О ОСОБИНАМА ЈЕДНЕ СПЕЦИЈАЛНЕ ДЕТЕРМИНАНТЕ.

НАПИСАО

Д-р Богдан Гавриловић.

Познато је, да вредност неке детерминанте у у опште зависи од свих елемената те детерминанте. Но у томе има и изузетака. Достор је на име доказао [1]), да има неких специјалних детерминаната, које не зависе од вредности свих елемената тих детерминаната. У врсту таквих детерминаната, које не зависе од свих елемената, спада, као што ћу доказати, и детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x & x & \cdots & x & x \\ a_{21} & x & x & \cdots & x & x \\ a_{31} & a_{32} & x & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & x \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

коју ћу ја звати *полиномијалном детерминантом.* У тој детерминанти су елементи главне дијагонале

[1]) **Dostor.** *Propr. des déterminants,* Arch. der Math. und. Phys. t. 56. p. 239.

међу собом једнаки и исти онакви, какви су и елементи у горњој половини матрице детерминантине, а вредност те детерминанте зависиће, као што ћемо видети, само од елемента x и од елемената $a_{21}, a_{32}, \cdots a_{n,n-1}$ оне споредне дијагонале, која се непосредно налази испод главне дијагонале. Ту дијагоналу ћу звати *првом доњом споредном дијагоналом.* Према томе не ће остали елементи детерминанте Δ, а то ће рећи елементи $a_{31}, a_{41}, a_{42}, a_{51}, \cdots a_{n,n-2}$, никако утецати на вредност те детерминанте.

Но та детерминанта има и другу једну, много важнију особину. Доказаћу на име, да та детерминанта представља један алгебарски полином, степена n-тог по x-у, и то полином чије су нуле нула и елементи $a_{21}, a_{32}, \cdots a_{n,n-1}$ поменуте прве споредне доње дијагонале.

Да полиномијална детерминанта Δ не зависи од елемената, који се у матрици њезиној налазе испод елемената прве споредне доње дијагонале, види се по овом простом факту. Уочивши на име први минор ма кога између поменутих елемената, видећемо, да су у сваког тог минора елементи у два реда једнаки. Према томе ће *сви минори оних елемената, што се у матрици полиномијалне детерминанте налазе испод елемената прве доње споредне дијагонале, бити равни нули,* а кад је вредност тих минора нула, онда очевидно детерминанта Δ не може зависити од вредности оних елемената, који тим минорима одговарају.

Тим би први део онога, што смо тврдили, био доказан, а онај други део потврдићу овако. Доказаћу најпре, *да се полиномијална детерминанта Δ може без остатка поделити разликом $x - a_{ik}$ $(i = 2, 3, \cdots n, k = i - 1)$.* — Како на име та детерминанта не зависи од елемената $a_{31}, a_{41}, a_{42}, a_{51}, \cdots a_{n,n-2}$, то ћемо ту детерминанту моћи и овако написати:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x & x & x & x & \cdots & x & x \\ a_{21} & x & x & x & \cdots & x & x \\ a_{32} & a_{32} & x & x & \cdots & x & x \\ a_{43} & a_{43} & a_{43} & x & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,n-1} & a_{n,n-1} & a_{n,n-1} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n,n-1} & x \end{vmatrix}.$$

По томе облику детерминанте $\varDelta$ види се ово: кад $\varDelta$ има једну од ових вредности

$$a_{21}, a_{32}, a_{43}, \cdots a_{n,n-1},$$

онда је $\varDelta = 0$. То значи да се $\varDelta$ без остатка може поделити ма којом између разлика $x - a_{21}$, $x - a_{32}$, $\cdots$ $x - a_{n,n-1}$, а то смо и тврдили.

Сем тога је јасно, да се $\varDelta$ може без остатка поделити и са x. Према томе мора бити

$$\varDelta = M x (x - a_{21}) (x - a_{32}) \cdots (x - a_{n,n-1}).$$

У томе изразу је са M означен некакав фактор, који би могао зависити од елемената детерминанте $\varDelta$. Но како је очевидно у развијеном облику те детерминанте један члан x^n, то је јасно, да мора бити $M = 1$. Стога је

$$\varDelta = x (x - a_{21}) (x - a_{32}) \cdots (x - a_{n,n-1}). \qquad (2)$$

До тог облика детерминанте $\varDelta$ може се доћи још на ова два начина.

a) Одузмимо од елемената k-те колоне елементе $(k-1)$-ве колоне и претпоставимо при томе да је $k = 2, 3, \cdots n$. Тада се не ће променити вредност детерминанте (1). Биће дакле

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & x - a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} - a_{31} & x - a_{32} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1} & a_{n3} - a_{n2} & \cdots & x - a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

У матрици последње детерминанте су међутим сви елементи више главне дијагонале равни нули. Стога се у развијеном облику те детерминанте налази само један једини члан: производ елемената главне дијагонале, а тај производ је потпуно идентичан са производом, који се јавља у обрасцу (2).

b) Кад се добро уочи првобитна полиномијална детерминанта Δ, видеће се 1-во, *да су први минори свих елемената главне и свих елемената доње споредне дијагонале све саме полиномијалне детерминанте*; 2-го, *да је минор, који одговара првом елементу прве врсте, идентичан са минором првог елемента друге врсте*, и 3-ће, *да је минор претпоследњег елемента последње врсте идентичан са минором последњег елемента те врсте*. Како су међутим минори свих елемената, што се у матрици полиномијалних детерминаната налазе испод доње споредне дијагонале, сви од реда равни нули, то ћемо, развијајући детерминанту Δ по елементима прве колоне, а имајући у виду другу између мало час поменутих особина, добити ово:

$$\varDelta = (x - a_{21}) M_1,$$

где је са M_1 означена ова полиномијална детерминанта $(n - 1)$-вог степена:

$$M_1 = \begin{vmatrix} x & x & x & \cdots & x & x \\ a_{32} & x & x & \cdots & x & x \\ a_{42} & a_{43} & x & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{n,n-1} & x \end{vmatrix}.$$

Ту полиномијалну детерминанту развићемо опет по елементима прве колоне. Тада ће бити

$$M_1 = (x - a_{32}) M_2,$$

где је

$$M_2 = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & x \\ a_{43} & x & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{n,n-1} & x \end{vmatrix}.$$

Развијајући и последњу полиномијалну детерминанту $(n - 2)$-гог степена по елементима прве колоне, свешће се израчунавање њено на израчунавање једне полиномијалне детерминанте $(n - 3)$-ћег степена. На исти начин свело би се израчунавање те полиномијалне детерминанте $(n - 3)$-ћег степена на израчунавање једне полиномијалне детерминанте $(n-4)$-тог степена и тако би се редукцијом степена појединих полиномијалних детерминаната дошло најзад до ове полиномијалне детерминанте другог степена:

$$M_{n-2} = \begin{vmatrix} x & x \\ a_{n,n-1} & x \end{vmatrix},$$

па како је

$$\varDelta = (x - a_{21})M_1 = (x - a_{21})\,(x - a_{32})M_2 = \cdots$$
$$= (x - a_{21})\,(x - a_{32}) \cdots (x - a_{n-1,n-2})M_{n-2},$$

то је очевидно

$$\varDelta = x\,(x - a_{21})\,(x - a_{32}) \cdots (x - a_{n,n-1}).$$

Исти тај израз били бисмо добили, и да смо били узастопце развијали сваку полиномијалну детерминанту по елементима последње врсте, јер би у том случају поново минори свих елемената те врсте били равни нули, сем минорâ последња два елемента, који су, као што поменусмо, идентични

И тако смо доказали ову теорему:

Теорема. *Свака полиномијална детерминанта n-тога степена може се изразити производом од n чинитеља, а вредност њезина не зависи од вредности елемената, што се у доњој половини матрице те детерминанте налазе испод прве доње споредне дијагонале.*

Како међутим производ (2) не зависи од распореда својих чинитеља, то је јасно, *да се полиномијална детерминанта не ће никако променити, кад се у њој ма која два елемента доње споредне* *дијагонале узајамно смене*, што се у осталом може и непосредно доказати.

Тога ради претпоставићемо, да је

$$a_{31} = a_{41} = a_{42} = a_{51} = \cdots = a_{n,n-2} = x.$$

Тада ће поново бити

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x & x & \cdots & x & x \\ a_{21} & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_{32} & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_{43} & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n,n-1} & x \end{vmatrix}.$$

У тој детерминанти уочићемо елементе $a_{i,i-1}$ и $a_{k,k-1}$ $(i < k,\ k = 3, 4, \cdots (n-1))$. Ако се сад узајамно у у матрици те детерминанте размене најпре i-та и k-та врста, и затим $(i-1)$-ва и $(k-1)$-ва колона, онда детерминанта Δ не ће никако променити своју вредност. Та нова детерминанта биће међутим полиномијална детерминанта. Стога ћемо све елементе, што се у тој детерминанти буду јављали испод прве доње споредне дијагонале, моћи узастопце заменити елементима $a_{31}, a_{41}, a_{42}, a_{51}, \cdots a_{n,n-2}$ првобитне детерминанте Δ. Услед тога не ће се очевидно поново изменити вредност те детерминанте. Упоредивши сада ту детерминанту са првобитном детерминантом (1), видећемо, да је матрица те детерминанте постала из матрице детерминанте (1) узајамном разменом елемената $a_{i,i-1}$ и $a_{k,k-1}$. Пошто, као што утврдисмо, те две детерминанте имају исту вредност, то се види, да се заиста вредност полиномијалне детерминанте не ће променити, кад у њој ма која два елемента прве доње споредне дијагонале узајамно размене своја места.

Узмимо сада, да је у детерминанти (1)

$$x = a_{31} = a_{41} = a_{42} = a_{51} = \cdots = a_{n,n-2} = 1,$$

а

$$a_{21} = a_{32} = a_{43} = \cdots = a_{n,n-1} = -1.$$

Тада ће се та детерминанта преобразити у ову детерминанту:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

О тој детерминанти бавио се г. Студничка и нашао је [1]), да је вредност њезина 2^{n-1}, што се у осталом непосредно види по обрасцу (2).

Претпоставимо даље, да је

$$x = a,\ a_{21} = a_{32} = a_{43} = \cdots = a_{n,n-1} = -b,$$

а

[1]) **Studnička.** *Über eine neue Determinanteneigenschaft.* Sitzungsberichte der Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 1880. N. 7.

$$a_{31} = a_{41} = a_{42} = a_{51} = \cdots = a_{n,n-2} = 0.$$

Тада ће бити

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ -b & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & -b & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & -b & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a \end{vmatrix} = a\,(a+b)^{n-1},$$

а по томе се види, *да се n-ти степен бинома $a + b$ може изразити овом детерминантом $(n+1)$-вог степена:*

$$(a+b)^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -b & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & -b & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & -b & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Израз на левој страни последњег обрасца је *симетричан по писменима a и b*. Према томе *мора и детерминанта, што се јавља на десној страни тог обрасца, бити симетрична функција тих количина, а то ће рећи, да је*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -b & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & -b & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & -b & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a & b & b & \cdots & b & b \\ 0 & -a & b & \cdots & b & b \\ 0 & 0 & -a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & b \end{vmatrix}.$$

Заменимо даље у обрасцу (3) b са $-b$. Тада ћемо добити ово:

$$(a-b)^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & b & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix}. \tag{4}$$

∴ *Ако је последња детерминанта парнога степена, онда ће се знак тој детерминанти променити, али вредност не, кад се у матрици те детерминанте елементи a и b узајамно смене; а ако је та детерминанта непарнога степена, онда се поменутом разменом елемената не ће никако променити вредност детерминанте.*

Према томе је, на пример,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ 0 & a & b \end{vmatrix},$$

а

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & a & a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ 0 & a & b & b \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}.$$

Детерминанте (3) и (4) зваћу *биномијалним детерминантама* и бележићу их симболички са Δ_{n+1}. То значи, да ће са Δ_n бити означена једна од ових двеју детерминаната n-тога степена:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -b & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & -b & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & -b & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a \end{vmatrix},$$

или

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & b & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

У првом случају је

$$\Delta_n = (a+b)^{n-1},$$

а у другом је

$$\Delta_n = (a - b)^{n-1}.$$

Стога ће у првом случају бити

$$\Delta^i_n = (a + b)^{(n-1)i};$$

у другом случају је

$$\Delta^i_n = (a - b)^{(n-1)i},$$

а у оба случаја је

$$\Delta^i_n = \Delta_{(n-1)\,i+1}.$$

Отуда ова теорема:

Теорема. *Степен биномијалне детерминанте може се свакад изразити једном биномијалном детерминантом.*

Та особина биномијалних детерминаната могла би се очевидно према свему, што је мало час речено и доказано, и генерализирати тако, да би се она распростирала на све детерминанте овога типа:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_{21} & x & x & \cdots & x & x \\ a_{31} & a_{32} & x & \cdots & x & x \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & x \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Поменућемо само још то, да се детерминанта D може написати и у облику једне полиномијалне детерминанте. То се веома лако може потврдити.

Ако на име поново са Δ означимо полиномијалну детерминанту (1), онда је очевидно

$$xD = \Delta,$$

а чим се то има у виду, онда ће нам јасно бити, да детерминанта D такође не ће зависити од оних елемената, што се у матрици њезиној налазе испод елемената прве доње споредне дијагонале. Стога се сме написати ово:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_{21} & x & x & \cdots & x & x \\ a_{21} & a_{32} & x & \cdots & x & x \\ a_{21} & a_{42} & a_{43} & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & x \end{vmatrix}.$$

Одузмимо сад у матрици те детерминанте елементе прве колоне од наспрамних елемената друге, треће, $\cdots$ n-те колоне. Тада се не ће променити вредност детерминанте; биће дакле

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & x - a_{21} & x - a_{21} & \cdots & x - a_{21} & x - a_{21} \\ a_{21} & a_{32} - a_{21} & x - a_{21} & \cdots & x - a_{21} & x - a_{21} \\ a_{21} & a_{42} - a_{21} & a_{43} - a_{21} & \cdots & x - a_{21} & x - a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{n2} - a_{21} & a_{n3} - a_{21} & \cdots & a_{n,n-1} - a_{21} & x - a_{21} \end{vmatrix},$$

т. ј.

$$D = \begin{vmatrix} x - a_{21} & x - a_{21} & \cdots & x - a_{21} \\ a_{32} - a_{21} & x - a_{21} & \cdots & x - a_{21} \\ a_{42} - a_{21} & a_{43} - a_{21} & \cdots & x - a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} - a_{21} & a_{n3} - a_{21} & \cdots & x - a_{21} \end{vmatrix}$$

или, ако је

$$x - a_{21} = y,$$

$$D = \begin{vmatrix} y & y & \cdots & y \\ a_{32} - a_{21} & y & \cdots & y \\ a_{42} - a_{21} & a_{43} - a_{21} & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} - a_{21} & a_{n3} - a_{21} & \cdots & y \end{vmatrix}.$$

Та детерминанта је полиномијална детерминанта $(n-1)$-вог степена, а нуле алгебарског полинома, који она представља, су за a_{21} мање од нулâ онога полинома, који представља детерминанта (5).

Београд
15. септембра 1901. г.