Задаци за вежбање из Линеарне алгебре

Никола Лелас

1 Комплексни бројеви

Задатак 1. Наћи све вредности $z \in \mathbb{C}$ такве да је

$$z^2 + 2iz + 1 = 0.$$

Задатак 2. Одредити сва решења једначине

$$z^4 = -1.$$

Задатак 3. Ако су z_1 и z_2 комплексни бројеви такви који нису реални и такви да су $z_1 + z_2$ и $z_1 \cdot z_2$ реални, доказати да је $z_1 = \bar{z}_2$.

Задатак 4. Нека је

$$z_n = \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Одредити све n такве да је:

1. $\Re(z_n) = 0.$
2. $\Im(z_n) = 0.$

Задатак 5. Одредити све комплексне бројеве z за које важи

$$\Im(z^2) = 0.$$

Задатак 6. Одредити све комплексне бројеве z за које важи

$$z^2 + |\bar{z}| = 0.$$

Задатак 7. Одредити комплексан број z такав да је $|z + 4 - 3i| = 1$ и вредност $|z|$ најмања могућа.

Задатак 8. Израчунати z^3 и $\frac{1}{z^{1000}} + z^{1000}$ ако је

$$\frac{1}{z} + z = 1.$$

Задатак 9. Доказати да је за све $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ испуњено

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

Задатак 10. Нека је a комплексан број који није реалан. Доказати да за све $x \in \mathbb{R}$ важи

$$\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right| = 1.$$

Задатак 11. Одредити све шесте корене комплексног броја $i - \sqrt{3}$.

Задатак 12. Решити у $\mathbb{C}$ једначину

$$z^3 + 8 = 0.$$

Задатак 13. Решити у $\mathbb{C}$ једначину

$$z^6 - 2z^5 + 4z^4 - 8z^3 + 16z^2 - 32z + 64 = 0.$$

Задатак 14. Решити у $\mathbb{C}$ једначину

$$z^5 = (1 - z)^5.$$

Задатак 15. Доказати да је број

$$\frac{z-1}{z+1},\ \ z \neq -1$$

реалан ако и само ако је z реалан.

Задатак 16. Доказати да је број

$$w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2},\ \ z_1 \cdot z_2 \neq -1$$

реалан ако важи $|z_1| = |z_2| = 1$.

Задатак 17. Доказати да је број $z_n = (\sqrt{3} + i)^n + (\sqrt{3} - i)^n$ реалан за све $n \in \mathbb{N}$.

Задатак 18. Решити наредне једначине у $\mathbb{C}$:

1. $z^4 = i(z - 2i)^4$.
2. $(z + 1)^n = z^n,\ \ n \in \mathbb{N}$.
3. $(z + 1)^n = (z - 1)^n,\ \ n \in \mathbb{N}$.
4. $(z + 1)^n = (z - i)^n,\ \ n \in \mathbb{N}$.

Задатак 19. Наћи све комплексне бројеве z такве да је

$$\bar{z} = z^{n-1},\ \ n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}.$$

Задатак 20. Комплексан број

$$z = \frac{1 + \cos t + i \sin t}{1 + \cos t - i \sin t},\ \ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

представити у тригонометријском облику.

Задатак 21. Доказати да постоји комплексан број z такав да једнакост

$$z^n = \bar{z}^n$$

не важи ни за један природан број n.

2 Поља

Задатак 22. Нека је

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Испитати да ли је A поље у односу на уобичајене операције сабирања и множења матрица.

Задатак 23. Нека је $D > 0$ бесквадратан цео број, што значи да није дељив квадратом ниједног простог броја. Нека је

$$\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \left\{ a + b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Показати да је $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ поље у односу на уобичајене операције сабирања и множења (реалних) бројева.

Задатак 24. Испитати да ли је, уз исте ознаке и у односу на исте операције као у претходном задатку, скуп

$$\mathbb{Z}(\sqrt{D}) = \left\{ m + n\sqrt{D} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

једно поље.

Задатак 25. Нека је A произвољан скуп са барем два елемента. Дефинишимо на партитивном скупу $P(A)$ скупа A две бинарне операције $+$ и $\cdot$ са

$$x + y = x \Delta y$$

и

$$x \cdot y = x \cap y, \ x, y \in P(A).$$

Испитати да ли је $(A, +, \cdot)$ поље. Шта се дешава ако је скуп A има само један елемент?

Задатак 26. Доказати да скуп свих реалних бројева облика $a + b\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, при чему су a, b и c рационални, чини поље у односу на уобичајене операције сабирања и множења реалних бројева. Наћи мултипликативни инверз за $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

3 Еуклидов алгоритам и коначна поља $\mathbb{F}_p$

Задатак 27. Користећи Еуклидов алгоритам одредити:

1. НЗД$(11254, 2272)$.
2. НЗД$(2276, 90881)$.
3. НЗД$(10004, 998)$.
4. НЗД$(7654, 3321)$.
5. НЗД$(45501, 3772)$.
6. НЗД$(22675, 1955)$.
7. НЗД$(144712, 22634)$.
8. НЗД$(10092, 1654)$.
9. НЗД$(1121, 39925)$.
10. НЗД$(84028, 5436)$.
11. НЗД$(9801, 7623)$.

Задатак 28. Користећи Еуклидов алгоритам одредити $d =$ НЗД(a, b), као и целе бројеве x и y такве да је $ax + by = d$ ако је:

1. $a = 1651, b = 227$.
2. $a = 829, b = 336$.
3. $a = 6246, b = 2073$.
4. $a = 4292, b = 604$.
5. $a = 5610, b = 903$.
6. $a = 2001, b = 742$.
7. $a = 751, b = 442$.
8. $a = 3176, b = 2902$.
9. $a = 4023, b = 1992$.
10. $a = 2192, b = 595$.
11. $a = 1964, b = 1214$.

Задатак 29. Одредити инверз броја x у односу на множење по модулу p:

1. $x = 2201, p = 10477$.
2. $x = 67, p = 1049$.
3. $x = 351, p = 8011$.
4. $x = 2674, p = 18089$.
5. $x = 3047, p = 29863$.
6. $x = 999, p = 6367$.
7. $x = 1389, p = 2017$.
8. $x = 226, p = 977$.
9. $x = 301, p = 6869$.
10. $x = 2108, p = 9137$.
11. $x = 1177, p = 11777$.
12. $x = 6909, p = 27647$.

4 Системи линеарних једначина

Задатак 30. Решити систем једначина у пољу реалних бројева

$$
\begin{aligned}
2x - y + z - u &= 0\\
2x - y - 3u &= 2\\
3x - z + u &= -3\\
2x + 2y - 2z + 5u &= -6
\end{aligned}
$$

Задатак 31. Решити систем у пољу реалних бројева

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + 3z + 8u &= -7\\
2x + 3y + 9z + 2u &= 6\\
3x - y - 6z - 4u &= 2\\
x + y - 6z - 4u &= 6
\end{aligned}
$$

Задатак 32. Решити систем у пољу реалних бројева

$$
\begin{aligned}
2x + 7y + 3z + u &= 6\\
3x + 8y + 5z + 2u &= 3\\
9x + 4y + z + 7u &= 2\\
x + y + z + u &= 1
\end{aligned}
$$

Задатак 33. Решити систем у пољу реалних бројева

$$
\begin{aligned}
x - 2y + z - u &= -4\\
2x - y + z + u &= 7\\
3x + 3y + 2z - 4u &= -1\\
x + y + 3z - 2u &= 4
\end{aligned}
$$

Задатак 34. Решити систем у пољу реалних бројева

$$
\begin{aligned}
x - y + z - 2u &= 1\\
2x + y - z + 3u &= 3\\
x - 2y + 3z - 2u &= 5\\
4x + 2y - 4z + u &= -3
\end{aligned}
$$

Задатак 35. Решити хомогени систем у пољу реалних бројева

$$
\begin{aligned}
2x - 6y + 4z + 3u &= 0\\
11x - 8y + 17z + 4u &= 0\\
3x - 4y + 5z + 2u &= 0
\end{aligned}
$$

Задатак 36. Решити хомогени систем у пољу реалних бројева

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0 \\ 2x - y + 3z - 4u &= 0 \\ x - y + z - u &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 37. Решити хомогени систем у пољу реалних бројева

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - 4u &= 0 \\ x + y - z - u &= 0 \\ 3x - y - 3z + u &= 0 \\ x + 2y - 2z - u &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 38. Решити систем у зависности од реалног параметра p

$$\begin{aligned} 9x + y + 4z + (p+2)u &= 2 \\ 3x + 2y + pz + 2u &= 4 \\ 2x + 3y + (p+2)z + u &= p + 1 \end{aligned}$$

Задатак 39. Решити систем у зависности од реалног параметра p

$$\begin{aligned} (p+1)x + y + 2z - u &= 0 \\ x + py - 3z + u &= -1 \\ x + 3y + 2z + u &= 2 \end{aligned}$$

Задатак 40. Решити систем у зависности од реалног параметра p

$$\begin{aligned} x + 5y + (2p-3)z + 4u &= 12 - 2p \\ x + 3y + 3z + 4u &= 2p - 2 \\ 5x + 15y + (2p+9)z + 20u &= 2p + 6 \end{aligned}$$

Задатак 41. Решити систем у зависности од реалног параметра p

$$\begin{aligned} x + y - 2z + 3u &= 4 \\ 4x - 2y + z - 3u &= 10 \\ 3x + y - 3z + pu &= 6 \\ 4x + 2y - 5z + 5u &= 10 \end{aligned}$$

Задатак 42. Решити систем у зависности од реалног параметра p

$$\begin{aligned} x - y + z + u &= 2 \\ -2x + (p+1)y + 2u &= p - 5 \\ 2x - 3y + 3z + 4u &= 3 \\ 2x - y + z &= p^2 + 4 \end{aligned}$$

Задатак 43. Решити систем у зависности од реалног параметра p

$$\begin{aligned} x - 2y + z + u &= 6 \\ 2x + y - 2z + 3u &= 3 \\ x + 3y - 3z + 2u &= -3 \\ 3x - y - z + pu &= 5 - p \end{aligned}$$

Задатак 44. Решити хомогени систем у зависности од реалног параметра p

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - py - z &= 0 \\ 2x - y + pz &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 45. Решити хомогени систем у зависности од реалног параметра p

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ -x + y + pz &= 0 \\ px + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 46. Решити хомогени систем у зависности од реалног параметра p

$$\begin{aligned} 2x + py - 3z &= 0 \\ 3x - y + 5z &= 0 \\ x - 2y + (p + 7)z &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 47. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z &= a \end{aligned}$$

Задатак 48. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= -2 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

Задатак 49. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} ax - y + 3z &= a - 1 \\ x + ay - z &= 1 \\ 4x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

Задатак 50. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ 2x+ay+z&=6\\ ax+2y-z&=3 \end{aligned}$$

Задатак 51. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} ax+2y+2z&=4\\ 2x+ay+2z&=4\\ 2x+2y+az&=4 \end{aligned}$$

Задатак 52. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} (2-a)x&=0\\ 2x+(2-a)y+z&=1\\ -4x-y-az&=0 \end{aligned}$$

Задатак 53. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} x+y+z&=a\\ ax+y+2z&=2\\ x+ay+z&=4 \end{aligned}$$

Задатак 54. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} x+y-z&=5\\ 6x+2y-az&=11\\ (a-2)x+y-4z&=4 \end{aligned}$$

Задатак 55. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} x+y+z&=a-1\\ x+ay+z&=2a-2\\ x+y+(a-1)z&=1-a \end{aligned}$$

Задатак 56. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ x-ay+2z&=1\\ -2x+2y-az&=-4 \end{aligned}$$

Задатак 57. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} x+2y-az&=1\\ 2x+ay+z&=-2\\ x+3z&=-3 \end{aligned}$$

Задатак 58. Решити систем у зависности од реалног параметра a

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + (a+1)y + z &= 2a \\ x + y + az &= a \end{aligned}$$

Задатак 59. Решити хомогени систем

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ -x + y &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 60. Решити хомогени систем

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ -2x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 61. Решити хомогени систем

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + 2y - 2z &= 0 \\ 3x + 3y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 62. Решити хомогени систем

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - 3y &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 63. Одредити вредности реалног параметра p за које наредни систем има нетривијална решења

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ x + 2y + pz &= 0 \\ px + y &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 64. Одредити вредности реалног параметра p за које наредни систем има нетривијална решења

$$\begin{aligned} 2x + py + 3z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ -2x + 3y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 65. Одредити вредности реалног параметра p за које наредни систем има нетривијална решења

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z &= 0 \\ 3x + 5y - 7z &= 0 \\ 4x - 5y + pz &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 66. Одредити вредности реалног параметра p за које наредни систем има нетривијална решења

$$\begin{aligned} x + y + pz &= 0 \\ x + py + z &= 0 \\ px + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 67. Одредити вредности реалног параметра p за које наредни систем има нетривијална решења

$$\begin{aligned} x + py - 2z &= 0 \\ -2x - y + pz &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 68. Одредити вредности реалног параметра p за које наредни систем има нетривијална решења

$$\begin{aligned} 2x - 2y + pz &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 4x - py + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 69. Одредити вредности реалног параметра p за које наредни систем има нетривијална решења

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ px + 2y + z &= 0 \\ x + py &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 70. Одредити вредности реалног параметра p за које наредни систем има нетривијална решења

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ px + 2y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

Задатак 71. Решити систем над пољем $\mathbb{F}_5$

$$\begin{aligned} 2x - y + 7z &= 0 \\ x + 3y &= 4 \\ 3x + 4y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Задатак 72. Решити систем над пољем $\mathbb{F}_7$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 4z &= 6 \\ 2x + y + 2z &= 5 \\ 4x - y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Задатак 73. Решити систем над пољем $\mathbb{F}_7$

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 3y + 4z &= 11 \\ 6x - 2z &= 5 \end{aligned}$$

Задатак 74. Решити систем над пољем $\mathbb{F}_{11}$

$$\begin{aligned} 4x + y + 9z &= 10 \\ 3x + 4y + 2z &= 5 \\ 8x - y + 6z &= 3 \end{aligned}$$

Задатак 75. Решити систем над пољем $\mathbb{F}_{11}$

$$\begin{aligned} x - y + z &= 9 \\ 6x + 4z &= 5 \\ 2x - 2y + 7z &= 1 \end{aligned}$$

5 Векторски простори. Векторски потпростори

Задатак 76. Означимо са $\mathbb{R}^\infty$ скуп свих реалних низова. Показати да је $\mathbb{R}^\infty$ један векторских простор над $\mathbb{R}$ уз операције сабирања низова и множења низова реалних скаларом дефинисане са

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

и

$$\alpha(a_n) = (\alpha a_n)$$

за све реалне низове $(a_n), (b_n)$ и реалне бројеве α.

Задатак 77. Нека је

$$\mathrm{FIB} = \{(a_n) \in \mathbb{R}^\infty \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ за све } n \in \mathbb{N}\}.$$

Испитати да ли је FIB један потпростор од $\mathbb{R}^\infty$.

Задатак 78. Нека је

$$F = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ глатка и } f' = f \right\}.$$

Испитати да ли је F векторски простор у односу на уобичајене операције сабирања и множења реалних функција скаларом.

Задатак 79. Показати да се четврта аксиома из дефиниције векторског простора V

$$u + v = v + u \text{ за све } u, v \in V$$

може извести из осталих аксиома.

Задатак 80. Показати да је последња аксиома векторског простора

$$1 \cdot v = v, \text{ за све } v \in V$$

независна од осталих аксиома. Упутство: посматрати скуп $\mathbb{R}^2$ на коме су операције сабирања уређених парова и множења уређених парова скаларом дефинисане са

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ и } k(a, b) = (ka, 0)$$

за произвољне $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbb{R}$ и показати да овај скуп испуњава све аксиоме векторских простора осим последње.

Задатак 81. Означимо стандардно са $\mathbb{R}^2$ скуп свих уређених парова реалних бројева. Показати да $\mathbb{R}^2$ није векторски простор над $\mathbb{R}$ ако операције сабирања уређених парова и множења уређених парова реалним скаларом дефинишемо са:

1. $(a,b)+(c,d)=(a,b)$ и $k(a,b)=(ka,kb)$ за произвољне $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ и $k\in\mathbb{R}$.

2. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ и $k(a,b)=(k^2a,k^2b)$ за произвољне $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ и $k\in\mathbb{R}$.

Задатак 82. Испитати да ли је скуп $W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f(7)=2+f(1)\}$ потпростор од $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Задатак 83. Испитати да ли је W потпростор од $\mathbb{R}^3$ ако скуп W чине вектори $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ такви да је

1. $a=2b$

2. $a^2+b^2+c^2\leq 1$

3. $a^2+b^2+c^2\geq 1$

4. $ab=0$

5. $a=b^2$

6. $k_1a+k_2b+k_3c=0$ за неке $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$.

Задатак 84. Испитати да ли је скуп свих антисиметричних матрица димензије n, односно скуп свих квадратних матрица A димензије n са особином да је $A^T=-A$ векторски потпростор од $M_n(\mathbb{R})$.

Задатак 85. Да ли је $\mathbb{R}^k$ потпростор од $\mathbb{R}^n$ за $k<n$?

Задатак 86. Показати да скуп свих решења нехомогеног система линеарних једначина са n непознатих над пољем $\mathbb{F}$ не чини векторски потпростор од $\mathbb{F}^n$.

Задатак 87. Показати да је скуп V кога чине све ограничене функције потпростор векторског простора $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Задатак 88. Испитати да ли је скуп свих ограничених реалних функција реалне променљиве које у тачки $x_0=\pi$ узимају вредност 0 векторски потпростор од $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Задатак 89. Нека је

$$W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid |f(x)|\leq 3 \text{ за све } x\in\mathbb{R}\}\,.$$

Испитати да ли је W потпростор од $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Задатак 90. Испитати да ли је скуп свих полинома чији су сви коефицијенти природни бројеви дељиви са 5 потпростор од $\mathbb{R}[X]$.

Задатак 91. Нека је V подскуп од $\mathbb{R}_5[X]$ кога чине сви полиноми $f(X)$ из $\mathbb{R}_5[X]$ са особинама

$$f(0) = 0,\ f(1) + f(4) = f(2),\ 5f(3) = 2f(1).$$

Испитати да ли је V потпростор од $\mathbb{R}_5[X]$.

Задатак 92. Нека је

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & a+b \\ b+c & c & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Испитати да ли је V потпростор од $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Задатак 93. Нека је

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & a+b & b \\ b+c & c & 0 & 0 \\ c & 1 & a+2c & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Испитати да ли је W потпростор од $M_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

6 Основне операције са матрицама

Задатак 94. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 16 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $A + B$
2. $A + 3B$
3. $-3A + 2B$
4. $(A - 2B)^T$
5. $A^T + B^T$

Задатак 95. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 2 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $A - 3B$
2. $3A + B - 2E$
3. $A^T - B$
4. $(A + E)^T$
5. $(A - B + 2E)^T$

Задатак 96. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $A - B$
2. $2A + B$
3. $A^T + B^T$
4. $(A + 3B)^T$
5. $(A^T - B^T)^T$

Задатак 97. За матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $A + B$
2. $3A + B^T$
3. $A^T + 2B - E$

4. $(A+2E)^T$
5. $(A^T+B)^T$

Задатак 98. За матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ израчунати

1. AB
2. BA
3. $2BA - 3E$
4. $(AB)^T + 2E$
5. $A^T B^T$

Задатак 99. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 13 & 2 \end{bmatrix}$ израчунати

1. AB^T
2. BA^T
3. $A^T B$
4. $AB^T + E$
5. $(A^T B)^2$

Задатак 100. За дате матрице A и B израчунати $AB - BA$

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$
5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$
6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -12 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Задатак 101. За дате матрице A и B израчунати AB^T и A^TB

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -15 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -11 & 10 & 2 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \end{bmatrix}$
4. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$
5. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Задатак 102. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ израчунати оно што је могуће

1. $B + A$
2. $A + C$
3. $C^T B$
4. AC
5. $A^T B$

Задатак 103. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ израчунати оно што је могуће

1. AB
2. BA
3. $C^T A$
4. $C^T B^T$
5. CB

Задатак 104. За матрице $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ израчунати оно што је могуће

1. $A^T + C$
2. $B + C$
3. $A^T C$
4. $(BC)^T$
5. $A^T B$

Задатак 105. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ израчунати оно што је могуће

1. $A + B$
2. $B - C$
3. BC

4. $A^T C$

5. $A^T B - C$

Задатак 106. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ израчунати оно што је могуће

1. $A + B$
2. $A^T + C$
3. AB
4. $AC + B$
5. BC^T

Задатак 107. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ израчунати оно што је могуће

1. $A + 2B^T$
2. $B - A$
3. AC
4. $BA - E$
5. $C^T A$

Задатак 108. За матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ израчунати оно што је могуће

1. $A + 2B^T$
2. $B - A$
3. AC
4. $BA - E$
5. $C^T A$

Задатак 109. За матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $AB - 4A + B^T$
2. $BA - 3E - 2A^TB$
3. $A^T - 2B + AB$
4. $3B^T - 2B + BA$

Задатак 110. За матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $4A^T - 3B - AB$
2. $A^TB - 2E + 3BA$
3. $A^2 + 2B^T + 3E$
4. $(A - B)^T + B^2$

Задатак 111. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ израцхунати

1. $(AB)^T - (BA)^T$
2. $A^TB - B^TA$
3. $(AB - BA)^T$
4. $A - AB + 3BA$

Задатак 112. За матрице $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $AB - 2A + E$
2. $BA - A^T - 4E$
3. $(A^T - B^T)^TB$
4. $(A^T - B - E)^TA$

Задатак 113. За матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $A^TB - BA^T + 2E$

2. $(A+3E)(B-3E)^T$
3. $(A+3B)^T - B^2 - 2E$
4. $AB - A^2 + 2B^T$

Задатак 114. За матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $(A^T + B^T)(E - 3A)^T$
2. $AB - BA - 2A^T$
3. $AA^T + BB^T + 3E$
4. $(2A+E)^T(B^T - E)$

Задатак 115. За матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $2B^T - AB - A$
2. $BA^T - 2E + 3BA$
3. $E - A^2 + 2B^T$
4. $AA^T - (B+E)^2$

Задатак 116. За матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ израчунати

1. $AB - 3A^T + B$
2. $2E + B^TA - (A-E)^T$
3. $BA - E + A^TB$
4. $BB^T - A^2 - 5E$

Задатак 117. Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ две регуларне матрице. Показати да су тада и матрице AB, BA регуларне, као и да важи

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

Задатак 118. Показати да за сваке две матрице A и B, такве да одговарајући производи постоје, важи

$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(BA)^T = A^T B^T$$

Задатак 119. Показати да идентитет

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

не важи за све матрице.

Задатак 120. Показати да биномна формула не важи за све матрице.

Задатак 121. Показати да идентитет

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

не важи за све матрице.

Подсећање/објашњење: Ако је $A \in M_n(\mathbb{F})$ квадратна матрица димензије n над пољем $\mathbb{F}$ и $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ полином са коефицијентима у $\mathbb{F}$ онда се $p(A)$ дефинише као матрица из $M_n(\mathbb{F})$ одређена са

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E,$$

при чему је E, као и до сада, стандардна ознака за квадратну матрицу димезије n.

Задатак 122. За дати полином $p(X)$ и матрицу A одредити $p(A)$

1. $p(X) = 2X^2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 0 \\ 12 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. $p(X) = X^2 + 2$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

3. $p(X) = X^2 - 5X - 3$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. $p(X) = X^2 - 1$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $p(X) = 3X^2 + 2,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

6. $p(X) = X^2 - X + 1,\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 0 \\ 12 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

7. $p(X) = 3X^2 - 2X + 5,\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

8. $p(X) = X^2 - 2X + 3,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. $p(X) = X^2 - 3X + 2,\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $p(X) = X^2 - 5X + 3,\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

11. $p(X) = -2X^2 + 5X - 3,\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

12. $p(X) = 2X^3 + 3X - 5,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

13. $p(X) = -2X^2 + 2X + 1,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

14. $p(X) = X^3 - 2X^2 - 9X,\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $p(X) = X^3 - 2X^2 + 5,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

16. $p(X) = X^3 - 2X^2 + 3X,\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Задатак 123. Наћи инверз дате матрице A

1. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 7 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -6 & -2 & -5 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 7 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

32. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

33. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

34. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

35. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

7 Ранг матрице

Задатак 124. Одредити ранг матрице A

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 1 & 12 & 8 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 4 & 17 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 1 & 12 & 8 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix}$

Задатак 125. Одредити ранг матрице A

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 7 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 12 & 3 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 13 & 20 & 34 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & -5 & -10 & -12 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 14 & 6 & 7 & 12 & 12 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \\ 3 & 20 & 7 & 4 & 26 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & -5 & -6 \\ -2 & -5 & -1 & -4 & -7 \\ -2 & -1 & -5 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 6 & -2 & -10 & -11 & 0 \\ 4 & 16 & 8 & -16 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 5 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & 9 & -2 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Задатак 126. Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра a

1. $A = \begin{bmatrix} a+5 & -2 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \\ 9 & 12 & a \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -2a & 1 \\ a & -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & -a \\ 2 & a-3 & 4 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & a^2+3a \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & a \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ a+1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & a+1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2a \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -a & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & a \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4a & 4 & -4 & 27 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & a \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & a & 7 \\ 2 & -1 & a & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4a & 6 \\ a & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & a+1 & 0 \\ a+7 & 4 & 3 \\ 1 & a+2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & -6 & 5 \\ 5 & -a & 6 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 18 & a-3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 7 & -3 & 1 \\ 7 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 0 & 6 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & a-3 \\ 3 & -5 & 1 & -11 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & a & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1-a & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & a \\ 1 & 3 & -3 & -5 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & a & 1 & 7 \\ 5 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 4 & a+2 & 7 \\ -3 & a & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & a-1 \\ 3 & 2 & a+6 & 1 \\ 4 & a-1 & 2 & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 2a & 6 \\ 2 & -1 & 3 & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & a+1 & 8 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2a \\ a & -5 & -10 & -12 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8 Линеарна независност и линеарни омотач

Задатак 127. Написати вектор $v = (1, -2, 5)$ као линеарну комбинацију вектора $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ и $e_3 = (2, -1, 1)$.

Задатак 128. Написати матрицу $E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ као линеарну комбинацију матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Да ли је $\mathcal{L}(A, B, C) = M_2(\mathbb{R})$?

Задатак 129. Показати да за вектор w који је линеарна комбинација вектора $v_1, v_2, \ldots, v_m$, при чему је сваки од вектора $v_i, 1 \leq i \leq n$ линеарна комбинација вектора $u_1, u_2, \ldots u_m$, важи да је такође и линеарна комбинација вектора $u_1, u_2, \ldots u_m$. Извести одатле да за произвољна два скупа вектора S и T, таква да је $S \subseteq \mathcal{L}(T)$ важи $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$.

Задатак 130. Испитати да ли постоји реални параметар k такав да полином $kt^2 + 6t + 2$ буде линеарна комбинација полинома $2t^2 + 5t - 3$ и $t^2 + t - 2$ у $\mathbb{R}_2[t]$.

Задатак 131. Показати да колоне матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ и матрице $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 12 & 17 \end{bmatrix}$ генеришу исти векторски простор. Шта се одатле може рећи за ранг матрица A и B?

Задатак 132. Посматрајмо векторе $v = (1, -3, 2)$ и $w = (2, -1, 1)$ у $\mathbb{R}^3$.

1. Записати векторе $(1, 7, -4)$ и $(2, -1, 1)$ као линеарну комбинацију вектора v и w.

2. Одредити вредност реалног параметра k тако да вектор $(1, k, 5)$ буде линеарна комбинација вектора v и w.

3. Одредити услове за реалне бројеве a, b и c тако да вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ припада $\mathcal{L}(v, w)$.

Задатак 133. Показати да вектори $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ и $(0, 1, -1)$ генеришу $\mathbb{R}^3$.

Задатак 134. Показати да комплексни бројеви $w_1 = 2 + 3i$ и $w_2 = 1 - 2i$ генеришу поље комплексних бројева $\mathbb{C}$ посматрано као векторски простор над $\mathbb{R}$.

Задатак 135. Показати да полиноми $(1 - X)^3$, $(1 - X)^2$, $1 - X$ и 1 генеришу простор $\mathbb{R}_3[X]$.

Задатак 136. Показати да је за произвољан скуп вектора S у векторском простору W, $\mathcal{L}(S)$ пресек свих потпростора V од W који садрже S.

Задатак 137. Нека су $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ матрице у $M_3(\mathbb{R})$. Одредити $\mathcal{L}(A, B, C, D)$.

Задатак 138. Испитати да ли су следећи вектори линеарно независни

1. $v = (4, 3-2)$, $w = (2, -6, 7)$
2. $v = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
3. $v = 2 - 5X + 6X^2 - X^3$, $w = 3 + 2X - 4X^2 + 5X^3$
4. $v_1 = (1, -2, 1), v_2 = (2, 1, -1), v_3 = (7, -4, 1)$
5. $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, -3, 2), v_3 = (2, -1, 5)$
6. $v_1 = (1, -3, 7), v_2 = (2, 0, -6), v_3 = (3, -1, -1), v_4 = (2, 4, -5)$
7. $v_1 = (2, -3, 7), v_2 = (0, 0, 0), v_3 = (3, -1, -4)$
8. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
9. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$
10. $v_1 = X^3 + 4X^2 - 2X + 3, v_2 = X^3 + 6X^2 - X + 4, v_3 = 3X^3 + 8X^2 - 8X + 7$
11. $v_2 = X^3 - 3X^2 + 5X + 1, v_3 = X^3 - X^2 + 8X + 2, v_3 = 2X^3 - 4X^2 + 9X + 5$
12. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

Задатак 139. Показати да су вектори $v = (1-i, i)$ и $w = (2, -1+i)$ из $\mathbb{C}^2$ линеарно зависни над пољем $\mathbb{C}$, али да су линеарно независни над пољем $\mathbb{R}$.

Задатак 140. Показати да су вектори $v = (3+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ и $w = (7, 1+2\sqrt{2})$ из $\mathbb{R}^2$ линеарно зависни над пољем $\mathbb{R}$, али да су линеарно независни над пољем $\mathbb{Q}$.

Задатак 141. Показати да су следеће функције из $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ линеарно независне

1. $f(t) = e^t, g(t) = e^{2t}, h(t) = t$
2. $f(t) = e^t, g(t) = \sin t, h(t) = t^2$
3. $f(t) = e^t, g(t) = \sin t, h(t) = \cos t$
4. $f(t) = e^{2t}, g(t) = t^2, h(t) = t$
5. $f(t) = \sin t, g(t) = \cos t, h(t) = t$

Задатак 142. Нека су u, v и w три линеарно независна вектора у векторском простору V. Доказати да су

1. вектори $u + v - 2w$, $u - v - w$ и $u + w$ линеарно независни.
2. вектори $u + v - 3w$, $u + 3v - w$ и $v + w$ линеарно зависни.

Задатак 143. Доказати да ако је скуп вектора $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ линеарно независан, а скуп вектора $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\}$ линеарно зависан, вектор w се може представити као линеарна комбинација вектора $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Задатак 144. Утврдити тачност следећег тврђења: Ако су вектори u, v и w линеарно зависни, онда се вектор w може изразити као линеарна комбинација вектора u и v.

9 Суме простора. База и димензија

Задатак 145. Одредити базу и димензију потпростора од $\mathbb{R}^4$ кога генеришу вектори $(4,1,2,-3),(1,0,2,1),(6,1,0,3),(0,0,-3,3)$ и $(3,1,1,-5)$.

Задатак 146. Показати да полиноми X^2+X, X^2-X и $X+1$ чине једну базу векторског простора $\mathbb{R}_2[X]$. Наћи координате полинома $-X^2+2X+3$ у тој бази.

Задатак 147. Допунити скуп $\left\{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ до базе векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

Задатак 148. Испитати да ли вектори $(1,3,-4)$, $(1,4,-3)$ и $(2,3,11)$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$.

Задатак 149. Показати да вектори $(2,4,-3)$, $(0,1,1)$ и $(0,1,-1)$ чине једну базу простора $\mathbb{R}^3$. Наћи координате вектора $(1,2,3)$ и $(-1,5,7)$ у односу на ту базу.

Задатак 150. Посматрајмо следећа два потпростора од $\mathbb{R}^4$:

- $W = \mathcal{L}(1,4,-1,3),(2,1,-3,-1),(0,2,1,-5))$
- $U = \mathcal{L}\left((1,-4,-2,1),(1,-3,-1,2),(3,-8,-2,7)\right)$.

Одредити базу и димензију за W и U као и базу и димензију за $W \cap U$. Да ли је $W + U = \mathbb{R}^4$? Да ли је $W \oplus U = \mathbb{R}^4$?

Задатак 151. Наћи базу и димензију простора генерисаног матрицама $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$.

Задатак 152. Нека је W простор генерисан полиномима $u = X^3+2X^2-2X+1$, $v = X^3+3X^2-X+4$ и $w = 2X^3+X^2-7X+7$. Одредити базу и димензију за W.

Задатак 153. Наћи базу и димензију простора решења хомогеног система

$$\begin{aligned} x+2y-z+3s-4t &= 0 \\ 2x+4y-2z-s+5t &= 0 \\ 2x+4y-2z+4s-2t &= 0. \end{aligned}$$

Допунити пронађену базу до базе целог простора $\mathbb{R}^5$.

Задатак 154. Нека су U и W два дводимензиона потпростора од $\mathbb{R}^3$. Показати да је тада $U \cap W \neq \{0\}$.

Задатак 155. Нека је U потпростор димензије 5, а W потпростор димензије 6 векторског простора V, чија је димензија 9. Наћи могуће димезије за $U \cap W$.

Задатак 156. Нека је U потпростор од $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима

$$(1,3,-3,-1,-4),(1,4,-1,-2,-2),(2,9,0,-5,-2),$$

а W потпростор од $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима

$$(1,6,2,-2,3),(2,8,-1,-6,-5),(1,3,-1,-5,-6).$$

Наћи димензију за $U+W$ и за $U \cap W$. Да ли је $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$?

Задатак 157. Нека је U потпростор од $\mathbb{R}[X]$ генерисан полиномима

$$X^3+4X^2-X+3, X^3+5X^2+5, 3X^3+10X^2-5X+5,$$

а V потпростор од $\mathbb{R}[X]$ генерисан полиномима

$$X^3+4X^2+6, X^3+2X^2-X+5, 2X^3+2X^2-3X+9.$$

Наћи базу и димензију за $U+W$ и $U \cap W$.

Задатак 158. Нека је $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ база векторског простора V и $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, $y = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$ два вектора у V. Ако је $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = 0$, доказати да су вектори x и y линеарно независни.

Задатак 159. Нека вектори $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ чине базу векторског простора V. Доказати да тада и вектори $\{v_1+v_2, v_2+v_3, \dots, v_{n-1}+v_n, v_n+v_1\}$ чине базу простора V.

Задатак 160. Подсетимо се да се за реалну матрицу A каже да је симетрична ако је $A^T = A$. Наћи димензију простора свих симетричних матрица димензије 3×3.

Задатак 161. Означимо са $\mathcal{S}$ потпростор свих симетричних матрица димензије 3×3, а са $\mathcal{A}$ потпростор свих антисиметричних матрица димензије 3×3. Испитати да ли је $M_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. Шта важи у општем случају, за матрице димензије $n \times n$?

Задатак 162. Одредити базу и димензију векторског потпростора од $\mathbb{R}^n$ генерисаног векторима

$$\begin{aligned} a_1 &= (p+1, p, p, \dots, p) \\ a_2 &= \left(p, p+\frac{1}{2}, p, \dots, p\right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n &= \left(p, p, \dots, p, p+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

у зависности од реалног параметра p.

10 Детерминанте

Задатак 163. Израчунати детерминанте следећих матрица

1. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & x & 1 \\ -1 & 0 & 1 & y \\ -x & -1 & 0 & 1 \\ -1 & y & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Задатак 164. Решити следећу једначину

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5-x \end{vmatrix} = 0.$$

Задатак 165. Решити следећу једначину

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2-x^2 & 3 & 6 \\ 12 & 14 & 5 & 10 \\ -1 & -14 & 6 & x^2+3 \end{vmatrix} = 0.$$

Задатак 166. Решити неједначину

$$\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 3x & x+1 & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

Задатак 167. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Задатак 168. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Задатак 169. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Задатак 170. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задатак 171. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задатак 172. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задатак 173. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} x+\alpha & x & x & x & \dots & x & x \\ x & x+\alpha & x & x & \dots & x & x \\ x & x & x+\alpha & x & \dots & x & x \\ x & x & x & x+\alpha & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x & \dots & x+\alpha & x \\ x & x & x & x & \dots & x & x+\alpha \end{vmatrix}.$$

Задатак 174. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a & a & \dots & a & a \\ b & 0 & a & a & \dots & a & a \\ b & b & 0 & a & \dots & a & a \\ b & b & b & 0 & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & 0 & a \\ b & b & b & b & \dots & b & 0 \end{vmatrix}.$$

Задатак 175. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}.$$

Задатак 176. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & x_{1n-1} & x_{1n} \\ 1 & 2 & x_{23} & x_{24} & \dots & x_{2n-1} & x_{2n} \\ 1 & 2 & 3 & x_{34} & \dots & x_{3n-1} & x_{3n} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & x_{4n-1} & x_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & x_{nn-1} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Задатак 177. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & n & \dots & n & n \\ n & n & n & 4 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}.$$

Задатак 178. Израчунати детерминанту реда n

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1 & \dots & x_1 & x_1-y_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2-y_2 & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & \dots & x_3 & x_3 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1}-y_{n-1} & \dots & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} \\ x_n-y_n & x_n & \dots & x_n & x_n & x_n \end{vmatrix}.$$

11 Адјунгована матрица. Крамерова правила

Задатак 179. Нађи адјунговану матрицу, а затим и инверз матрице A (ако постоји)

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

За *Крамерова правила*, урадити системе из Одељка 4 користећи тај метод, тамо где је могуће.

12 Линеарна пресликавања. Дефиниција и основне особине

Задатак 180. Испитати да ли је пресликавање $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ линеарно, ако је за произвољно $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. $F(x, y) = (x + y, x)$
2. $F(x, y) = (x + 1, 2y + x)$
3. $F(x, y) = (|x|, 0)$
4. $F(x, y) = (2x - 3y, y + 1)$
5. $F(x, y) = (x + 1, y + 2)$
6. $F(x, y) = (2x - 4y, -3y)$

Задатак 181. Нека је M произвољна матрица из $M_n(\mathbb{R})$. Показати да је пресликавање $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ одређено са $T(A) = AM + MA$ линеарно. Да ли је пресликавање T ендоморфизам вектоског простора $M_n(\mathbb{R})$?

Задатак 182. Означимо са V векторски простор свих полинома са реалним коефицијентима, $V = \mathbb{R}[X]$. Показати да су пресликавања $T : V \to V$ и $S : V \to V$, одређена са

$$T(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_0X + a_1X^2 + \cdots + a_nX^{n+1}$$
$$S(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_1 + a_2X + \cdots + a_nX^{n-1}$$

линеарна и одредити пресликавања $T + S, T \circ S, S \circ T$.

Задатак 183. Нека је M произвољна матрица из $M_n(\mathbb{R})$. Показати да је пресликавање $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ одређено са $T(A) = MA - AM$, као и пресликавање $S : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ одређено са $S(A) = MA$ линеарно. Такође, наћи све матрице $N \in M_n(\mathbb{R})$ такве да пресликавање $R : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ одређено са $R(A) = N + A$ буде линеарно.

Задатак 184. Наћи линеарно пресликавање $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ за које важи $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ и $T(0, 1) = (2, 1, -1)$.

Задатак 185. Наћи линеарно пресликавање $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ за које важи $T(1, 1, 1) = 3X^2 + X - 1$, $T(0, 1, -2) = X + 5$ и $T(0, 0, 1) = 3X^2 - 5$.

Задатак 186. Нека је $F : V \to U$ линеарно пресликавање између векторских простора V и U. Доказати да тада за сваки вектор $v \in V$ важи $F(-v) = -F(v)$.

Задатак 187. Нека су S и T линеарни оператори на $\mathbb{R}^2$ дефинисани са $S(x,y) = (x+y,0)$ и $T(x,y) = (-y,x)$. Одредити пресликавања $S + T, 5S - 3T, T \circ S, S \circ T, T^2$ и S^2.

Задатак 188. Показати да је оператор T векторског простора $\mathbb{R}^3$ ендоморфизам и одредити T^{-1} ако је

1. $T(x,y,z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$
2. $T(x,y,z) = (x + z, x - z, y)$

Задатак 189. Посматрајмо следећа три линеарна пресликавања:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y,z) = (y, x+z) \\ G &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad G(x,y,z) = (2z, x-y) \\ H &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad H(x,y) = (2z, x-y). \end{aligned}$$

Одредити пресликавања $F+G, 3F-2G, H\circ F, H\circ G, F\circ H, G\circ H, H\circ(F+G)$ и $H \circ F + H \circ G$.

Задатак 190. Одредити матрице свих пресликавања из претходног задатку у односу на базу $f = \{(1,1,2),(0,1,-2),(0,0,-1)\}$ од $\mathbb{R}^3$ и базу $e = \{(1,5),(-1,3)\}$ од $\mathbb{R}^2$.

Задатак 191. Одредити матрицу оператора диференцирања D у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}_3[X]$, као и у односу на базу $\left\{1 + X, X + X^2, X^2 + X^3, X^3\right\}$ истог простора.

Задатак 192. Одредити матрицу линеарног оператора T простора $\mathbb{R}^3$ одређеног са $T(x,y,z) = (2x - 3y + 4z, 5x - y + 2z, 4x + 7y)$ у односу на канонску базу од $\mathbb{R}^3$.

Задатак 193. Одредити матрицу линеарног оператора S простора $\mathbb{R}_3[X]$ одређеног са

$$S\left(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3\right) = a_1+2a_3+(3a_0-a_1)X-a_1X^2+(-a_0+2a_2+a_3)X^3$$

у односу на базу $\{1 + X + X^2 + X^3, X + X^2 + X^3, X^2 + X^3, X^3\}$ тог простора.

Задатак 194. Одредити матрицу линеарног пресликавања $L : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ одређеног са $L\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = (x + y - z, 2y + 3z, z - x)$ у односу на канонску базу од $M_2(\mathbb{R})$ и базу $\{(1,2,3),(0,1,5),(0,4,1)\}$ од $\mathbb{R}^3$.

Задатак 195. Одредити матрицу линеарног оператора T простора $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ одређеног са

$$L\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \\ s & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y - 2w & 0 \\ y + s & t - 2x + w \\ z + s & y + s \end{bmatrix}$$

у односу на канонску базу тог простора.

13 Линеарна пресликавања. Језгро и слика

Задатак 196. Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[X]$ линеарно пресликавање дефинисано са

$$L\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = (x + 2y + z + t) + (-y + z + t)X + (2x + y + 5z - t)X^2.$$

Одредити базу и димензију за $\ker L$ и $\operatorname{im} L$.

Задатак 197. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ линеарно пресликавање дефинисано са

$$L(x, y, z, s) = (x + 2y, x + 2y + 4z, 0, 0, 2x + s).$$

Одредити базу и димензију за $\ker L$ и $\operatorname{im} L$.

Задатак 198. Одредити ранг и дефект линеарног пресликавања $L : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ дефинисаног са

$$L(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} y + 2t & 0 & x - y \\ -x + y + t & 2t & x - 4t \end{bmatrix}.$$

Задатак 199. Одредити ранг и дефект линеарног пресликавања $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ одређеног са $L(x, y, s, t) = (2x + y + s, y + s + t, x + y + s + t)$.

Задатак 200. Одредити линеарно пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[X]$ чија је слика генерисана полиномима $X^3 + 2X - 1$, $2X^2 + 3$ и $X + 5$.

Задатак 201. Одредити линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}_3[X]$ чије је језгро генерисано векторима $(1, 2, 0, 3, -1)$ и $(5, 7, 2, 1, 0)$.

Задатак 202. Одредити линеарно пресликавање $L_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ чија је слика генерисана векторима $(1, 1, 2, 1)$ и $(0, -1, 4, 3)$ и линеарно пресликавање $L_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ чије је језгро генерисано векторима $(1, 1, 0, 2)$ и $(0, 0, -1, 2)$, а затим и матрицу пресликавања $L_1 + L_2$ и $L_2 \cdot L_1$ у односу на базу $(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)$ од $\mathbb{R}^4$.

Задатак 203. Испитати да ли је линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ одређено са

$$L(x, y, z, t) = (y + z - t, x + z, y + z + 2t, -x + 2z + 2t)$$

ендоморфизам простора $\mathbb{R}^4$.

Задатак 204. Испитати да ли је линеарно пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ одређено са

$$L\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2y + 3z & y - 3t \\ x + y + 4t & x + 2y + t \end{bmatrix}$$

ендоморфизам простора $\mathbb{R}^4$.

Задатак 205. Испитати да ли је линеарно пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[X]$ дефинисано са

$$L\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x+2z-t+(2x-y+t)X+(y-4z+t)X^2+(-x-y+3z+2t)X^3$$

изоморфизам векторских простора $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}_3[X]$.

Задатак 206. Испитати да ли је линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[X]$ дефинисано са

$$L(x,y,z,t) = 7y+z-t+(-2x-y+4z)X+(y+z+3t)X^2+(x-z+4t)X^3$$

изоморфизам векторских простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}_3[X]$.

Задатак 207. Нека је V коначно димензиони векторски простор и T линеарни оператор на V такав да је $\operatorname{rang} T^2 = \operatorname{rang} T$. Доказати да је $\ker T \cap \operatorname{im} T = \{0\}$.

Задатак 208. Нека је $F : U \to V$ линеарно пресликавање векторских простора U и V и k произвољан скалар. Доказати да је пресликавања F и kF имају исту слику и језгро.

Задатак 209. Нека су F и G два линеарна пресликавања векторских простора U и V. Доказати да је $\operatorname{rang}(F+G) \leq \operatorname{rang} F + \operatorname{rang} G$.

Задатак 210. Слично као за матрице, за два оператора S и T векторског простора V кажемо да су слични ако постоји ендоморфизам P простора V такав да је $S = P^{-1}TP$. Доказати да је релација сличности са скупу свих оператора векторског простора V релација еквиваленције, као и да слични оператори имају исти ранг.

14 Линеарна пресликавања. Сопствене вредности

Задатак 211. Одредити све сопствене вредности и одговарајуће сопствене векторе оператора диференцирања на $\mathbb{R}_2[X]$, посматрано над пољем $\mathbb{R}$.

Задатак 212. Пронаћи све сопствене вредности и сопствене векторе линеарног оператора простора $\mathbb{R}^2$ одређеног као транслација за ненула вектор $w \in \mathbb{R}^2$.

Задатак 213. Нека је $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ линеарно пресликавање одређено са $L(x, y) = (x - y, 4x + y)$. Показати да L нема сопствених вредности када се посматра над пољем $\mathbb{R}$. Шта се дешава над $\mathbb{C}$?

Задатак 214. Нека је W потпростор векторског простора свих реалних функција који је генерисан функцијама $\cos x$ и $\sin x$. Показати да оператор диференцирања на W нема сопствених вредности над пољем $\mathbb{R}$.

Задатак 215. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 30 & -6 & -6 & -6 \\ -18 & 42 & -6 & -6 \\ -9 & -3 & 30 & -6 \\ -3 & -1 & -2 & 18 \end{bmatrix}$. Показати да су вектори $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ сопствени вектори матрице A и наћи њима одговарајући сопствене вредности.

Задатак 216. Наћи све сопствене вредности, као и одговарајуће сопствене векторе матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Задатак 217. Наћи све сопствене вредности, као и одговарајуће сопствене векторе наредних матрица над пољем $\mathbb{C}$

1. $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & i \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -3i \\ i & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Задатак 218. Наћи све сопствене вредности као и одговарајуће сопствене векторе оператора $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ одређеног са $T(x,y,z) = (x-y, 2x+3y+2z, x+y+2z)$.

Задатак 219. Наћи све сопствене вредности, као и одговарајуће сопствене векторе матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Задатак 220. Наћи све сопствене вредности, као и одговарајуће сопствене векторе матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Задатак 221. Наћи све сопствене вредности, као и одговарајуће сопствене векторе матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Задатак 222. Испитати да ли је матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}$ могуће дијагонализовати над пољем $\mathbb{R}$. Шта се дешава над пољем $\mathbb{C}$?

Задатак 223. Дијагонализовати матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Задатак 224. Дијагонализовати матрицу $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Задатак 225. Дијагонализовати матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Задатак 226. Дијагонализовати матрицу $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Задатак 227. Одредити n-ти степен матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ за све природне бројеве n.

Задатак 228. Одредити n-ти степен матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ за све природне бројеве n.

Задатак 229. Одредити n-ти степен матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ за све природне бројеве n.

Задатак 230. Решити систем диференцних једначина

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n &= b_{n-1}, \end{aligned}$$

уз почетне услове $a_0 = 1, b_0 = 1$.

Задатак 231. Решити систем диференцних једначина

$$\begin{aligned} a_n &= -4a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n &= -6a_{n-1} + b_{n-1}, \end{aligned}$$

уз почетне услове $a_0 = \frac{3}{5}, b_0 = 1$.

Задатак 232. Решити систем диференцних једначина

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} - 5b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} + 3b_{n-1}, \end{aligned}$$

уз почетне услове $a_0 = 0, b_0 = 1$.

Задатак 233. Показати да је 0 сопствена вредност матрице A ако и само ако је та матрица сингуларна.

Задатак 234. Нека су A и B две квадратне матрице димензије истих димензија. Показати да матрице AB и BA имају исте сопствене вредности.

Задатак 235. Нека је v сопствени вектор линеарних оператора T и S. Показати да је v онда сопствени вектор оператора $aT+bS$ за произвољне скаларе a и b.

Задатак 236. Нека су T и S два линеарна оператора таква да је $TS = ST$. Нека је λ сопствена вредност за T и W одговарајући сопствени потпростор. Показати да је $S(W) \subseteq W$.

15 Основна својства скаларног производа

Задатак 237. Нека су $u = (x_1, x_2)$ и $v = (y_1, y_2)$ два вектора из $\mathbb{R}^2$. Показати да је са $\langle u, v\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ дефинисан један скаларни производ на $\mathbb{R}^2$.

Задатак 238. Нека су $u = (x_1, x_2)$ и $v = (y_1, y_2)$ два вектора из $\mathbb{R}^2$. Испитати да ли је са $\langle u, v\rangle = x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 - 4x_2y_2$ дефинисан један скаларни производ на $\mathbb{R}^2$.

Задатак 239. Нека су $u = (x_1, x_2)$ и $v = (y_1, y_2)$ два вектора из $\mathbb{C}^2$. Показати да је са $\langle u, v\rangle = x_1\overline{y_1}+(1+i)x_1\overline{y_2}+(1-i)x_2\overline{y_1}+3x_2\overline{y_2}$ дефинисан један скаларни производ на $\mathbb{C}^2$.

Задатак 240. Нека је V векторски простор $\mathbb{R}_2[X]$ свих реалних полинома степена највише 2 и u и v произвољни вектори из V. Показати да је са

$$\langle u, v\rangle = u(0)v(0) + u'(0)v'(0) + u''(0)v''(0)$$

дефинисан скаларни производ на векторском простору V.

Задатак 241. Нека је V векторски простор $\mathbb{R}_2[X]$ свих реалних полинома степена највише 2 и u и v произвољни вектори из V. Испитати да ли је са

$$\langle u, v\rangle = u(0)v(0) + u'(0)v'(0) + \frac{1}{4}u''(0)v''(0)$$

дефинисан скаларни производ на векторском простору V.

Задатак 242. Нека је V векторски простор $\mathbb{R}_2[X]$ свих реалних полинома степена највише 2 и u и v произвољни вектори из V. Испитати да ли је са

$$\langle u, v\rangle = u(0)v(0) + u'(0)v'(0) - 2u''(0)v''(0)$$

дефинисан скаларни производ на векторском простору V.

Задатак 243. Показати да се на векторском простору комплексних матрица димензије $m \times n$ скаларни производ може задати са

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^*A),$$

за све матрице A, B, при чему је за произвољну матрицу T, њена адјунгована матрица T^* дефинисана са

$$T^* = \left(\overline{T}\right)^T.$$

Задатак 244. Одредити норму следећих вектора у односу на стандардни скаларни производ на $\mathbb{R}^4$

1. $(1, 0, 5, -2)$

2. $(2, 2, -4, -1)$

3. $(-3, 2, -3, -5)$

4. $(-6, 1, -4, -3)$

Задатак 245. Одредити норму следећих вектора у односу на стандардни скаларни производ на $\mathbb{C}^4$

1. $(i, -2i, 1, 1+i)$

2. $(2, 2-i, 5, 0)$

3. $(3+2i, -i, 0, 4)$

4. $(-1, -6i, 4+i, 7-2i)$

Задатак 246. Одредити норму следећих вектора у односу на стандардни скаларни производ на $\mathbb{C}^4$

1. $(i, -2i, 1, 1+i)$

2. $(2, 2-i, 5, 0)$

3. $(3+2i, -i, 0, 4)$

4. $(-1, -6i, 4+i, 7-2i)$

Задатак 247. Одредити норму следећих матрица у простору матрица са скаларним производом дефинисаним са $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^T A)$

1. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Задатак 248. Упоредити норму вектора $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ у односу на стандардни скаларни производ на $\mathbb{R}^2$ са нормом тог вектора у односу на скаларни производ из Задатка 237.

Задатак 249. Одредити скуп S свих вектора из $\mathbb{R}^2$ који имају исту норму у односу на стандарни скаларни производ на $\mathbb{R}^2$ са нормом у односу на скаларни производ из Задатка 237. Да ли је S потпростор од $\mathbb{R}^2$?

Задатак 250. Одредити растојања и углове између следећих вектора (сви скаларни производи су стандардни)

1. $(1,-1)$ и $(2,4)$ из $\mathbb{R}^2$
2. $(0,-1,-4)$ и $(-1,3,2)$ из $\mathbb{R}^3$
3. $(i,1-i,2+i)$ и $(2-i,5i,0)$ из $\mathbb{C}^3$
4. $(-2,3+i,1-i,0)$ и $(4i,2+i,-i,1)$ $\mathbb{C}^4$

Задатак 251. Одредити угао између матрица $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ из $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, као и њихово растојање, ако је скаларни производ на $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ одређен са $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}(B^T A)$.

Задатак 252. Скаларни производ на простору свих полинома је дефинисан са $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(X)g(X)dX$. Одредити растојање и угао између следећих полинома у односу на тај скаларни производ

1. $f(X) = X^2 - X$, $g(X) = 2X^2 + 1$
2. $f(X) = X^3 - 4$, $g(X) = -6X^2 + X + 2$
3. $f(X) = X^2 + 4X - 5$, $g(X) = -2X^2 - 5X + 4$
4. $f(X) = -X^3 + 2X^2 + 1$, $g(X) = 4X^3 + 5X^2 - 7X + 9$

Задатак 253. Упоредити растојање и угао између полинома $f(X) = X^2 + 2$ и $g(X) = 5X - 3$ у односу на скаларни производ из претходног задатка и скаларни производ из Задатка 240.

Задатак 254. Показати да за свака два вектора u и v ермитског простора V важи поларизациони идентитет

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 + \frac{i}{4}\|u+iv\|^2 - \frac{i}{4}\|u-iv\|^2.$$

Задатак 255. Нека су u и v два вектора векторског простора са скаларним производом за које важи

$$|\langle u,v\rangle| = \|u\|\|v\|.$$

Показати да су вектори u и v линеарно зависни.

Задатак 256. Нека је V еуклидски векторски простор и u, v два вектора из V. Показати да је $\|u\| = \|v\|$ ако и само ако је $\langle u+v, u-v\rangle = 0$.

Задатак 257. Нека је V еуклидски векторски простор и u, v два вектора из V. Показати да је $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ ако и само ако је $\langle u, v\rangle = 0$. Дати геометријску интерпретацију овог тврђења и уопштити га на n вектора.

Задатак 258. Примером показати да тврђење из претходног задатка не важи на ермитском простору.

16 Ортогоналност, ортогонална пројекција и Грам-Шмитов поступак

Задатак 259. Одредити јединични вектор $u \in \mathbb{R}^3$ који је ортогоналан на векторе $(1, 2, 4)$ и $(-1, 0, 3)$.

Задатак 260. Посматрајмо простор свих полинома са скаларним производом дефинисаним као $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(X)g(X)dX$. Одредити полином $f(X)$ норме 2 који је ортогоналан на полиноме $X^2 + 1$ и $2X - 1$.

Задатак 261. Нека је W векторски потпростор од $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $(1, -2, 0, 3)$ и $(-2, 4, 1, -1)$. Одредити базу и димензију за $W^\perp$.

Задатак 262. Нека је W векторски потпростор од $\mathbb{C}^5$ генерисан векторима $(i, -1, 2 + 2i, 0, 1)$ и $(-2 + i, 1 - 2i, 4i, 5 + 3i, 0)$. Одредити базу и димензију за $W^\perp$.

Задатак 263. Нека је W векторски потпростор од $\mathbb{C}^4$ генерисан векторима $(1 - i, 2 + 3i, -1, 0)$ и $(-1, 0, 2i, 1 + 3i)$. Одредити базу и димензију за $W^\perp$.

Задатак 264. Нека је W векторски потпростор еуклидског простора $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ са скаларним производом $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(B^T A)$, генерисан матрицама $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Одредити базу и димензију за $W^\perp$.

Задатак 265. Одредити пројекцију вектора $(i, 1, 2)$ у правцу вектора $(-1, 0, 1 + i)$ у ермитском простору $\mathbb{C}^3$.

Задатак 266. Одредити пројекцију полинома $f(X) = -X^2 + 3X + 1$ у правцу полинома $g(X) = -2X + 5$ у случају да се посматра скаларни производ $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(X)g(X)dX$, као и у случају да се посматра скаларни производ из Задатка 240.

Задатак 267. Испитати да ли је канонска база простора $\mathbb{R}_2[X]$ ортонормирана у односу на скаларни производ из Задатка 240.

Задатак 268. Испитати да ли је канонска база простора $\mathbb{R}^2$ ортонормирана у односу на скаларни производ из Задатка 237. Уколико није, користећи Грам-Шмитов поступак превести је до ортонормиране базе простора $\mathbb{R}^2$.

Задатак 269. Користећи Грам-Шмитов поступак превести базу $(1, -1, 2)$, $(0, -2, -1)$, $(2, -1, 1)$ до ортонормиране базе простора $\mathbb{R}^3$.

Задатак 270. Користећи Грам-Шмитов поступак превести базу $(2 + i, -3, 1 - 2i)$, $(i, 0, -1 + i)$, $(2 - 2i, -i, 3 + i)$ до ортонормиране базе простора $\mathbb{C}^3$.

Задатак 271. Нека је W потпростор еуклидског простора $M_3(\mathbb{R})$ са скаларним производом $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^T A)$, генерисан матрицама $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Користећи Грам-Шмитов поступак наћи једну ортонормирану базу за W.

Задатак 272. Користећи Грам-Шмитов поступак превести базу $X^2 + 2,\ 5X - 1,\ -X^2$ простора $\mathbb{R}_2[X]$ до ортонормиране базе тог простора. Размотрити случај са скаларним производом дефинисаним са $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(X)g(X)dX$, као и случај са скаларним производом из Задатка 240.

Задатак 273. Одредити ортогоналну пројекцију вектора $(1, 0, -1, 2)$ на потпростор од $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Задатак 274. Одредити ортогоналну пројекцију полинома $X^3 + 2X$ на потпростор од $\mathbb{R}_3[X]$ генерисан полиномима $X^3 - X^2 + 1$, $-2X^2 + 1$ и $4X + 5$. Скаларни производ је одређен са $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(X)g(X)dX$.

Задатак 275. Нека су U и W потпростори коначно димензионог векторског простора V са скаларним производом. Показати да је $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Задатак 276. Нека је $\{u_1, \ldots, u_r\}$ база потпростора W векторског простора V димензије n са скаларним производом. Нека је $\{v_1, \ldots, v_{n-r}\}$ линеарно независан скуп од $n - r$ вектора из V такав да је за све i, j $\langle u_i, v_j\rangle = 0$. Показати да је $\{v_1, \ldots, v_{n-r}\}$ база за $W^\perp$.

Задатак 277. Нека су $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ ортонормиране базе простора V и W редом. Показати да је пресликавање $T : V \to W$ дефинисано за све i са $T(e_i) = e'_i$ изоморфизам.

17 Дуални простор и дуална база. Адјунговани оператор

Задатак 278. Показати да је пресликавање $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ дефинисано са $\phi(x, y, z) = 3x + 2y - z$ један линеарни функционал на $\mathbb{R}^3$.

Задатак 279. Показати да је преликавање $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ дефинисано са

$$\phi(f) = \int_2^5 f(X)dX$$

за све полиноме $f \in \mathbb{R}_2[X]$ један линеаран функционал на простору $\mathbb{R}_2[X]$. Шта се дешава ако се пресликавање ϕ дефинише са

$$\phi(f) = \int_2^5 f^2(X)dX?$$

Задатак 280. Показати да је траг линеаран функционал на простору квадратних матрица.

Задатак 281. Наћи дуалну базу базе $(1, -1, 2), (4, 0, 2), (0, 0, -3)$ простора $\mathbb{R}^3$.

Задатак 282. Наћи дуалну базу базе $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ простора $M_2(\mathbb{R})$.

Задатак 283. Наћи дуалну базу базе $(1, i, 0), (-1, 0, 1+i), (0, -2i, -1-i)$ простора $\mathbb{C}^3$.

Задатак 284. На простор $\mathbb{R}^3$ дата су три линеарна функционала ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 одређена са

$$\phi_1(x, y, z) = 3x - y - z,\ \phi_2(x, y, z) = y + 4z,\ \phi_3(x, y, z) = -x + 2z.$$

Наћи базу простора $\mathbb{R}^3$ такву да јој је $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ дуална база.

Задатак 285. На простору $\mathbb{R}_2[X]$ дата су три линеарна функционала ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 одређена са

$$\phi_1(f) = \int_0^1 f(X)dX,\ \phi_2(f) = f'(1),\ \phi_3(f) = f(0)$$

за произвољни полином $f \in \mathbb{R}_2[X]$. Одредити базу простора $\mathbb{R}_2[X]$ такву да јој је $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ дуална база.

Задатак 286. На простору $\mathbb{R}^3$ дат је линеарни функционал ϕ одређен са $\phi(x, y, z) = 2x+4y-3z$. Одредити вектор $u \in \mathbb{R}^3$ такав да је $\phi(v) = \langle v, u \rangle$ за све $v \in \mathbb{R}^3$.

Задатак 287. Посматрајмо простор $M_2(\mathbb{R})$ са скаларним производом одређеним са $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^T A)$ и на њему линеарни функционал ϕ одређен са

$$\phi(A) = \mathrm{Tr}(A).$$

Наћи матрицу $A \in M_2(\mathbb{R})$ такву да је $\phi(X) = \langle X, A\rangle$ за све $X \in M_2(\mathbb{R})$.

Задатак 288. На простору $\mathbb{C}^3$ дат је линеарни оператор T одређен са

$$T(x, y, z) = (2x - iy + z, iy - z, x + 2iz).$$

Одредити адјунговани оператор T^* оператора T.

Задатак 289. На простору $\mathbb{C}^4$ дат је линеарни оператор T одређен са

$$T(x, y, z, w) = (ix + 2y - w, x + 4z, y - z + (1 - i)w, 4x - 2iy + 3iw).$$

Одредити адјунговани оператор T^* оператора T.

Задатак 290. Нека је V векторски простор коначне димензије и $v \in V$ произвољан ненула вектор. Показати да постоји линеаран функционал ϕ на V такав да је $\phi(v) \neq 0$.

Задатак 291. Нека је V реални векторски простор и нека су ϕ_1 и ϕ_2 два линеарна функционала на V. Претпоставимо да је пресликавање $\phi : V \to \mathbb{R}$ дефинисано са

$$\phi(v) = \phi_1(v)\phi_2(v),\ v \in V$$

такође један функционал на V. Показати да је $\phi_1 = 0$ или $\phi_2 = 0$.

Задатак 292. Нека је V коначно димензиони векторски простор и T линеарни оператор на V. Показати да је $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^\perp$.

Задатак 293. Показати да ако за линеарни оператор T важи $T^*T = 0$, онда мора да буде $T = 0$.

18 Нормални, ермитски/симетрични и унитарни/ортогонални оператори и матрице

Задатак 294. Испитати да ли су матрице $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 3-5i \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 3+7i & 0 \\ 2i & 4-i \end{bmatrix}$ нормалне.

Задатак 295. Одредити услове које треба да испуњавају комплексни бројеви a и b тако да матрица $\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$ буде нормална.

Задатак 296. Одредити унитарну матрицу чија је једна врста вектор $(\frac{1}{2}, \frac{1+i}{2}, -\frac{1}{2})$.

Задатак 297. Одредити ортогоналну матрицу чија је једна врста вектор пропорционалан вектору $(1, -2, 1)$.

Задатак 298. Наћи све комплексне матрице $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ које су истовремено унитарне и ермитске, и за које је испуњено $a = \frac{1}{2}$.

Задатак 299. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Показати да је A нормална матрица и наћи ортогоналну матрицу P такву да је матрица $P^T AP$ блок-дијагонална.

Задатак 300. Дата је ермитска матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{bmatrix}$. Наћи унитатну матрицу U такву да је матрица U^*AU дијагонална.

Задатак 301. Дата је ермитска матрица $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{bmatrix}$. Наћи унитатну матрицу U такву да је матрица U^*AU дијагонална.

Задатак 302. Дата је ермитска матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 2 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Наћи унитатну матрицу U такву да је матрица U^*AU дијагонална.

Задатак 303. Дата је симетрична матрица $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Наћи ортогоналну матрицу P такву да је матрица P^*AP дијагонална.

Задатак 304. Дата је симетрична матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Наћи ортогоналну матрицу P такву да је матрица P^*AP дијагонална.

Задатак 305. Дата је симетрична матрица $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$. Наћи ортогоналну матрицу P такву да је матрица P^*AP дијагонална.

Задатак 306. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Показати да је A ортогонална матрица и записати је у блок-дијагоналном облику.

Задатак 307. Одредити формуле изометрије $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ која представља ротацију око тачке $(-2, 5)$ за угао од $\frac{2\pi}{3}$.

Задатак 308. Одредити формуле изометрије $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ која представља ротацију око тачке $(1, -2)$ за угао од $\frac{\pi}{4}$ компоновану са транслацијом за вектор $(-3, 1)$.

Задатак 309. Показати да се сваки оператор T на ермитском векторском простору може записати као $T = A + iB$, где су A и B ермитски оператори.

Задатак 310. Нека су A и B две квадратне матрице димензије n. Претпоставимо да је матрица B симетрична и да важи $B = A^{-1}A^T$. Показати да је A^2 симетрична матрица.

Задатак 311. Нека је C реална симетрична матрица димензије n таква да је $C^2 = C$. Означимо са $D = E - 2C$, где је D јединична матрица димензије n. Показати да је D симетрична и ортогонална.

Задатак 312. Нека су A и B две ортогоналне матрице димензије n. Показати да је $\left|[AB^T]_{ij}\right| \leq 1$ за све $1 \leq i, j \leq n$.

19 Карактеристични и минимални полином. Теорема Кејли-Хамилтона

Задатак 313. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -1 & -7 & -3 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix}$.

Задатак 314. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Задатак 315. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Задатак 316. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Задатак 317. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Задатак 318. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Задатак 319. Карактеристични полином матрице A је $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3$. Изразити A^{-1} као полином матрице A.

Задатак 320. Нека је T линеарни оператор на векторском простору V коначне димензије n. Показати да је димензија простора који је генерисан скупом $\{T^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ највише n.

Задатак 321. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Одредити $p(A)$, где је $p(\lambda) = \lambda^{14} + 2\lambda^6 - 11\lambda^5 + 3\lambda + 2$.

Задатак 322. Одредити n-ти степен матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Задатак 323. Одредити n-ти степен матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Задатак 324. Одредити n-ти степен матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Задатак 325. Нека је T линеарни оператор на коначно димензионом векторском простору. Показати да је T регуларан ако и само ако је слободан члан његовог минималног полинома различит од 0.

Задатак 326. Нека је T линеарни оператор коначно димензионом векторском простору и $f(X)$ несводљив полином за кога је $f(T) = 0$. Показати да је $f(X)$ минимални полином за T.

Задатак 327. Нека је A матрица димензије n таква да је $A^k = 0$ за неко $k > n$. Показати да је $A^n = 0$.

Задатак 328. Показати да матрице A и A^T имају исти минимални полином.

20 Жорданова канонска форма

Задатак 329. Карактеристични и минимални полином матрице A су редом $-(\lambda-1)^4(\lambda-2)^3$ и $(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$. Одредити све могућности за Жорданову канонску форму матрице A.

Задатак 330. Карактеристични и минимални полином матрице A су редом $-(\lambda-3)^5(\lambda-5)^4$ и $(\lambda-3)^3(\lambda-5)^2$. Одредити све могућности за Жорданову канонску форму матрице A.

Задатак 331. Карактеристични и минимални полином матрице A су редом $(\lambda+1)^4(\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$ и $(\lambda+1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-3)$. Одредити све могућности за Жорданову канонску форму матрице A.

Задатак 332. Карактеристични и минимални полином матрице A су редом $(\lambda+2)^6(\lambda-1)^4(\lambda-4)^4$ и $(\lambda+1)^3(\lambda-1)^2(\lambda-4)^3$. Одредити све могућности за Жорданову канонску форму матрице A.

Задатак 333. Одредити све могућности за Жорданову канонску форму квадратне матрице A димензије 8 чији је минимални полином $(\lambda-3)^4$.

Задатак 334. Одредити све могућности за Жорданову канонску форму матрице A димензије чији је карактеристични полином $(\lambda-2)^5(\lambda-3)^3$.

Задатак 335. Одредити Жорданову канонску форму матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задатак 336. Одредити Жорданову канонску форму матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Задатак 337. Одредити Жорданову канонску форму матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & -4 & -4 \\ 22 & 15 & -8 & -9 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Задатак 338. Одредити Жорданову канонску форму матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Задатак 339. Одредити Жорданову канонску форму матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задатак 340. Одредити Жорданову канонску форму матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Задатак 341. Одредити Жорданову канонску форму матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Задатак 342. Одредити Жорданову канонску форму матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

21 Квадратне форме

Задатак 343. Одредити дијагонални облик квадратне форме $q(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2$.

Задатак 344. Одредити дијагонални облик квадрате форме $q(x, y) = 6xy$, као и ортогоналну трансформацију простора $\mathbb{R}^2$ која преводи q у дијагонални облик.

Задатак 345. Одредити дијагонални облик квадрате форме $q(x, y) = xy + y^2$, као и ортогоналну трансформацију простора $\mathbb{R}^2$ која преводи q у дијагонални облик.

Задатак 346. Одредити дијагонални облик квадрате форме $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz + y^2 + 4z^2$, као и ортогоналну трансформацију простора $\mathbb{R}^3$ која преводи q у дијагонални облик.

Задатак 347. Одредити дијагонални облик квадрате форме $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4yz + 6xz$, њену сигнатуру, као и ортогоналну трансформацију простора $\mathbb{R}^3$ која преводи q у дијагонални облик.

Задатак 348. Одредити дијагонални облик квадрате форме $q(x, y, z) = 4x^2 + 4xz + 2xy$, њену сигнатуру, као и ортогоналну трансформацију простора $\mathbb{R}^3$ која преводи q у дијагонални облик.

Задатак 349. Одредити дијагонални облик квадрате форме $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4yz + z^2$, њену сигнатуру, као и ортогоналну трансформацију простора $\mathbb{R}^3$ која преводи q у дијагонални облик.

Задатак 350. Нека је q квадратна форма на векторском простору V. Показати да за свака три вектора u, v и w из V важи

$$q(u + v) + q(v + w) + q(u + w) - q(u + v + w) = q(u) + q(v) + q(w).$$

Задатак 351. Показати да свака квадратна форма q на векторском простору V над пољем $\mathbb{F}$ има следећа својства:

1. $q(av) = a^2 q(v)$, за све $a \in \mathbb{F}, v \in V$.
2. Пресликавање $(u, v) \to q(u, v) - q(u) - q(v)$ је билинеарно за све $u, v \in V$.