О ПРЕЦРТИМА СПРЕГНУТИХ ТАЧАКА ЈЕДНОГ ТРАНСФИНИТНОГ СКУПА КОНГРУЕНТНИХ ПРОЈЕКТИВНИХ НИЗОВА ТАЧАКА

од

БОГДАНА ГАВРИЛОВИЋА

(Приказано на II скупу Академије природних наука, од 12 апр. 1945 год.)

Нека су нам дате две тачке $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ својим тангенцијалним једначинама $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$. Те две тачке узећемо за основне тачке једног низа тачака — низа (A_1, A_2). Тада ће ма која тачка тога низа бити одређена једном једначином овог облика

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 ,$$

и кад параметар λ при непрекидном мењању свом буде прошао кроз све реалне вредности између бројева $-\infty$ и $+\infty$ онда ће и једначина $A_1 + \lambda A_2 = 0$ претстављати све тачке низа (A_1, A_2). Трансфинитним скупом тачака моћи континуума c биће очевидно оцртана слика праве A_1, A_2. Тај низ (A_1, A_2) зваћемо низом (A), а параметар λ, који својом вредношћу одређује на том низу положај неке тачке тога низа, „тачком λ."

Ако су сад, поред тачака A_1 и A_2, дате и друге две тачке — тачке B_1 и B_2 — и ако су $B_1 = 0$ и $B_2 = 0$ тангенцијалне једначине тих тачака, онда ће, *прво*, и тачке B_1 и B_2 као основне тачке формирати један низ тачака — низ $(B_1 B_2)$ или низ (B) — и, *друго*, онда ће ма која тачка тога низа бити дата једном оваквом једначином

$$B_1 + \mu B_2 = 0$$

Претпоставићемо да су низови (A) и (B) пројективни, тј. претпоставићемо да свакој тачки низа (A) одговара једна једина тачка низа (B) и обратно. Међутим познато је да је пројективна повезаност свих тачака два низа утврђена тек онда, кад се унапред зна, које су три тачке једнога низа пројективно везане ма за које три тачке другога низа. Тек тада ће сваком неком четвртом елементу λ једнога одговарати један једини елеменат μ другога низа. И ако су сад три тачке првога низа у том низу одређене специјалним вредностима $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а оне три које њима пројективно у другом низу одговарају вредностима μ_1, μ_2, μ_3, онда ће морати бити

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ \lambda_1\mu_1 & \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2\mu_2 & \lambda_2 & \mu_2 & 1 \\ \lambda_3\mu_3 & \lambda_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

По тој — по количинама λ и μ билинеарној — једначини види се која ће тачка λ првога низа пројективно одговарати некој одређеној тачки μ другога низа и обратно.

Претпоставићемо сад:

Прво, да су наши низови (A) и (B) суперпоновани на једној правој — заједничкој носиљи њиховој;

Друго, да у тим суперпонованим низовима тачке A_1 и B_2 леже једна на другој и да, поред тога, основној тачки A_1, тј. тачки $\lambda_1 = 0$ првога низа, пројективно одговара основна тачка B_1, тј. тачка $\mu_1 = 0$, другога низа;

Треће, да основној тачки B_2 другога низа, тј. тачки $\mu_2 = \infty$ тога низа, пројективно у првом низу одговара она тачка тога низа, која се на заједничкој носиљи поклапа с тачком B_2 и која је у њему одређена специјалном вредношћу λ_2 параметра λ; и на послетку претпоставићемо:

Четврто, да тачке λ_3 и μ_3, које у низовима (A) и (B) леже у бесконачности, тј. да тачке $\lambda_3 = -1$ и $\mu_3 = -1$, једна другој пројективно одговарају.

Такве низове, пошто имају исте изворе и исте уворе тачака зваћу сличним пројективним, трансфинитним низовима тачака.

Како се једначина (1) може и овако изразити

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ \lambda_1\mu_1 & \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2 & \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} & 1 & \dfrac{1}{\mu_2} \\ \lambda_3\mu_3 & \lambda_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

онда можемо тврдити ово: кад су низови (A) и (B) пројективни слични низови, онда ће се једначина (1) преобразити у ову једначину:

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

тј. у једначину

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu \\ \lambda_2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Ако сад ову последњу детерминанту развијемо, онда ћемо добити ову специјалну билинеарну једначину

$$\lambda\mu + (1+\lambda_2)\lambda - \lambda_2\mu = 0, \tag{2}$$

а одатле је:

$$\text{1-во} \cdots\cdots \lambda = \frac{\lambda_3 \mu}{1+\lambda_2+\mu}; \tag{3}$$

$$\text{2-го} \cdots\cdots \mu = \frac{(1+\lambda_2)\lambda}{\lambda_2-\lambda} \tag{4}$$

$$\text{3-ће} \cdots\cdots \lambda_2 = \frac{(1+\mu)\lambda}{\mu-\lambda} \tag{5}$$

Према томе можемо рећи ово: ако у сличним пројективним низовима тачака елементу λ првога низа одговара елеменат μ другога низа и обратно, ако у тим низовима елементу μ другога низа одговара пројективно елеменат λ првога низа, онда ће унутрашња веза између бројева λ и μ и параметра λ_2 бити изражена једначинама (2), (3), (4) и (5).

Пошто тачка λ_2 може заузети положај ма које тачке низа (A) и пошто се та тачка, која је на низу (A) одређена бројем λ_2, увек на заједничкој носиљи низова (A) и (B) поклапа са основном тачком B другога низа, то у ствари нећемо имати два низа тачака, већ читав један трансфинитан систем низова.

У том систему неће се мењати низ (A), док ће низ (B), због сталног померања основне тачке B_2, тј. због сталне разлике у величини унутрашњег ограниченог дела свог, стално мењати своју структуру. Параметар λ_2 ће дакле стално и трансформирати старе и производити нове низове (B) и зато бисмо га могли звати и *трансформатором* или *генератором* елемената трансфинитног скупа низова (B).

Но поред ове напомене треба пре непосредног даљег испитивања у које ћемо одмах заћи, учинити још и друге две.

Прво. Једначина (2) постала је из претпоставке, да су тачке λ_1, λ_2 и λ_3 три различите тачке низа (A). Једна од тих тачака била је дата бројем $\lambda_1 = 0$, а друга бројем $\lambda_3 = -1$. Према томе, да би било одржано пројективно сродство између тачака низа (A) и тачака појединих низова (B) *не може трансформатор* λ_2 *по својој вредности бити ни раван нули ни раван броју* -1, и то треба нарочито имати у виду, кад се овде-онде буду истицале неке специјалне вредности његове или чак и сам трансфинитан скуп њихов.

Друго. Тачке A_1 и B_2, затим тачке λ_2 и B_2, и напослетку оне две тачке, које и на једном и на другом низу леже у — бесконачности нису само пројективно спрегнуте, већ оне и једна на другу належу у истој тачки заједничке носиље низова. Доказаћемо да ће у нашим низовима ту исту особину имати и све остале тачке, које једна другој пројективно одговарају, тј. доказаћемо ово: *ако некој тачки а првога низа* (A) *одговара пројективно у једном од низова* (B) *нека тачка b, онда ће та тачка b налегати на исту ону тачку заједничке носиље, на коју належе и тачка а.* Наши низови неће дакле бити само пројективни већ и *конгруентни*.

Ево и доказа. Координате тачке a првога низа су ово

$$x = \frac{x_1 + a x_2}{1 + a}; \qquad y = \frac{y_1 + a y_2}{1 + a}.$$

Међутим, ако је $\lambda_2 = x$, онда ће координате те тачке λ_2 бити

$$\xi = \frac{x_1 + x x_2}{1 + x}; \qquad \eta = \frac{y_1 + x y_2}{1 + x}$$

и како тачка λ_2 на заједничкој носиљи належе на основну тачку $B\alpha$ једног од низова (B) — оног, који је произведен вредношћу $\lambda_2 = x$ генератора — то ће ξ и η бити и координате тачке $B\alpha$. И ако сад тачки a у том низу пројективно одговара нека тачка b, чије су координате ξ' и η', онда ће — пошто се по нашој претпоставци тачка A_1 (x_1, y_1) поклапа с тачком B_1 — морати бити

$$\xi' = \frac{x_1 + b\xi}{1+b}, \qquad \eta' = \frac{y_1 + b\eta}{1+b},$$

тј. биће
$$\xi = \frac{(1+\alpha)x_1 + b(x_1 + \alpha x_2)}{(1+x)(1+b)}. \tag{6}$$

Али како је по једначини (3)
$$x = \frac{\alpha^b}{1+\alpha+b},$$

то ћемо једначину (6) моћи изразити и у облику
$$\xi' = \frac{x_1 + a x_2}{1+a},$$

а тај наш број претставља апцису тачке a. Исто тако би се доказало и да је ордината η' тачке b једнака с ординатом y тачке a, а тим би очевидно било доказано да су низови (A) и (B) не само пројективни, већ и конгруентни.

Нека је сад $\lambda_2 = \alpha =$ неком одређеном броју, који није ни раван нули ни раван броју -1; тој вредности генератора одговараће међу низовима B један специјалан низ, који ћемо, као и мало час, обележити са (B_α). Ако сад на низу (A) узмемо једну тачку, која је по свом положају у том низу одређена бројем a, онда ће тој тачки у низу (B_α) пројективно одговарати нека тачка, која је у њему, рецимо, одређена неким бројем b и тада ће према једначини (4) бити
$$\eta = \frac{(1+\alpha)a}{\alpha - a} = b.$$

Пођимо даље и узмимо да је $\lambda_2 = \beta \neq \alpha$ и да при томе и β по својој вредности није ни $= 0$, ни $= -1$. Тада ће том вредношћу генератора бити формиран некакав други низ, рецимо низ (B_β). У том низу ће тачки a низа (A) одговарати нека тачка b' и биће тада
$$\mu = \frac{(1-\beta)a}{\beta - \alpha} = b'.$$

Та два броја b *и* b', *пошто је* $\beta \neq \alpha$, *уопште немају исту вредност*, а имаће исту вредност само у ова два специјална случаја: или кад је $a = 0$, или кад је $a = -1$. Јер кад је $a = 0$, онда је према једначини (4) број $\mu = 0$ за *све* вредности генератора λ_2, па и за две његове специјалне вредности α и β. А кад је $a = -1$, онда ће према једначини (3) бити $\mu = -1$ за све вредности генератора, па и за две његове специјалне вредности α и β; тј. кад је $a = -1$, онда је и $b = b' = -1$. То се уосталом види и непосредно из саме дефиниције природно пројективних низова (A) и (B).

На тим специјалним случајевима, који се јављају онда кад је било $a=0$, било $a=-1$, задржаћемо се мало доцније, а сад ћемо претпоставити, да је $\lambda_2=\gamma\neq\beta\neq\alpha$ и да при томе, као и раније, генератор λ_2 није ни $=0$, ни $=-1$. Тада бисмо у скупу низова (B) добили један нов низ (B) и том би низу нека тачка b'' тога низа била пројективно везана с тачком a низа (A). Али би сад било $b''\neq b'\neq b$. Додељујући генератору λ, све друге и друге вредности, добијали бисмо и све друге и друге низове (B). У сваком од тих низова би само једна једина тачка њихова пројективно одговарала тачки a низа (A) и та би тачка била одређена једним бројем који се по вредности својој разликује од раније добијених бројева b, b', b'', ... Тим путем добили бисмо један трансфинитан систем $(b, b', b'', \dots)$ једног различја другог реда. Елементи тог система биће (ab), (ab'), (ab'').... и ако се сад узме да је a апсциса, а бројеви b, b', b'', ... да су ординате неке тачке, онда ће парови (ab), (ab'), (ab'').... пројективно спрегнутих тачака датих низова лежати сви на правој $x=a$; они ће другим речима запосести ту праву. Да ли ће је при томе запосести у свима тачкама њезиним, о томе ће бити говора у даљем току нашег излагања.

То исто вреди за тачку a низа (A); вредеће очевидно и за сваку другу тачку тога низа: свакој од тих тачака a', a'', ... одговараће једно различје другога реда и сви елементи тога различја ће прецртима својих парова пројективно спрегнутих тачака запосести тачке на правама $x=a'$, $x=a''$, ... у другом, још незапоседнутом сектору равни. И то ће тако бити све док a не буде или $=0$, или $=-1$.

Али, ако је $\lambda=a=0$, онда ће за све вредности генератора и μ, тј. један од бројева b бити раван 0 и због тога ћемо тада на правој $x=0$, тј. на осовини y, имати само једну, пројективно спрегнутим тачкама запоседнуту тачку: тачку $(0,0)$, а *све* остале тачке њезине остаће незапоседнуте.

С друге стране, ако је $a=-1$, онда се mutatis mutandis, лако може доказати, да ће на правој $x=-1$ само тачка $(-1;-1)$ бити запоседнута пројективно спрегнутим паровима, а све остале тачке њезине да ће бити незапоседнуте.

Да бисмо довршили слику о тим критичким секторима, испитаћемо још и ова два случаја.

Прво. Нека је $\mu = b = 0$. — Тада ће за све вредности генератора бити и $\lambda = a = 0$, и како је $\mu = y$ то ћемо тада на правој $y = 0$, тј. на основици x, имати само једну пројективно спрегнутим тачкама запоседнуту тачку – тачку (0,0) — а све остале тачке њезине остаће незапоседнуте.

Друго. Нека је $\mu = b = -1$. — У овом случају ће за све вредности генератора бити $\lambda = a = -1$, а тим се потврђује да ћемо на правој $y = -1$ имати само једну, пројективно спрегнутим тачкама запоседнуту тачку: тачку $(-1, -1)$, док ће све остале тачке те праве остати незапоседнуте.

Добили смо дакле ову теорему:

Теорема I. *Кад се из координатне равни искључе 1-во, све тачке које леже на координатним осовинама осим тачке (0,0) и 2-го, све тачке које леже на правима $x = -1$ и $y = -1$ осим тачке $(-1, -1)$, онда ће скуп свих могућих парова пројективно спрегнутих тачака трансфинитног скупа конгруентних, пројективних, низова запосести све остале тачке бесконачне равни.*

Пођимо сад даље и претпоставимо да у једначини (2) параметар λ_2 може имати и ове две досад искључене вредности $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_2 = -1$.

У досадашњем испитивању нашем истакнуте су четири критичке вредности $a = 0$ и $a = -1$ с једне, и $b = 0$ и $b = -1$ с друге стране, због којих спрегнути парови пројективних тачака, које добијамо из једначине (2), не могу да запоседну све тачке у неким секторима целокупне равни. Одмах ћемо видети, какав ће ефекат имати те четири критичке вредности кад се претпостави да је параметар λ_2 по вредности својој било раван нули, било раван броју -1.

Да бисмо тај ефекат одредили, *ми ћемо најпре узети, да је $\lambda_2 = 0$.* Ослањајући се на једначину (2) доћи ћемо до ових закључака:

1-во; кад је $a = 0$, а $\lambda_2 = 0$, онда ће μ моћи имати *ма коју* вредност неког реалног броја, а не као раније само вредност $\mu = 0$ и због тога ће спрегнути парови $(0, b)$ својим прецртима запосести и све остале тачке осовине y, а не само једну тачку њезину: тачку (0,0);

2-го; кад је $a = -1$, а $\lambda_2 = 0$, онда ће тој вредности одговарати ова вредност броја $\mu = b$: $\mu = b = -1$, тј. тада ће тај спрегнути пар $(a\, b)$ својим прецртом поклапати тачку $(-1, -1)$

3-ће; кад је $b = 0$, а $\lambda_2 = -0$, онда се непосредно по једначини (2) види да ће тој вредности одговарати само једна вредност за број a: вредност $a = 0$, тј. тада бисмо у прецрту тога пара $(a\, b)$ добили у равни само једну тачку — тачку $(0,0)$; и напослетку

4-то; кад је $b = -1$, а $\lambda_2 = 0$, онда неће том броју $b = -1$ одговарати само број $\lambda = a = -1$, већ и нека друга — ма која друга — вредност броја λ, а то ће рећи, да ће у овом случају спрегнути парови $(a\, b)$ својим прецртима запосести све тачке праве $y = -1$, а не само њезину тачку $(-1, -1)$.

А ако претпоставимо да је $\lambda_2 = -1$, онда ћемо држећи се и опет једначине (2) моћи доказати ово:

1-во; кад је $a = 0$, а $\lambda_2 = -1$, онда ће том броју одговарати само број $\mu = b = 0$, тј. тада ће спрегнути пар $(a\, b)$ својим прецртом покрити само тачку $(0,0)$ бесконачне равни;

2-го; кад је $a = -1$, а $\lambda_2 = -1$, онда ће број $\mu = b$ моћи имати сваку вредност, а не само вредност $\mu = -1$ и због тога спрегнути пар $(a\, b)$ неће својим прецртом покрити само тачку$(-1, -1)$, већ ће као елемент једног трансфинитног скупа парова запосести све тачке праве $x = -1$;

3-ће; кад је $b = 0$, а $\lambda_2 = -1$, онда неће број $\lambda = a$ имати само једну вредност — вредност $\lambda = a = 0$ већ и другу неку — ма какву — вредност, тј. прецртом спрегнутих парова $(a\, b)$ биће у овом случају запоседнуте све тачке осовине x, а не само тачке њезине $(0,0)$; и напослетку

4-то; кад је $b = -1$, а $\lambda_2 = -1$, онда ће тој вредности одговарати само вредност $\lambda = a = -1$, тј. прецрт тог спрегнутог пара $(a\, b)$ запосешће у бесконачној равни само тачку $(-1, -1)$.

Добили смо према томе ову теорему:

Теорема II. *Кад у билинеарној једначини*

$$xy + (1 + \lambda_2)\, x - \lambda_2\, y = 0$$

параметар λ_2 *при свом беспрекидном мењању буде прошао кроз све реалне вредности бројева, који леже између* $-\infty$ и $+\infty$, *онда ће спрегнути парови* $(x\, y)$, *које будемо добили из те једначине као елементе једног одређеног трансфинитног скупа, својим прецртима запосести све тачке целокупне равни.*

Те прецрте моћи ћемо, као што ћемо видети, изразити и једном сложенијом сликом. Једначина (4) претставља нам једну хиперболу или тачније, пошто параметар λ_2, има бесконачно много вредности, један систем од бесконачно много хипербола, које све пролазе кроз тачку (0,0) и тачку $(-1, -1)$. Асимптоте тих хипербола су дате овим једначинама: једна једначином $x = \lambda_2$, а друга једначином $y = -(1+\lambda_2)$. Центри тих хипербола леже на правој $x+y+1=0$.

Те хиперболе биће у дегенерацији, кад је

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1+\lambda_2 \\ 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 1+\lambda_2 & -\lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

тј. кад је $\lambda_2(1+\lambda_2)=0$, дакле кад је било $\lambda_2=0$ било $\lambda_2=-1$.

Али кад је $\lambda_2=0$, онда је према једначини (6)

$$x(y+1)=0,$$

тј. онда је $x=0$, а $y=-1$, и то су оне две праве у које је дегенерирала хипербола (6), кад је $\lambda_2=0$. А кад је $\lambda_2=-1$, онда је према једначини (6)

$$y(x+1)=0,$$

тј. онда је $y=0$, а $x=-1$ и те две праве су онда оне две праве у које је дегенерирала хипербола (6). Та два пара правих, то су у ствари оне праве, које су у бесконачној равни биле запоседнуте прецртима оних парова $(\lambda\,\mu)$, које смо добили из једначине (2), кад смо били претпоставили да је било $\lambda_2=0$, било $\lambda_2=-1$ и да поред осталих свих могућих вредности броја $\lambda=a$ може бити и $=0$ и равно броју -1. А све оне друге хиперболе постале су очевидно из прецрта свих могућих парова пројективно спрегнутих тачака трансфинитног скупа сличних, конгруентних, пројективних низова.

Кад је $\lambda_2=\infty$, тј. кад основна тачка B_2 низа (B) поклапа на заједничкој носиљи основну тачку A_2 низа (A), онда ће тачке λ и μ, које у низовима (A) и (B) једна другој пројективно одговарају не само належати на исту тачку заједничке носиље, већ ће бити и $\lambda=\mu$, тј. биће што је једно и исто и $x=y$ или $x-y=0$ и зато ће специјалној вредности $\lambda_2=\infty$ параметра одговарати у равни права $x-y=0$. Та права пресецаће све хиперболе у тачкама (0,0) и $(-1,-1)$ и због тога осим те две тачке ни једна друга тачка њезина неће ући у структуру поменутих хипербола

О природи тачака — саставних елемената тих хипербола и о начину формирања њихова можемо рећи ово. Свака од тих хипербола изграђује се на овај начин, што свака од њих из трансфинитног скупа $x = a, a', a'', \cdots$ излучује и у себе прима по *једну јединy* тачку тих правих — ону тачку наиме, која *у свакој* од тих правих одговара некој одређеној, специјалној вредности генератора λ_2.