О ЈЕДНОЈ ОСОБИНИ ПРОСТОРНИХ ДЕТЕРМИНАНАТА.

НАПИСАО

Богдан Гавриловић.

Уочимо једну просторну детерминанту n-тога степена. У тој детерминанти имаћемо n хоризонталних равни, n вертикалних равни првога разреда и n вертикалних равни другога разреда. Елеменат i-те хоризонталне равни, j-те вертикалне равни првога разреда и k-те вертикалне равни другога разреда означићу са a_{ijk} $(i, j, k = 1, 2, 3, \cdots n)$.

Све елементе дате детерминанте, а биће их свега на број n^3, поделићу у разред парних и разред непарних елемената и то по овом правилу:

1-во. Ако је збир $j + k$ других и трећих казаљака паран број, онда ћу елеменат a_{ijk} звати парним елементом i-те хоризонталне равни; а ако је тај збир непаран број, онда ћу елеменат a_{ijk} звати непарним елементом те равни.

2-го. Ако је збир $k + i$ трећих и првих казаљака паран број, онда ћу елеменат a_{ijk} звати парним елементом j-те вертикалне равни првога разреда; у супротном случају зваћу елеменат a_{ijk} непарним елементом те равни.

3-ће. Ако је збир $i+j$ првих и других казаљака паран број, онда нека a_{ijk} буде паран елеменат k-те вертикалне равни другога разреда; а ако је тај збир непаран број онда ће и елеменат a_{ijk} бити непаран елеменат те вертикалне равни другога разреда.

Јасно је, да ће у свима хоризонталним равнима парни елементи лежати или у оној дијагоналној равни, у којој леже главне дијагонале свих хоризонталних равни дате детерминанте, или у некој другој упоредној дијагоналној равни. Сви непарни елементи појединих хоризонталних равни лежаће у том случају у осталим упоредним дијагоналним равнима.

То исто биће с једне стране са парним, а с друге стране са непарним елементима вертикалних равни првога или другога разреда: и између тих елемената првих или других вертикалних равни лежаће на име парни елементи у једном, а непарни елементи у другом разреду упоредних дијагоналних равни и при томе ће дијагоналне равни, у којима се налазе било све сами парни, било све сами непарни елементи вертикалних равни првога разреда (вертикалних равни другога разреда) имати правац оне дијагоналне равни у којој леже главне дијагонале свих вертикалних равни првога (свих вертикалних равни другога) разреда.

Променимо сад у матрици дате детерминанте најпре знаке свима парним елементима свих хоризонталних равни, затим знаке свима парним елементима свих вертикалних равни првога разреда и, напослетку, знаке свима парним елементима свих вертикалних равни другога разреда. У сва три случаја преобразиће се дата детерминанта Δ. Ту преображену детерминанту обележиһу у првом случају са D_1, у другом са D_2, а у трећем са D_3.

Пита се, како стоје детерминанте D_1, D_2, D_3 према првобитној детерминанти Δ. Да бисмо одговорили на то питање, уочићемо ово: 1-во, да се детерминанта D_1 добива из првобитне детерминанте, кад се у матрици те детерминанте измене најпре знаци свих елемената свих непарних вертикалних равни првога разреда, па после тога и знаци свих елемената свих парних вертикалних равни другога разреда; 2-го, да се детерминанта D_2 добива из првобитне детерминанте, кад се у матрици те детерминанте измене најпре знаци свих елемената свих непарних вертикалних равни другога разреда, па одмах после тога и знаци свих елемената свих парних хоризонталних равни; 3-ће, да се детерминанта D_3 добива из првобитне детерминанте, кад се у матрици те детерминанте измене најпре знаци свих елемената свих непарних хоризонталних равни, па онда затим и знаци свих елемената свих парних вертикалних равни првога разреда.

Ако је сад *n паран број*, онда ће у реду бројева 1, 2, 3, $\cdots$ n бити или непаран, или паран број непарних бројева. У првом случају биће у томе реду број парних бројева непаран, а у другоме ће број тих бројева бити паран. Како се међутим с једне стране мења знак детерминанти, кад се у њој промене знаци свих елемената ма које њезине равни, и како је с друге стране и збир два непарна, и збир два парна броја паран број, *то се очевидно детерминанта парнога степена никако не ће променити, кад се у матрици њезиној измене знаци било свима парним елементима свих хоризонталних равни, било свима парним елементима свих вертикалних* *равни првога разреда, било свима парним елементима свих вертикалних равни другога разреда.*

Ако је међутим n *непаран број*, онда ће поново у реду $1, 2, 3, \cdots n$ бити или непаран број или паран број непарних бројева. У првом случају биће број парних бројева паран, а у другом случају ће број тих бројева бити непаран, па како је збир једног непарног и једног парног броја свакад непаран број, *то ће очевидно у овај мах детерминанте изменити свој знак.*

Отуда ова теорема:

Теорема I. *Кад се у матрици неке просторне детерминанте промене знаци свих парних елемената било у свима хоризонталним равнима, било у свима вертикалним равнима првога, било у свима вертикалним равнима другога разреда, онда та детерминанта никако не ће променити своју вредност ако јој је степен био паран, а промениће само свој знак, али вредност не, ако јој је степен био непаран.*

Променимо сад у матрицама поменутих детерминаната D_1, D_2, D_3 знаке свима елементима. Тада ће се детерминанта D_1 преобразити у неку детерминанту D_1', у ону детерминанту на име, у коју ће се преобразити првобитна детерминанта $\varDelta$, кад се у матрици њезиној измене знаци свих непарних елемената свих хоризонталних равни; а детерминанте D_2 и D_3 преобразиће се опет у неке одређене детерминанте, прва у неку детерминанту D_2', друга у неку детерминанту D_3', и између тих двеју детерминаната добићемо прву чим у матрици првобитне детерминанте изменимо знаке свима непарним елементима у свима вертикалним равнима првога разреда, а другу чим у тој матрици изменимо знаке свих непарних елемената свих вертикалних равни другога разреда. Но како се у овај мах n пута мењају знаци свих елемената појединих равни, то се јасно види ово:

1-во, да је

$$D_1' = D_1,\ D_2' = D_2,\ D_3' = D_3,$$

кад је n паран број, и

2-го, да је

$$D_1' = -D_1,\ D_2' = -D_2,\ D_3' = -D_3,$$

кад је n непаран број.

Но како је у првом случају

$$\Delta = D_1 = D_2 = D_3,$$

а у другом

$$-\Delta = D_1 = D_2 = D_3,$$

то ће очевидно у оба случаја бити

$$\Delta = D_1' = D_2' = D_3'.$$

Доказали смо дакле ову теорему:

Теорема II. *Кад се у матрици неке просторне детерминанте промене знаци било свима непарним елементима свих хоризонталних равни, било свима непарним елементима свих вертикалних равни првога или свих вертикалних равни другога разреда, онда никако не ће променити своју вредност нити детерминанта парнога, нити детерминанта непарнога степена.*

Поменућу само још то, да бисмо горње две теореме могли доказати још и на друга два начина.

У првом случају би нам при доказивању полазна тачка била у самој дефиницији просторних детерминаната, а у другом случају морали бисмо најпре просторну детерминанту по Даландерову правилу раставити у збир од $n!$ обичних детерминаната, па онда у тим обичним детерминантама мењати знаке парних или непарних елемената просторних детерминаната. Оба пута су међутим дуга и заобилазна.

Београд
2. марта 1902.