О НЕКИМ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИМ ИДЕНТИЧНОСТИМА.

НАПИСАО

Богдан Гавриловић.

(Примљено на скупу Академије природних наука 19. маја 1903.)

Уочимо функцију

$$f(z) = \frac{tg(z - b_1)\, tg(z - b_2) \cdots tg(z - b_n)}{tg(z - a_1)\, tg(z - a_2) \cdots tg(z - a_n)},$$

па нека је

$$b_1 = \frac{\pi}{2} + b_1', \; b_2 = \frac{\pi}{2} + b_2', \cdots b_n = \frac{\pi}{2} + b_n'.$$

Тада ће се $f(z)$ моћи овако изразити:

$$f(z) = (-1)^n \cot(z - a_1) \cot(z - a_2) \cdots \cot(z - a_n)$$
$$\times \cot(z - b_1') \cot(z - b_2') \cdots \cot(z - b_n').$$

Остатке функције $f(z)$ у половима њезиним $a_1, \cdots a_n, \; b_1', \cdots b_n'$ означићу са $A_1, \cdots A_n, B_1', \cdots B_n'$[1].

Према томе ће бити

$$A_1 = \frac{tg\,(a_1 - b_1)\,tg\,(a_1 - b_2)\cdots tg\,(a_1 - b_n)}{tg\,(a_1 - a_2)\,tg\,(a_1 - a_3)\cdots tg\,(a_1 - a_n)},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$A_n = \frac{tg\,(a_n - b_1)\,tg\,(a_n - b_2)\cdots tg\,(a_n - b_n)}{tg\,(a_n - a_1)\,tg\,(a_n - a_2)\cdots tg\,(a_n - a_{n-1})},$$

а

$$B_1' = \frac{tg\,(b_1 - a_1)\,tg\,(b_1 - a_2)\cdots tg\,(b_1 - a_n)}{tg\,(b_1 - b_2)\,tg\,(b_1 - b_3)\cdots tg\,(b_1 - b_n)},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$B_n' = \frac{tg\,(b_n - a_1)\,tg\,(b_n - a_2)\cdots tg\,(b_n - a_n)}{tg\,(b_n - b_1)\,tg\,(b_n - b_2)\cdots tg\,(b_n - b_{n-1})}.$$

Прости елементи функције $f(z)$ биће

$$cot\,(z - a_1), \cdots cot\,(z - a_n),$$

$$cot\,(z - b_1'), \cdots cot\,(z - b_n'),$$

а сама функција $f(z)$ може се растворити на овај начин у збир тих својих елемената[1]):

$$f(z) = 1 + A_1\,cot\,(z - a_1) + \cdots + A_n\,cot\,(z - a_n)$$

$$+ B_1'\,cot\,(z - b_1') + \cdots + B_n'\,cot\,(z - b_n'). \qquad (1)$$

По Ајлерову обрасцу је међутим

$$e^{zi} = cos\,z + i\,sin\,z,$$

[1]) **Hermite.** *Cours d' Analyse de l' École polytechnique, p. 331.*

па је стога

$$tg\, z = \frac{1}{i} \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}},$$

а уз то и

$$tg\,(z - a_j) = \frac{1}{i} \frac{e^{2zi} - e^{2a_j i}}{e^{2zi} + e^{2a_j i}},$$

$$tg\,(z - b_k) = \frac{1}{i} \frac{e^{2zi} - e^{2b_k i}}{e^{2zi} + e^{2b_k i}}.$$

Ако се дакле узме, да је

$$u = e^{2zi},$$

а

$$\alpha_j = e^{2a_j i}, \qquad \beta_k = e^{2b_k' i},$$

онда ће се функција $f(z)$ преобразити у ову рационалну функцију променљиве u:

$$f(z) = \frac{(u+\alpha_1)(u+\alpha_2)\cdots(u+\alpha_n)}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)\cdots(u-\alpha_n)}$$

$$\times \frac{(u+\beta_1)(u+\beta_2)\cdots(u+\beta_n)}{(u-\beta_1)(u-\beta_2)\cdots(u-\beta_n)}. \qquad (1^*)$$

Означимо сад са G вредност функције $f(z)$, која одговара посебној вредности $u = o$ променљиве u, а са H ону вредност функције $f(z)$, која одговара вредности $u = \infty$:

$$G = \Big[\, f(z) \,\Big]_{u=o}, \qquad H = \Big[\, f(z) \,\Big]_{u=\infty}.$$

По једном познатом обрасцу Хермитову[1]) моћи ћемо тада збир ΣR поменутих остатака функције $f(z)$ овако изразити:

$$\Sigma R = \frac{G - H}{2} i,$$

па како је за функцију $f(z)$

$$G = 1, \qquad H = 1,$$

то је очевидно[2]) за ту функцију и

$$\Sigma R = A_1 + \cdots + A_n + B_1' + \cdots + B_n' = o.$$

Уочимо сад аналитички израз (1) функције $f(z)$, па нека је

$$\psi(z) = B_1' \cot(z - b_1') + \cdots + B_n' \cot(z - b_n').$$

Тада ће бити

$$f(z) = 1 + A_1 \cot(z - a_1) + \cdots$$
$$+ A_n \cot(z - a_n) + \psi(z),$$

т. ј. биће

$$\Big[f(z)\Big]_{u=o} = \Big[1 + A_1 \cot(z - a_1) + \cdots$$
$$+ A_n \cot(z - a_n)\Big]_{u=o} + \Big[\psi(z)\Big]_{u=o},$$

[1]) **Hermite,** *ibid. p. 328.*

[2]) Упор. и доказ **Saalschütz-ов** *(Nouv. Ann. III. ser. t. 5. p. 51.).*

а

$$\Big[f(z)\Big]_{u=\infty} = \Big[1 + A_1 \cot(z - a_1) + \cdots$$

$$+ A_n \cot(z - a_n)\Big]_{u=\infty} + \Big[\psi(z)\Big]_{u=\infty}.$$

Али је

$$\Big[f(z)\Big]_{u=o} = G, \quad \Big[f(z)\Big]_{u=\infty} = H.$$

С друге стране је опет

$$\Big[\cot(z - a_1)\Big]_{u=o} = \Big[\cot(z - a_2)\Big]_{u=o} = \cdots = -i,$$

а

$$\Big[\cot(z - a_1)\Big]_{u=\infty} = \Big[\cot(z - a_2)\Big]_{u=\infty} = \cdots = i.$$

Ако је дакле

$$\Big[\psi(z)\Big]_{u=o} = G'', \quad \Big[\psi(z)\Big]_{u=\infty} = H'',$$

онда ће бити

$$G = 1 - (A_1 + \cdots + A_n)\, i + G'',$$

$$H = 1 + (A_1 + \cdots + A_n)\, i + H'',$$

т. ј. биће

$$\frac{G - H}{2}\, i = \Sigma A_i + \frac{G'' - H''}{2}\, i, \tag{2}$$

а

$$G + H = 2 + G'' + H''. \qquad (3)$$

Међутим је у овај мах $G = H$, па је стога према обрасцу (2)

$$\Sigma A_i = \frac{H'' - G''}{2} i.$$

Али, пошто је $G + H = 2$, то ће по обрасцу (3) бити

$$G'' = - H'',$$

т. ј. биће

$$\Sigma A_i = H'' i.$$

Тим бројем $H'' i$ био би дакле одређен збир остатака дате функције у половима њезиним $a_1, \cdots a_n$. Но како је

$$\Sigma A_i + \Sigma B_i' = o,$$

то је очевидно и

$$\Sigma B_i = - H'' i$$

или, пошто је $G'' = - H''$,

$$\Sigma B_i' = G'' i.$$

Обратно, ако функцију

$$A_1 \cot (z - a_1) + \cdots + A_n \cot (z - a_n)$$

означимо са $\varphi(z)$, онда ће бити

$$f(z) = 1 + B_1' \cot(z - b_1') + \cdots$$
$$+ B_n' \cot(z - b_n') + \varphi(z),$$

па пошто је

$$\Big[\cot(z - b_1')\Big]_{u=0} = \Big[\cot(z - b_2')\Big]_{u=0} = \cdots = -i,$$

$$\Big[\cot(z - b_1')\Big]_{u=\infty} = \Big[\cot(z - b_2')\Big]_{u=\infty} = \cdots = -i,$$

то ће уједно бити и

$$G = 1 - \Sigma B_i' + \Big[\varphi(z)\Big]_{u=\infty},$$

$$H = 1 + \Sigma B_i' + \Big[\varphi(z)\Big]_{u=\infty}.$$

Означивши дакле бројне вредности

$$\Big[\varphi(z)\Big]_{u=0} \text{ и } \Big[\varphi(z)\Big]_{u=\infty} \text{ са } G' \text{ и } H':$$

$$\Big[\varphi(z)\Big]_{u=0} = G', \quad \Big[\varphi(z)\Big]_{u=\infty} = H',$$

добићемо да је

$$G = 1 - \Sigma B_i' + G',$$

$$H = 1 + \Sigma B_i' + H',$$

а одатле је с једне стране

$$\frac{G-H}{2} i = \Sigma B_i' + \frac{G'-H'}{2} i,$$

а с друге стране

$$G + H = 2 + G' + H'$$

или, пошто је $G = H$, то ће бити и

$$G' = -H',$$

а уз то и

$$\Sigma B_i' = H' i,$$

а

$$\Sigma A_i = G' i.$$

Мало час смо међутим доказали да је

$$\Sigma A_i = H'' i, \ \Sigma B_i' = G'' i,$$

а кад се то има у виду, онда је јасно, да је и

$$G' = H'', \quad G'' = H'$$

тако, да је

$$G' = H'' = -G'' = -H'.$$

На те резултате може се у осталом бацити светлост и с друге стране. Пошто је на име $\varphi(z)$ рационална функција синуса и косинуса, и пошто су остаци те функције у половима њезиним a_1, $\cdots a_n$ идентични са остацима $A_1, \cdots A_n$, то ће према Хермитову обрасцу морати бити

$$\Sigma A_i = \frac{G' - H'}{2}\, i.$$

Међутим је $G' = - H'$, а то ће рећи да је *de facto*

$$\Sigma A_i = G'\, i.$$

Истим путем могло би се објаснити и зашто је $\Sigma A_i' = H'\, i$.

Вратимо се сад изразу (1*) функције $f(z)$ и узмимо да је

$$\varphi_1(u) = \frac{(u+\alpha_2)(u+\alpha_3)\ldots(u+\alpha_n)(u+\beta_1)\ldots(u+\beta_n)}{(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)\ldots(u-\alpha_n)(u-\beta_3)\ldots(u-\beta_n)},$$

$$\varphi_2(u) = \frac{(u+\alpha_1)(u+\alpha_3)\ldots(u+\alpha_n)(u+\beta_1)\ldots(u+\beta_n)}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_3)\ldots(u-\alpha_n)(u-\beta_1)\ldots(u-\beta_n)},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\varphi_n(u) = \frac{(u+\alpha_1)(u+\alpha_2)\ldots(u+\alpha_{n-1})(u+\beta_1)\ldots(u+\beta_n)}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)\ldots(u-\alpha_{n-1})(u-\beta_1)\ldots(u-\beta_n)},$$

а

$$\psi_1(u) = \frac{(u+\alpha_1)\ldots(u+\alpha_n)(u+\beta_2)(u+\beta_3)\ldots(u+\beta_n)}{(u-\alpha_1)\ldots(u-\alpha_n)(u-\beta_2)(u-\beta_3)\ldots(u-\beta_n)},$$

$$\psi_2(u) = \frac{(u+\alpha_1)\ldots(u+\alpha_n)(u+\beta_1)(u+\beta_3)\ldots(u+\beta_n)}{(u-\alpha_1)\ldots(u-\alpha_n)(u-\beta_1)(u-\beta_3)\ldots(u-\beta_n)},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\psi_n(u) = \frac{(u+\alpha_1)\ldots(u+\alpha_n)(u+\beta_1)(u+\beta_2)\ldots(u+\beta_{n-1})}{(u-\alpha_1)\ldots(u-\alpha_n)(u-\beta_1)(u-\beta_2)\ldots(u-\beta_{n-1})}.$$

Како је сад

$$\varphi(z) = A_1 \cot(z - a_1) + A_2 \cot(z - a_2) + \ldots + A_n \cot(z - a_n),$$

$$\psi(z) = B_1' \cot(z - b_1') + B_2' \cot(z - b_2') + \ldots + B_n' \cot(z - b_n'),$$

то ћемо очевидно те две функције аналитички моћи и овако изразити:

$$\varphi(z) = \varphi_1(\alpha_1) \frac{u + \alpha_1}{u - \alpha_1} + \varphi_2(\alpha_2) \frac{u + \alpha_2}{u - \alpha_2} + \cdots + \varphi_n(\alpha_n) \frac{u + \alpha_n}{u - \alpha_n}, \tag{4}$$

$$\psi(z) = \psi_1(\beta_1) \frac{u + \beta_1}{u - \beta_1} + \psi_2(\beta_2) \frac{u + \beta_2}{u - \beta_2} + \cdots + \psi_n(\beta_n) \frac{u + \beta_n}{u - \beta_n}. \tag{5}$$

Али ми доказасмо да је

$$\Sigma A_i = G' i = H'' i,$$

$$\Sigma B_i' = G'' i = H' i;$$

уз то се по изразима под (4) и (5) види, да је

$$H' = -G' = \Sigma \varphi_i(\alpha_i),$$

$$H'' = -G'' = \Sigma \psi_i(\beta_i),$$

а кад се то има у виду, онда ће нам јасно бити, да је и

$$\Sigma A_i = i \, \Sigma \psi_i(\beta_i), \tag{6}$$

$$\Sigma B_i' = i \, \Sigma \varphi_i(\alpha_i),$$

и *тим збировима били би алгебарски изражене вредности збирова остатака* A_i и B_i'. Тај резултат применићемо одмах при доказу неких тригонометријских идентичности.

Кад је

$$f(z) = \frac{tg(z - b_1)\, tg(z - b_2)}{tg(z - a_1)\, tg(z - a_2)}.$$

онда је

$$\psi_1(\beta_1) = \frac{(\beta_1 + \alpha_1)(\beta_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)},$$

$$\psi_2(\beta_2) = \frac{(\beta_2 + \alpha_1)(\beta_2 + \alpha_2)(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)}.$$

По обрасцу (6) биће дакле

$$\Sigma A_i = A_1 + A_2 = i\left[\frac{(\beta_1 + \alpha_1)(\beta_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)} + \frac{(\beta_2 + \alpha_1)(\beta_2 + \alpha_2)(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1)}\right].$$

По томе се види, да је збир ΣA_i с једне стране симетрична функција количина α_1 и α_2, а с друге стране и симетрична функција количина β_1 и β_2; та функција је дакле у неку руку *двојно симетрична функција* количина α и β, и ми ћемо доказати *да се та двојно симетрична функција може овако изразити:*

$$\Sigma A_i = i\,\frac{\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2}$$

$$\times\left[1 - \frac{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 + \beta_2)(\alpha_2 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)}\right].$$

Ако се на име узме да je

$$R = (\beta_1 + \alpha_1)(\beta_1 + \alpha_2)(\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2),$$

a

$$S = (\beta_2 + \alpha_1)(\beta_2 + \alpha_2)(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2),$$

онда ће бити

$$\Sigma A_i = i\,\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \frac{R - S}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)}.$$

Међутим je

$$R = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2)$$

$$+ (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \beta_1 \beta_2,$$

a

$$S = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2)$$

$$- (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \beta_1 \beta_2,$$

т. j.

$$R - S = 2(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2),$$

па je с тога и

$$\Sigma A_i = i\,\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2)}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)}.$$

Нека je сад

$$M = -\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)}.$$

Тада ће бити

$$\Sigma A_i = i \frac{\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2} M.$$

Пошто је међутим

$$\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)}$$

$$= \frac{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 + \beta_2)(\alpha_2 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)} - 1,$$

биће

$$M = 1 - \frac{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 + \beta_2)(\alpha_2 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)},$$

а то ће рећи, да је заиста

$$\Sigma A_i = i \left[\frac{(\beta_1 + \alpha_1)(\beta_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)} + \frac{(\beta_2 + \alpha_1)(\beta_2 + \alpha_2)(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1)}\right]$$

$$= i \frac{\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2}$$

$$\times \left[1 - \frac{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 + \beta_2)(\alpha_2 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)}\right], \qquad (7)$$

као што смо то били и тврдили.

Међутим је

$$\alpha_1 = e^{2a_1 i}, \qquad \alpha_2 = e^{2a_2 i},$$

$$\beta_1 = e^{2b_1' i}, \qquad \beta_2 = e^{2b_2' i}.$$

Но пошто је

$$b_1' = b_1 - \frac{\pi}{2}, \qquad b_2' = b_2 - \frac{\pi}{2},$$

то је и

$$\beta_1 = -e^{2b_1 i}, \qquad \beta_2 = -e^{2b_2 i},$$

па је стога и

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2}{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2} =$$

$$\frac{e^{(a_1 + a_2 - b_1 - b_2) i} - e^{-(a_1 + a_2 - b_1 - b_2) i}}{e^{(a_1 + a_2 - b_1 - b_2) i} + e^{-(a_1 + a_2 - b_1 - b_2) i}},$$

т. ј.

$$\frac{1}{i} \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2}{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2} = tg\,(a_1 + a_2 - b_1 - b_2).$$

С друге стране је опет

$$tg\,(a_1 - b_1) = \frac{1}{i} \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}, \quad tg\,(a_1 - b_2) = \frac{1}{i} \frac{\alpha_1 + \beta_2}{\alpha_1 - \beta_2},$$

$$tg\,(a_2 - b_1) = \frac{1}{i} \frac{\alpha_2 + \beta_1}{\alpha_2 - \beta_1}, \quad tg\,(a_2 - b_2) = \frac{1}{i} \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2}.$$

Према обрасцу (7 биће дакле

$$\Sigma A_i = A_1 + A_2 = tg\,(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)$$

$$\times \left[1 - tg\,(a_1 - b_1)\, tg\,(a_1 - b_2)\, tg\,(a_2 - b_1)\, tg\,(a_2 - b_2)\right].$$

Кад се дакле има у виду, да је у овај мах

$$A_1 = \frac{tg\,(a_1 - b_1)\, tg\,(a_1 - b_2)}{tg\,(a_1 - a_2)},$$

$$A_2 = \frac{tg\,(a_2 - b_1)\, tg\,(a_2 - b_2)}{tg\,(a_2 - a_1)},$$

онда ћемо према последњем обрасцу непосредно добити ову тригонометријску идентичност:

$$\frac{tg\,(a_1 - b_1)\, tg\,(a_1 - b_2)}{tg\,(a_1 - a_2)} + \frac{tg\,(a_2 - b_1)\, tg\,(a_2 - b_2)}{tg\,(a_2 - a_1)}$$

$$= tg\,(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)$$

$$\times \left[1 - tg\,(a_1 - b_1)\, tg\,(a_1 - b_2)\, tg\,(a_2 - b_1)\, tg\,(a_2 - b_2)\right].$$

Још ћемо поменути и ово. Познато је, да је хиперболична тангента аргумента z аналитички одређена овим изразом:

$$tg\,h\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^z}.$$

Према томе је и

$$tg\,h\,(z - a_i) = \frac{e^{2z} - e^{2a_i}}{e^{2z} + e^{2a_i}},$$

$$tg\,h\,(z - b_k) = \frac{e^{2z} - e^{2b_k}}{e^{2z} + e^{2b_k}}.$$

Узмимо сад, да је

$$\alpha_i = e^{2a_i}, \qquad \beta_j = - e^{2b_j}.$$

Тада ће бити

$$\frac{\beta_1 + \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} = - tg\, h\, (a_1 - b_1), \cdots \quad \cdots$$

Ако дакле са $f(z)$ у овај мах означимо ову функцију:

$$f(z) = \frac{tg\, h\, (z - b_1)\; tg\, h\, (z - b_2)}{tg\, h\, (z - a_1)\; tg\, h\, (z - a_2)}, \tag{8}$$

онда ће бити

$$A_1 = \frac{tg\, h\, (a_1 - b_1)\; tg\, h\, (a_1 - b_2)}{tg\, h\, (a_1 - a_2)},$$

$$A_2 = \frac{tg\, h\, (a_2 - b_1)\; tg\, h\, (a_2 - b_2)}{tg\, h\, (a_2 - a_1)}$$

тако, да бисмо у овај мах према основном обрасцу (7) добили ову идентичност:

$$\frac{tg\, h\, (a_1 - b_1)\; tg\, h\, (a_1 - b_2)}{tg\, h\, (a_1 - a_2)} + \frac{tg\, h\, (a_2 - b_1)\; tg\, h\, (a_2 - b_2)}{tg\, h\, (a_2 - a_1)}$$
$$= tg\, h\, (a_1 + a_2 - b_1 - b_2)$$
$$\times \left[1 - tg\, h\, (a_1 - b_1)\; tg\, h\, (a_1 - b_2)\; tg\, h\, (a_2 - b_1)\; tg\, h\, (a_2 - b_2) \right]. \tag{9}$$

Сличним путем могло би се доказати, да је

$$\frac{tg\, h\, (b_1 - a_1)\; tg\, h\, (b_1 - a_2)}{tg\, h\, (b_1 - b_2)} + \frac{tg\, h\, (b_2 - a_1)\; tg\, h\, (b_2 - a_2)}{tg\, h\, (b_2 - b_1)}$$
$$= tg\, h\, (b_1 + b_2 - a_1 - a_2)$$
$$\times \left[1 - tg\, h\, (b_1 - a_1)\; tg\, h\, (b_1 - a_2)\; tg\, h\, (b_2 - a_1)\; tg\, h\, (b_2 - a_2) \right]. \tag{10}$$

На левој страни идентичне релације (9) јављају нам се међутим остаци A_1 и A_2 функције (8) у половима a_1 и a_2 те функције, а на левој страни релације (10) јављају се опет остаци B'_1 и B_2' функције

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{tg\,h\,(z - a_1)\,tg\,h\,(z - a_2)}{tg\,h\,(z - b_1)\,tg\,h\,(z - b_2)}$$

у половима b_1 и b_2 те функције. Збир остатака те две функције биће очевидно раван нули:

$$A_1 + A_2 + B_1' + B_2' = o.$$