# О ЈЕДНОЈ СИМЕТРИЧНОЈ ФУНКЦИЈИ НУЛА ПОЛИНОМА ТРЕЋЕГА СТЕПЕНА.

НАПИСАО

БОГДАН ГАВРИЛОВИЋ.

Нека је дата функција

$$f(z) = \frac{tg^3 z}{tg(z - a_1)\, tg(z - a_2)\, tg(z - a_3)}$$

и поред ње ова еквација трећега степена:

$$x_3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Корене те еквације означићемо са $a, b, c$. Како су тачке $a_1, a_2, a_3$ прости полови функције $f(z)$, то ће збир остатака те функције у тим половима њеним бити очевидно ово:

$$\Sigma A = \frac{tg^3 a_1}{tg(a_1 - a_2)\, tg(a_1 - a_3)} + \frac{tg^3 a_2}{tg(a_2 - a_1)\, tg(a_2 - a_3)}$$
$$+ \frac{tg^3 a_3}{tg(a_3 - a_1)\, tg(a_3 - a_2)}.$$

Уочимо сада ову рационалну симетричну функцију корена̂ $a, b, c$:

$$F(a, b, c) = \frac{a^3 (1 + ab)(1 + ac)}{(a - b)(a - c)} +$$
$$+ \frac{b^3 (1 + bc)(1 + ba)}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^3 (1 + ca)(1 + cb)}{(c - a)(c - b)}. \quad (1)$$

па нека је симболом $\Sigma\ a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma$ обележен збир свих оних чланова, који се добивају цикличком разменом писмена $a$, $b$, $c$. Према томе ће, на пример, бити:

$$\Sigma a = a + b + c,$$

$$\Sigma ab = ab + bc + ca,$$

$$\Sigma a^2 b^2 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2,$$

$$\Sigma \frac{a^3 (b-c)}{1+bc} = \frac{a^3 (b-c)}{1+bc} + \frac{b^3 (c-a)}{1+ca} + \frac{c^3 (a-b)}{1+ab}$$

и т. д. Означимо даље са $P(a-b)$ и $P(1+ab)$ ове производе:

$$P(a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$P(1+ab) = (1+ab)(1+bc)(1+ca)$$

и потражимо неку функцију $M$ корена $a$, $b$, $c$, која ће задовољити ову погодбу

$$\Sigma \frac{a^3 (b-c)}{1+bc} = \frac{\Sigma a - abc}{1-\Sigma ab} \cdot \frac{P(a-b)}{P(1+ab)} (M-1). \qquad (2)$$

Ако је сад

$$Q = abc\, \Sigma ab (b-a) + \Sigma a^3 (b-c),$$

а

$$R = \Sigma a^3 b^3 (a^2 - b^2) + abc\, \Sigma a^3 (b^2 - c^2)(1+a^2) + a^2 b^2 c^2\, \Sigma a^3 (b-c),$$

онда ће према условној еквацији (2) бити

$$Q - R = Q(1-M),$$

т. ј. биће

$$M = \frac{R}{Q}$$

тако, да је

$$M = \Sigma a^2 b^2 + abc \, \Sigma a \left(\Sigma ab + 1 + \frac{\Sigma ab - 1}{\Sigma a \quad abc} abc\right).$$

Из еквације (2) добива се међутим непосредно ово:

$$\Sigma \frac{a^3 (1 + ab)(1 + ac)}{(a - b)(a - c)} = \frac{\Sigma a - abc}{1 - \Sigma ab} (1 - M),$$

па како је

$$\Sigma \frac{a^3 (1 + ab)(1 + ac)}{(a - b)(a - c)} = F(a, b, c),$$

то ће бити и

$$F(a, b, c) = \frac{\Sigma a - abc}{1 - \Sigma ab} (1 - M). \qquad (3)$$

С друге стране је опет:

$$\Sigma a = - p, \ \Sigma ab = q, \ abc = - r.$$

а

$$\Sigma a^2 b^2 = q^2 - 2pr;$$

то значи, да ће се симетрична функција $F(a, b, c)$ моћи изразити овом рационалном функцијом коефицијената $p$, $q$, $r$ дате еквације трећег степена:

$$F(a, b, c) = \frac{p - r}{q - 1} \Big[ 1 - q^2 + 2pr - pr \,(q + 1 +$$

$$+ \frac{q - 1}{p - r} r) \Big].$$

Према томе је

$$F(a, b, c) = \frac{1}{q-1} [(1 - q^2 + 2pr)(p - r)$$

$$- pr(q+1)(p-r) + (q-1)r)],$$

а по томе се види ово: кад је $p - r = 0$, т. ј. кад је $\Sigma a = abc$, онда је

$$F(a, b, c) = -p^3,$$

или

$$F(a, b, c) = (\Sigma a)^3.$$

Узмимо сад да је

$$a = tga_1, \ b = tga_2, c = tga_3.$$

Пошто је тада

$$\frac{a-b}{1+ab} = tg(a_1 - a_2),$$

$$\frac{b-c}{1+bc} = tg(a_2 - a_3),$$

$$\frac{c-a}{1+ca} = tg(a_3 - a_1),$$

то је јасно, да ће функција $F(a, b, c)$ у том случају тачно представљати збир $\Sigma A$ простих полова $a_1$, $a_2$, $a_3$ функције $f(z)$:

$$F(tga_1, tga_2, tga_3) = \Sigma A.$$

У том случају је очевидно и

$$\frac{\Sigma a - abc}{1 - \Sigma ab} = tg(a_1 + a_2 + a_3)$$

тако, да смо добили овај образац:

$$\frac{tg^3\, a_1}{tg\,(a_1 - a_2)\, tg\,(a_1 - a_3)} + \frac{tg^3\, a_2}{tg\,(a_2 - a_1)\,(tg\, a_2 - a_3)} +$$

$$+ \frac{tg^3\, a_3}{tg\,(a_3 - a_2)\, tg\,(a_3 - a_1)} - tg\,(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$[1 - \Sigma\, tg^2 a_1\, tga^2{}_2 - tga_1\, tga_2\, tga_3\, \Sigma\, tga_1\, (\Sigma\, tga_1\, tga_2 +$$

$$+ 1 + \frac{\Sigma\, tga_1\, tga_2 - 1}{\Sigma\, tga_1 - tga_1\, tga_2\, tga_3}\, tga_1\, tga_2\, tga_3)\Big].$$

Разуме се, да тај образац вреди и за хиперболичне функције. Кад је $a_3 = 0$, онда је

$$f\,(z) = \frac{tg^2\, z}{tg\,(z - a_1)\, tg\,(z - a_2)}.$$

Поменути образац преобразиће се тада у овај познати образац:

$$\frac{tg^2 a_1 - tg^2 a_2}{tg\,(a_1 - a_2)} = tg\,(a_1 + a_2)\,(1 - tg^2 a_1\, tg^2 a_2).$$