О АНАЛИТИЧКОМ ПРЕДСТАВЉАЊУ

ЈЕДНОГРАНИХ ФУНКЦИЈА У ОБЛАСТИ ТАЧКЕ У БЕСКОНАЧНОСТИ.

НАПИСАО

Богдан Гавриловић.

Означимо са $F(z)$ неку целу функцију:

$$F(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots \cdots, \tag{1}$$

а са $\varphi(z)$ овај полином n-тога степена:

$$\varphi(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n),$$

и уочимо ову функцију:

$$G(z) = \frac{F(z)}{\varphi(z)}. \tag{2}$$

Полови функције $G(z)$ су тачке $a_1, a_2, \cdots a_n$, т.ј. функција $G(z)$ имаће у оном делу равни, што лежи изван области тачке у бесконачности, свега n полова.

Како је сад с једне стране

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{z^n}\left(1 - \frac{a_1}{z}\right)^{-1}\left(1 - \frac{a_2}{z}\right)^{-1} \cdots \left(1 - \frac{a_n}{z}\right)^{-1},$$

и како опет с друге стране редови

$$\left(1-\frac{a_1}{z}\right)^{-1}=1+\frac{a_1}{z}+\frac{a_1^2}{z^2}+\cdots\cdots,$$

$$\left(1-\frac{a_2}{z}\right)^{-1}=1+\frac{a_2}{z}+\frac{a_2^2}{z^2}+\cdots\cdots,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\cdots,$$

$$\left(1-\frac{a_n}{z}\right)^{-1}=1+\frac{a_n}{z}+\frac{a_n^2}{z^2}+\cdots\cdots$$

апсолутно конвергирају, кадгод је

$$\left|\frac{a_1}{z}\right|<1,\quad\left|\frac{a_2}{z}\right|<1,\ \cdots\quad\left|\frac{a_n}{z}\right|<1,$$

то је јасно, да ће производ тих редова морати апсолутно конвергирати у области тачке у бесконачности. Тај производ ће бити представљен једним редом овога облика:

$$1+\frac{v_1}{z}+\frac{v_2}{z^2}+\cdots\cdots \tag{3}$$

Коефицијенти тога реда су потпуно одређени: то су симетричне функције нулâ $a_1, a_2, \cdots a_n$ полинома $\varphi(z)$, а специјално између тих коефицијената има коефицијенат v_1 ову вредност:

$$v_1=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

Како је међутим

$$G(z)=\frac{F(z)}{\varphi(z)},$$

то ћемо функцију $G(z)$ моћи овако изразити:

$$G(z) = \frac{1}{z^n}(u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots)$$

$$\times \left(1 + \frac{v_1}{z} + \frac{v_2}{z^2} + \cdots\right).$$

Пошто сад ред (1) апсолутно конвергира у целој равни, и пошто опет с друге стране ред (3) апсолутно конвергира у спољашњем крају онога круга C, у коме леже полови $a_1, a_2, \cdots a_n$ функције $G(z)$, то је јасно, да ће производ $P(z)$ та два реда такођер апсолутно конвергирати у спољашњем крају круга C. То значи, да ће ред што представља функцију $P(z)$, апсолутно конвергирати у области тачке $z = \infty$, па како је

$$\begin{aligned}
P(z) = {} & (u_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots) \\
& + (u_1 + u_2 v_1 + u_3 v_2 + \cdots) z \\
& + (u_2 + u_3 v_1 + u_4 v_2 + \cdots) z^2 \\
& + \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
& + (u_{n-1} + u_n v_1 + u_{n+1} v_2 + \cdots) z^{n-1} \\
& + (u_n + u_{n+1} v_1 + u_{n+2} v_2 + \cdots) z^n \\
& + \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
& + (u_0 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_3 + \cdots) z^{-1} \\
& + (u_0 v_2 + u_1 v_3 + u_2 v_4 + \cdots) z^{-2}
\end{aligned}$$

$$+ (u_0 v_3 + u_1 v_4 + u_2 v_5 + \cdots) z^{-3}$$

$$+ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots,$$

то ће бити и

$$\begin{aligned} G(z) = & (u_n + u_{n+1} v_1 + u_{n+2} v_2 + \cdots) \\ & + (u_{n+1} + u_{n+2} v_1 + u_{n+3} v_2 + \cdots) z \\ & + (u_{n+2} + u_{n+3} v_1 + u_{n+4} v_2 + \cdots) z^2 \\ & + \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & + (u_{n-1} + u_n v_1 + u_{n+1} v_2 + \cdots) z^{-1} \\ & + (u_{n-2} + u_{n-1} v_1 + u_n v_2 + \cdots) z^{-2} \\ & + \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & + (u_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots) z^{-n} \\ & + (u_0 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_3 + \cdots) z^{-n-1} \\ & + \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \end{aligned}$$

и то ће очевидно бити аналитички израз функције $G(z)$ *у области тачке у бесконачности.*

Променивши у томе реду знак коефицијенту уз z^{-1}, добићемо[1]) остатак R_∞ функције $G(z)$ у тачци $z = \infty$ тако, да је у овај мах

$$R_\infty = -(u_{n-1} + u_n v_1 + u_{n+1} v_2 + \cdots). \tag{4}$$

Одмах ћу показати, како се тај образац може применити, али ћу се пре тога морати задржати

[1]) v. **Tisserand-Painlevé.** *Exercises sur le Calcul infinitésimal,* 1896. p. 441.

на неким радовима Хермитовим, са којих сам се и почео бавити о питањима, која су у овој расправи покренута.

Нека је тога ради

$$f(z)=\frac{\sin(z-b_1)\sin(z-b_2)\cdots\sin(z-b_n)}{\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\cdots\sin(z-a_n)},$$

па означимо са $A_1, A_2, \cdots A_n$ остатке те функције у половима њезиним $a_1, a_2, \cdots a_n$, т. ј. нека је

$$A_1=\frac{\sin(a_1-b_1)\sin(a_1-b_2)\cdots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\cdots\sin(a_1-a_n)},$$

$$A_2=\frac{\sin(a_2-b_1)\sin(a_2-b_2)\cdots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\cdots\sin(a_2-a_n)},$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$A_n=\frac{\sin(a_n-b_1)\sin(a_n-b_2)\cdots\sin(a_n-b_n)}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_2)\cdots\sin(a_n-a_{n-1})}.$$

Даље уочимо и обрнуту функцију

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\cdots\sin(z-a_n)}{\sin(z-b_1)\sin(z-b_2)\cdots\sin(z-b_n)},$$

па нека су $B_1, B_2, \cdots B_n$ остаци те функције, т. ј. нека је

$$B_1=\frac{\sin(b_1-a_1)\sin(b_1-a_2)\cdots\sin(b_1-a_n)}{\sin(b_1-b_2)\sin(b_1-b_3)\cdots\sin(b_1-b_n)},$$

$$B_2=\frac{\sin(b_2-a_1)\sin(b_2-a_2)\cdots\sin(b_2-a_n)}{\sin(b_2-b_1)\sin(b_2-b_3)\cdots\sin(b_2-b_n)},$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$B_n = \frac{\sin(b_n - a_1)\sin(b_n - a_2)\cdots\sin(b_n - a_n)}{\sin(b_n - b_1)\sin(b_n - b_2)\cdots\sin(b_n - b_{n-1})}.$$

Тада ће, као што је то Hermite[1]) доказао, бити

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

$$= \sin(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - b_1 - b_2 - \cdots - b_n) \qquad (5)$$

с једне, а

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + B_1 + B_2 + \cdots + B_n = 0 \qquad (6)$$

с друге стране.

Узимајући за основу своме доказивању једну особину остатака рационалне разломљене функције

$$f(z) = \frac{F(\sin z, \cos z)}{G(\sin z, \cos z)},$$

генералисирао је Hermite[2]) тим обрасцима два позната специјална обрасца Glaisher-ова[3]).

Доказаћемо одмах, ослањајући се на образац (4), да се и збирови остатака оних алгебарских рационалних разломљених функција, у којима су функције у бројитељу и именитељу истога степена, могу изразити обрасцима, који по својој аналитичкој природи потпуно одговарају обрасцима (5) и (6).

Уочимо тога ради ову специјалну функцију:

$$G(z) = \frac{(z - b_1)(z - b_2)\cdots(z - b_n)}{(z - a_1)(z - a_2)\cdots(z - a_2)}. \qquad (7)$$

[1]) **Hermite.** *Sur une identité trigonométrique,* Nouv. Annales, III. t. IV. p. 57.

[2]) **Hermite.** *Cours lithographié,* 1891. p. 121.

[3]) v. *Nouv. Annales,* l. c.

Остатке те функције у половима њезиним a_1, a_2, $\cdots a_n$ означићемо поново са A_1, A_2, $\cdots A_n$:

$$A_1 = \frac{(a_1-b_1)(a_1-b_2)\cdots(a_1-b_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)},$$

$$A_2 = \frac{(a_2-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_2-b_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$A_n = \frac{(a_n-b_1)(a_n-b_2)\cdots(a_n-b_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})}.$$

Сем те функције (7) узећемо и обрнуту функцију

$$\frac{1}{G(z)} = \frac{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}{(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n)},$$

па нека су B_1, B_2, $\cdots B_n$ остаци те функције у половима њезиним b_1, b_2, $\cdots b_n$:

$$B_1 = \frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)\cdots(b_1-a_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\cdots(b_1-b_n)},$$

$$B_2 = \frac{(b_2-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_2-a_n)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)\cdots(b_2-b_n)},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$B_n = \frac{(b_n-a_1)(b_n-a_2)\cdots(b_n-a_n)}{(b_n-b_1)(b_n-b_2)\cdots(b_n-b_{n-1})}.$$

Ја ћу на основи Кошијеве теорије остатака доказати, да је у овај мах

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - b_1 - b_2 - \cdots - b_n, \qquad (8)$$

т. ј. доказаћу, да је и у овај мах

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + B_1 + B_2 + \cdots + B_n = 0. \quad (9)$$

Ако се претпостави, да је

$$(z - b_1)(z - b_2) \cdots (z - b_n) = F(z),$$

а

$$(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n) = \varphi(z),$$

онда ће бити

$$A_1 = \frac{F(a_1)}{\varphi'(a_1)}, \quad A_2 = \frac{F(a_2)}{\varphi'(a_2)}, \quad \cdots \quad A_n = \frac{F(a_n)}{\varphi'(a_n)},$$

$$B_1 = \frac{\varphi(b_1)}{F'(b_1)}, \quad B_2 = \frac{\varphi(b_2)}{F'(b_2)}, \quad \cdots \quad B_n = \frac{\varphi(b_n)}{F'(b_n)},$$

па ће према томе и обрасци (8) и (9) бити овог облика:

$$\frac{F(a_1)}{\varphi'(a_1)} + \frac{F(a_2)}{\varphi'(a_2)} + \cdots + \frac{F(a_n)}{\varphi'(a_n)}$$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n - b_1 - b_2 - \cdots - b_n, \quad (8^+)$$

и

$$\frac{F(a_1)}{\varphi'(a_1)} + \frac{F(a_2)}{\varphi'(a_2)} + \cdots + \frac{F(a_n)}{\varphi'(a_n)}$$

$$+ \frac{\varphi(b_1)}{F'(b_1)} + \frac{\varphi(b_2)}{F'(b_2)} + \cdots + \frac{\varphi(b_n)}{F'(b_n)} = 0. \quad (9^+)$$

Да бих то доказао, ослонићу се на ову теорему: Ако једногрирана аналитичка функција има коначан број сингуларних тачака, онда је збир свих могућих остатака, урачунавајући у тај збир и остатак R_∞ тачке у бесконачности, тачно раван нули[1]. — Но кад је

$$F(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots\cdots,$$

онда је према обрасцу (4)

$$R_\infty = -(u_{n-1} + u_n v_1 + u_{n+1} v_2 + \cdots).$$

У нашем специјалном случају је међутим

$$u_{n-1} = -(b_1 + b_2 + \cdots + b_n), \quad u_n = 1,$$

а

$$u_{n+1} = u_{n+2} = \cdots = 0.$$

Стога ће за функцију (7) бити

$$R_\infty = b_1 + b_2 + \cdots + b_n - v_1$$

или, како је

$$v_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

то ће за функцију (7) бити

$$R_\infty = b_1 + b_2 + \cdots + b_n - a_1 - a_2 - \cdots - a_n.$$

Пошто је сад функција (7) једнограна, а уз то и аналитичка, то ће према мало час поменутој теореми збир свих могућих остатака те функције бити раван нули. Биће дакле

$$A_1 + A_2 + \cdots A_n + R_\infty = 0,$$

[1]) **Harkness-Morley.** *Theory of functions*, 1893. p. 182—183.

т. ј. биће

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n - a_1 - a_2 - \cdots - a_n) = 0,$$

а то ће рећи, да је заиста

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - b_1 - b_2 - \cdots - b_n,$$

као што смо то били и тврдили.

Тим обрасцем је доказана ова теорема:

Теорема. *Ако су у рационалној разломљеној алгебарској функцији полиноми у бројитељу и имезнитељу истога степена, онда је збир остатака те функције у свима половима њезиним раван разлици између збира полова и збира нулâ те функције.*

Ако дакле са ΣP означимо збир полова, са ΣN збир нулâ функције

$$\frac{F(z)}{\varphi(z)} = \frac{z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_{n-1} z + p_n}{z^n + q_1 z^{n-1} + \cdots + q_{n-1} z + q_n},$$

а са ΣR збир остатака њезиних, онда ће бити

$$\Sigma R = \Sigma P - \Sigma N = p_1 - q_1.$$

Исто је тако за обрнуту функцију $\frac{\varphi(z)}{F(z)}$ збир остатака

$$\Sigma R' = \Sigma N - \Sigma P = q_1 - p_1,$$

а то ће рећи, да је заиста

$$\Sigma R + \Sigma R' = 0,$$

т. ј. да је

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + B_1 + B_2 + \cdots + B_n = 0.$$

Поменућемо још и ово. Тражећи остатак функције (2) у тачци $z = \infty$, т. ј. тражећи остатак R_∞ функције

$$G(z) = \frac{F(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)},$$

нисмо никаквим условом везали с једне стране нуле, а с друге стране полове функције $G(z)$. Кад се то има у виду, онда ће нам јасно бити, *да ће обрасцем (4) бити одређен остатак R_∞ те функције и онда, кад та функција не буде имала само простих нула и само простих полова.* То исто вреди, разуме се, и за специјалну функцију

$$G(z) = \frac{(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n)}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}, \tag{10}$$

и ако смо до сад ћутке претпостављали, да та функција има само простих нула и само простих полова. Ако се дакле узме *да функција (10) има и двојних, тројних, $\cdots$ нула или полова, ипак ће морати бити*

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + B_1 + B_2 + \cdots + B_n = 0.$$

На пример, ако је

$$G(z) = \frac{(z-b_1)(z-b_2)}{(z-a_1)(z-a_2)},$$

онда је у опште

$$A_1 + A_2 = \frac{(a_1-b_1)(a_1-b_2)}{a_1-a_2} + \frac{(a_2-b_1)(a_2-b_2)}{a_2-a}$$

$$= a_1 + a_2 - b_1 - b_2\,,$$

а

$$B_1 + B_2 = \frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)}{b_1-b_2} + \frac{(b_2-a_1)(b_2-a_2)}{b_2-b_1}$$

$$= b_1 + b_2 - a_1 - a_2\,.$$

Узмимо сад да је $b_1 = b_2$. Тада ће бити

$$A_1 + A_2 = \frac{(a_1-b_1)^2 - (a_2-b_1)^2}{a_1 - a_2} = a_1 + a_2 - 2b_1\,.$$

С друге стране је опет, и ако је $b_1 = b_2$,

$$B_1 + B_2 = \left[\frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2) - (b_2-a_1)(b_2-a_2)}{b_1 - b_2}\right]_{b_1=b_2}$$

$$= 2b_1 - a_1 - a_2\,,$$

што значи, да је и у овај мах

$$A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 0\,.$$

У осталом, да остатак функције

$$\frac{1}{G(z)} = \frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(z-b_1)^2}\,, \tag{11}$$

који је према нашем бележењу означен са $B_1 + B_2$, има заиста вредност $2b_1 - a_1 - a_2$, то би се могло потврдити и на непосредан начин. Кад је на име дата нека функција

$$\frac{F(z)}{\varphi^2(z)},$$

онда ће у простој нули a еквације $\varphi(z) = 0$ остатак те функције бити ово [1]:

$$R = \frac{F'(a)\,\varphi'(a) - F(a)\,\varphi''(a)}{\varphi'^3(a)}.$$

За функцију (11) ће дакле тај остатак у простој нули b_1 еквације $z - b_1 = 0$ тачно бити ово:

$$R = B_1 + B_2 = 2b_1 - a_1 - a_2,$$

а ту исту вредност смо добили и мало час. У осталом, кад је z реално, онда се у овом случају може остатак R одредити и по De l' Hôpital-ову правилу, тражећи праву вредност овоме изразу:

$$\left[\frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2) - (z-a_1)(z-a_2)}{b_1 - z}\right]_{z=b_1}.$$

Имајући у виду те специјалне случајеве, у којима би рационална разломљена алгебарска функција имала нулâ или полова виших редова, могли бисмо с места написати читав један низ лепих образаца.

На пример, нека је

$$G(z) = \frac{(z-b_1)(z-b_2)(z-b_3)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}.$$

[1]) **Hermite.** *Cours lith.* 1891. p. 110.

Тада је према обрасцу (8)

$$\frac{(a_1-b_1)(a_1-b_2)(a_1-b_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(a_2-b_1)(a_2-b_2)(a_2-b_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$

$$+\frac{(a_3-b_1)(a_3-b_2)(a_3-b_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}=a_1+a_2+a_3-b_1-b_2-b_3\,.$$

Ако се дакле узме, да је $b_1=b_3$, онда ће бити

$$\frac{(a_1-b_1)^2(a_1-b_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(a_2-b_1)^2(a_2-b_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{(a_3-b_1)^2(a_3-b_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

$$=a_1+a_2+a_3-2b_1-b_2\,.$$

Или, ако је $b_1=b_2=b_3$, онда ћемо добити овај образац:

$$\frac{(a_1-b_1)^3}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(a_2-b_1)^3}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{(a_3-b_1)^3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

$$=a_1+a_2+a_3-3b_1$$

и т. д.

Сем овога, што је досад речено, има још нешто, што нарочито треба истаћи. По обрасцу

$$R_\infty=-(u_{n-1}+u_n v_1+u_{n+1}v_2+\cdots)$$

види се, да је остатак R_∞ функције $G(z)$ у опште посредно и функција броја n нула̂ функције

$$\varphi(z)=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n).$$

Кад је према томе дата нека цела функција

$$F(z)=u_0+u_1 z+\cdots+u_{n-2}z^{n-2}+u_{n-1}z^{n-1}$$

$$+u_n z^n+\cdots\cdots, \tag{12}$$

онда остатак R_∞ функције

$$G(z) = \frac{F(z)}{\varphi(z)}$$

не ће никако зависити од вредности коефицијената $u_0, u_1, \cdots u_{n-2}$ реда (12). Ако се дакле претпостави, да је

$$u_{n-1} = u_n = u_{n+1} = \cdots = 0,$$

онда ће очевидно бити $R_\infty = 0$, па пошто је функција $G(z)$ и у овај мах једнограна и аналитичка, то смемо тврдити, да је збир остатака те функције раван нули:

$$\Sigma \frac{F(a_i)}{\varphi'(a_i)} = 0,$$

што је у осталом и познато.[1])

С друге стране су коефицијенти $v_1, v_2, v_3, \cdots$ реда (3) симетричне функције нулâ функције $\varphi(z)$: то су збирови $'\overset{1}{C}, '\overset{2}{C}, '\overset{3}{C}, \cdots$ склопова тих нула и то, збирови склопова првога, другога, трећега, $\cdots$ реда; па како је у опште

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + R_\infty = 0,$$

то ћемо с места, држећи се просто обрасца (4), добити овај низ Јакобијевих образаца[2]):

$$\frac{a_1^{n-1}}{\varphi'(a_1)} + \frac{a_2^{n-1}}{\varphi'(a_2)} + \cdots + \frac{a_n^{n-1}}{\varphi'(a_n)} = 1,$$

[1]) v. **Burnside-Panton.** *Theory of equations,* 1892. p. 319.

[2]) **Jacobi.** *Disquisitiones anal. de fract. simplicibus,* Werke t. III. p. 7.

$$\frac{a_1^{\,n}}{\varphi'(a_1)} + \frac{a_2^{\,n}}{\varphi'(a_2)} + \cdots + \frac{a_n^{\,n}}{\varphi'(a_n)} = '\overset{1}{C},$$

$$\frac{a_1^{\,n+1}}{\varphi'(a_1)} + \frac{a_2^{\,n+1}}{\varphi'(a_2)} + \cdots + \frac{a_n^{\,n+1}}{\varphi'(a_n)} = '\overset{2}{C},$$

$$\frac{a_1^{\,n+2}}{\varphi'(a_1)} + \frac{a_2^{\,n+2}}{\varphi'(a_1)} + \cdots + \frac{a_n^{\,n+2}}{\varphi'(a_1)} = '\overset{3}{C},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

Образац (4) може се дакле уз поменуту теорему о збиру остатака једнограних аналитичких функција применити на израчунавање збира остатака свих могућих разноликих специјалних типова функције $G(z)$[1].

Остаје нам, да кажемо још и ово. Означивши са R_∞ остатак функције $G(z)$ у тачци $z = \infty$, а са R'_∞ остатак обрнуте функције $\frac{1}{G(z)}$ у тој истој тачци, видели смо, да је за функцију

$$G(z) = \frac{(z-b_1)\,(z-b_2)\cdots(z-b_n)}{(z-a_1)\,(z-a_2)\cdots(z-a_n)}$$

збир тих остатака раван нули:

$$R_\infty + R'_\infty = 0.$$

Хермит је доказао, као што смо то били поменули, да је и за гониометријску функцију

[1]) О збировима остатака неких таквих типова бавили су се на разним основама, колико је мени познато, уз Јакобија још и Ајлер, Коши и Ханкел. (v. **Hankel**. *Die Zerlegung algeb. Functionen in Partialbrüche nach den Principien der complexen Functionentheorie,* Zeitschr. f. Math. und Physik, IX. Jahrg. p. 425.)

$$f(z) = \frac{\sin(z-b_1)\sin(z-b_2)\cdots\sin(z-b_n)}{\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\cdots\sin(z-a_n)}$$

збир тих остатака раван нули. Даље је Saalschütz доказао[1]), да има и других гониометријских функција, чији ће остаци у тачци $z = \infty$ бити везани истим условом. Тај услов задовољаваће у осталом очевидно и логаритамски изводи једнограних функција $G(z)$ и $\frac{1}{G(z)}$, јер ће остацима тих функција у *свима*[2]) врстама сингуларних тачака бити одређени редови тих функција.

Но сем тих функција има и других, за које ће бити збир поменутих остатака R_∞ и R'_∞ раван нули. Овде ћу поменути само још један тип таквих функција. Уочићу на име једну једнограну, аналитичку функцију $G(z)$ и претпоставићу, да та функција има у целој равни свега n нула и n полова. Ту функцију моћи ћемо тада аналитички овако изразити:

$$G(z) = \frac{(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n)}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)} F(z). \tag{13}$$

Функција $F(z)$, која се у томе изразу јавља, биће очевидно једна цела функција, која не ће имати ни једне нуле у целокупној равни.

Узмимо сада, да је

$$F(a_1) = F(a_2) = \cdots = F(a_n) = A,$$

а

$$F(b_1) = F(b_2) \cdots = F(b_n) = \frac{1}{A},$$

[1]) **Saalschütz.** *Extrait d' une lettre* etc., Nouv. Annales, III. t. V. p. 47.

[2]) Види моју расправу штампану у 143. књизи Rada jugoslav. akademije под натписом *O redovima jednogranih funkcija,* 1900.

па означимо остатке функције $F(z)$ у половима a_1, $a_2, \cdots a_n$ са $R_1, R_2, \cdots R_n$, а остатке функције $\frac{1}{G(z)}$ у половима $b_1, b_2, \cdots b_n$ са $R_1', R_2', \cdots R_n'$. Тада ће бити

$$R_1 = \frac{(a_1-b_1)(a_1-b_2)\cdots(a_1-b_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)} F(a_1) = A_1 A,$$

$$R_2 = \frac{(a_2-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_2-b_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)} F(a_2) = A_2 A,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad .$$

$$R_n = \frac{(a_n-b_1)(a_n-b_2)\cdots(a_n-b_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})} F(a_n) = A_n A,$$

а

$$R_1' = \frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)\cdots(b_1-a_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\cdots(b_1-b_n)} \frac{1}{F(b_1)} = B_1 A,$$

$$R_2' = \frac{(b_2-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_2-b_n)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)\cdots(b_2-b_n)} \frac{1}{F(b_2)} = B_2 A,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$R_n' = \frac{(b_n-a_1)(b_n-a_2)\cdots(b_n-a_n)}{(b_n-b_1)(b_n-b_2)\cdots(b_n-b_{n-1})} \frac{1}{F(b_n)} = B_n A.$$

Стога је

$$R_1 + R_2 + \cdots + R_n = (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) A,$$

а

$$R_1' + R_2' + \cdots + R_n' = (B_1 + B_2 + \cdots + B_n) A.$$

Ми смо међутим мало час доказали, да је

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - b_1 - b_2 - \cdots - b_n,$$

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n - a_1 - a_2 - \cdots - a_n.$$

Према томе мора бити

$$\Sigma R_i + \Sigma R_i' = 0.$$

Но како је функција (13) еднограна и аналитичка, то ће и у овај мах бити с једне стране

$$\Sigma R_i + R_\infty = 0,$$

а с друге стране

$$\Sigma R_i' + R'_\infty = 0.$$

То значи, да је

$$\Sigma R_i + \Sigma R_i' + R_\infty + R'_\infty = 0;$$

па пошто је збир

$$\Sigma R_i + \Sigma R_i' = 0,$$

то је очевидно и за функцију (13)

$$R_\infty + R'_\infty = 0.$$

Београд
20. маја 1902. г.