih je barem jedan 5. Ukloniti taj broj i dodati dva puta broj 3 - tako se dobija broj $n+1$.

9. Dokazati da se oblasti na koje ravan deli n kružnica sa po jednom povučenom tetivom mogu obojiti sa 3 boje tako da su susedne oblasti uvek obojene različitim bojama.

   Uputstvo: Obeležimo boje sa 0,1,2. Pretpostavimo da se oblast sa n kružnica (sa povučenom tetivom) može obojiti na traženi način i dodajemo $(n+1)$-vu kružnicu. Ona sa tetivom deli ravan na tri oblasti: oblastima van kružnice ne menjamo boju, oblastima u kružnici sa jedne strane tetive menjamo u boju $(i+1) mod\ 3$, a sa druge strane u boju $(i-1) mod\ 3$.

10. Neka je T kompletno binarno stablo visine h. Visina čvora u T je h umanjeno za rastojanje čvora od korena tako je npr. koren visine h a listovi su visine 0. Dokazati da je suma visina svih čvorova u T jednaka $2^{h+1} - h - 2$.

    Uputstvo: Binarno stablo je kompletno ako su svi nivoi kompletno popunjeni, izuzev možda poslednjeg nivoa u kome su čvorovi raspoređeni najlevlje moguće. Za $h = 0$ dokaz je trivijalan. Suma visina svih čvorova u stablu je $\sum_{i=0}^{h}(h-i) \cdot 2^i$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $h \geq 0$. Krenuvši od prethodne sume u kojoj je h zamenjeno sa $h+1$ i koristeći formulu za sumu elemenata geometrijske progresije dokazuje se da tvrđenje važi za $h+1$.

11. Razmotrimo varijantu igre NIM. Igra počinje sa n šibica, dva igrača naizmenično uzimaju 1, 2 ili 3 šibice odjednom. Igrač koji uzme poslednju šibicu gubi. Pokazati da ako svaki igrač igra po najboljoj mogućoj strategiji prvi igrač pobeđuje za $4j+2, 4j+3$ ili $4j+4, j \geq 0$, a drugi igrač za $n = 4j+1, j \geq 0$.

    Uputstvo: Za $j = 0$ dokaz je trivijalan. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $j \geq 0$. Dokaz za $j+1$ izvodi se svođenjem 4 mogućnosti za broj $n+1$ na 4 mogućnosti date induktivnom hipotezom.

12. Neka su $d_1, d_2, \ldots, d_n$ prirodni brojevi i $n \geq 2$. Dokazati da ako je $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$ onda postoji stablo sa n čvorova čiji su stepeni brojevi $d_1, d_2, \ldots, d_n$.
    Napomena: voditi računa o tekstu zadatka, ovde nije rečeno da je stablo binarno.

Uputstvo: Za $n = 2$ dokaz je trivijalan - dva čvora povezana granom. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $n - 1$ brojeva. Neka je dato n prirodnih brojeva $d_1, d_2, \ldots, d_n$ čija je suma $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Bar jedan od brojeva mora biti jednak 1 (inače bi suma bila $\geq 2n$) - neka je to broj d_i i bar jedan broj mora biti > 1 (inače bi suma bila $\leq n$) - neka je to broj d_j. Ako izbacimo broj d_i iz skupa i broj d_j umanjimo za 1, dobijamo skup za koji važi, na osnovu induktivne hipoteze, da postoji stablo sa tim stepenima. Ako u to stablo dodamo novi čvor stepena 1 (list) povezan sa čvorom stepena $d_j - 1 \geq 1$ dobijamo opet stablo sa n čvorova i stepenima $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

13. Neka je n pozitivan ceo broj. Dokazati da se $2^n \times 2^n$ šahovska tabla sa jednim izbačenim poljem može pokriti korišćenjem delova L-oblika, gde ovi delovi prekrivaju 3 polja odjednom.

    Uputstvo: Dokažimo jače tvrđenje: pokrivanje se može izvršiti nad tablom kojoj je izbačeno jedno od 4 polja u uglovima. Za $n = 1$ je tabla dimenzija 2×2 i tada se traženo pokrivanje dobija postavljanjem dela L-oblika na proizvoljan način. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n \geq 1$. Pokrivenu tablu dimenzije $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ dobijamo tako što iskoristimo 4 pokrivene table dimenzija $2^n \times 2^n$. Od njih 3 zarotiramo tako da se izbačeno polje nalazi u središtu novoformirane table, a četvrtu zarotiramo da se izbačeno polje nalazi u uglu novoformirane table. Središnja 3 polja popune se novim L-oblikom.

14. *Potpunom indukcijom* pokazati da ako je n prirodan broj veči od 1, onda se on može predstaviti kao proizvod prostih brojeva.

15. *Potpunom indukcijom* pokazati da se svaka poštarina koja je pozitivni celi broj dinara veći od 12 može formirati korišćenjem samo markica od 4 i od 5 dinara.

16. Šta nije u redu u sledećem dokazu?

    Teorema: Za svaki nenegativan ceo broj n važi $5n = 0$.

    Baza indukcije: $5 \cdot 0 = 0$

    Induktivni korak: Pretpostavimo da je $5 \cdot j = 0$ za sve nenegativne cele brojeve j, tako da je $0 \leq j \leq k$. Napišimo $k + 1 = i + j$, gde su i i j nenegativni celi brojevi manji od $k + 1$. Prema induktivnoj hipotezi važi: $5(k + 1) = 5(i + j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$.

    Uputstvo: Ne možemo napisati $k + 1 = i + j$, jer za $k = 0$ ne postoje i i j manji od $k + 1$ koji u zbiru daju $k + 1$.

17. Naći grešku u sledećem dokazu (navesti rečenicu koja nije ispravna i objasniti zašto nije ispravna):
    Neka je dat neprazan skup obojenih klikera. Svi klikeri u tom skupu su iste boje.

    1) Baza indukcije. Ako imamo skup koji sadrži samo jedan kliker, svi klikeri tog skupa su iste boje.
    2) Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svaki skup koji sadrži n klikera. Uzmimo skup A koji u sebi ima $n + 1$ kliker. Fiksirajmo kliker koji možemo da označimo sa a. Skup $A \setminus a$ u sebi sadrži tačno n klikera, tako da na osnovu induktivne hipoteze možemo da zaključimo da su svi klikeri u tom skupu iste boje npr. crvene. Fiksirajmo sada neki drugi kliker iz skupa $A \setminus a$, npr. b. On je dakle crvene boje. Na osnovu induktivne hipoteze skup $A \setminus b$ u sebi sadrži sve klikere iste boje. Pošto se u njemu nalazi i kliker a, zajedno sa svim ostalim crvenim klikerima, i on mora biti crven. Dakle svi klikeri skupa A su crveni, tj. iste boje. (4 poena)