О ЈЕДНОЈ ВАЖНОЈ ОСОБИНИ ДЕТЕРМИНАНАТА.

НАПИСАО

Д-р Богдан Гавриловић.

Нека је

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} . \qquad (1)$$

На главној дијагонали те детерминанте n- тога степена налазе се елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}, $\cdots a_{nn}$. Та главна дијагонала дели матрицу дате детерминанте на две поле: на горњу и доњу половину. У горњој половини су елементи a_{12}, a_{13}, $\cdots a_{1n}$, a_{23}, $\cdots a_{2n}$, $\cdots$ $a_{n-1, n}$, а у доњој су елементи a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, $\cdots$ $a_{n, n-1}$. Замислимо сад да смо преко елемената a_{12}, a_{13}, $\cdots a_{1n}$, a_{21}, a_{31}, $\cdots a_{n1}$ повукли праве линије правцем главне дијагонале. Тих правих биће свега $2(n-1)$, а на свакој таквој правој лежаће по неколико елемената дате детерминанте. Те праве зваћу заједно са главном дијагоналом просто *дијагоналама* матрициним, а све те дијагонале поделићу у разред *парних* и разред *непарних дијагонала: парне дијагонале биће главна дијагонала и све оне дијагонале што у горњој половини матрициној прелазе преко елемената* a_{13}, $a_{15}, \cdots a_{1,2i+1}, \cdots$, *а у доњој преко елемената* a_{31}, $a_{51}, \cdots a_{2i+1,1} \cdots$; *а непарним дијагоналама сваку дијагонале што у горњој половини матрициној прелазе преко елемената* a_{12}, $a_{14}, \cdots a_{1,2k}, \cdots$, *а у доњој преко елемената* a_{21}, $a_{41}, \cdots a_{2k,1}, \cdots$. Ако је дакле $r + s$ паран број, онда ће преко елемента a_{rs} прелазити парна дијагонала, а ако је $r + s$ непаран број, онда ће преко елемента a_{rs} прелазити непарна дијагонала. На пример, по правцу главне дијагонале имаће детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

три парне и две непарне дијагонале, а детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

три парне и четири непарне дијагонале. У опште ће у детерминаната парнога степена имати једна непарна дијагонала више него што има парних дијагонала, а детерминанте непарнога степена ће, обратно, имати једну парну дијагоналу више него што имају непарних дијагонала.

Узмимо сад *да је дата детерминанта* $\varDelta$ *парнога степена, па променимо знаке свима елементима парних дијагонала*. Тада ћемо добити ову детерминанту:

$$D = \begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} & -a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & a_{32} & -a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & a_{n3} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} . \qquad (2)$$

Да видимо сад како стоји та детерминанта D према првобитној детерминанти Δ. Упоредивши матрицу детерминанте (2) с матрицом детерминанте (1) видећемо, да се те две матрице разликују само знацима елемената означених било само непарним, било само парним казаљкама. Напротив имају елементи, уз које се јавља једна парна и једна непарна казаљка, исти знак и у једној и у другој детерминанти. Ако се дакле са r и s означе два непарна броја ($r, s = 1, 3, 5, \cdots n-1$), а са t и u два парна броја ($t, u = 2, 4, 6, \cdots n$), онда ће елементима a_{rs} и a_{tu} првобитне матрице (1) одговарати у детерминанти (2) елементи $-a_{rs}$ и $-a_{tu}$.

Означимо сад са $ijkl \cdots p$ неку пермутацију бројева $1, 2, 3, \cdots p$. Тада ћемо ма који члан у развијеном облику детерминанте Δ моћи изразити овим производом:

$$P = \pm a_{1i} a_{2j} a_{3k} a_{4l} \cdots a_{np},$$

а поменућемо само то, да је знак томе члану у детерминанти Δ потпуно одређен. Но према оном, што мало час рекосмо, биће јасно да ће се тај исти члан морати јављати и у развијеном облику детерминанте D. Питање је само још, да ли се у сваком посебном случају може одредити знак томе члану у развијеном облику детерминанте D?

Да бисмо решили то питање, поменућемо ово: 1-во, да у овај мах има у пермутацији $ijkl \cdots p$

исто онолико парних колико и непарних елемената и 2-го, да се члан, што у детерминанти D одговара члану P детерминанте Δ, добива чим се у производу

$$\pm\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}\, a_{4l} \cdots a_{np}$$

промени знак свима чинитељима означеним било само непарним, било само парним казаљкама.

Имајући то у виду решићемо нашу проблему овако. Узећемо да су казаљке $i, k, \cdots$ што се јављају уз непарне казаљке $1, 3, \cdots$ све од реда непарне. Како у пермутацији $i j k l \cdots p$ има исто онолико парних колико и непарних казаљака, то је јасно да ће бројеви $j, l, \cdots$ што се јављају уз парне казаљке $2, 4, \cdots$ морати бити у овај мах парни. У овај мах ће дакле члану P одговарати у детерминанти D овај члан:

$$p = \pm\,(-a_{1i} \cdot -a_{2j} \cdot -a_{3k} \cdot -a_{4l} \cdots -a_{np}) \cdot$$

Но како је n паран број, то ће бити

$$p = P.$$

Даље, узмимо да су казаљке $i,\ k, \cdots$ све од реда парне. Тада ће казаљке $j, l, \cdots$, што се јављају уз парне казаљке, бити све од реда непарне. Но како су елементи, уз које се јављају такe казаљке, у матрицама обеју детерминаната Δ и D једнаки, то је јасно, да ће у овај мах члану P детерминанте Δ одговарати члан

$$p = \pm\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}\, a_{4l} \cdots a_{np}\,;$$

т. ј. биће поново

$$p = P.$$

Најзад означимо са μ један од ових бројева:

$$\mu = 1, 2, 3, \cdots \frac{n}{2} - 1$$

и узмимо да се уз непарне казаљке 1, 3, $\cdots$ јавља свега на број μ парних казаљака $\left(\mu < \frac{n}{2}\right)$. Тада ће се уз остале непарне казаљке јављати свега $\frac{n}{2} - \mu$ непарних казаљака. То значи, да ће се уз парне казаљке 2, 4, $\cdots$ јављати у овај мах свега μ непарних, а $\frac{n}{2} - \mu$ парних казаљака. Према томе ће међу елементима

$$a_{1i}, a_{2j}, a_{3k}, a_{4l}, \cdots a_{np}$$

првобитне детерминанте Δ бити поново на број

$$2\left(\frac{n}{2} - \mu\right) = n - 2\mu$$

елемената, који ће имати или обе казаљке непарне, или обе казаљке парне. Но како је број $n - 2\mu$ паран, то ће поново морати бити

$$p = P.$$

Кад је дакле детерминанта Δ парнога степена, онда ће свакад члану

$$P = \pm a_{1i} a_{2j} a_{3k} a_{4l} \cdots a_{np}$$

детерминанте Δ одговарати тај исти члан и у развијеном облику детерминанте D, а то ће рећи да је

$$D = \Delta.$$

Добили смо дакле ову теорему:

Теорема I. *Кад се у матрици неке детерминанте парнога степена промене знаци свима елементима парних дијагонала, онда детерминанта никако не мења своју вредност.*

На пример, детерминанте

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(2m-1)!} & \frac{1}{(2m)!} \\ 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(2m-2)!} & \frac{1}{(2m-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(2m-3)!} & \frac{1}{(2m-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

и

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & -\frac{1}{3!} & \cdots & -\frac{1}{(2m-1)!} & \frac{1}{(2m)!} \\ 1 & -\frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(2m-2)!} & -\frac{1}{(2m-1)!} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{1!} & \cdots & -\frac{1}{(2m-3)!} & \frac{1}{(2m-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

су једнаке, а вредност њихова је

$$\varDelta = D = \frac{1}{(2m)!}.$$

Пођимо сад даље и узмимо поново да је *детерминанта $\varDelta$ парнога степена, па променимо у њезиној* *матрици знаке свима елементима непарних дијагонала.* Тада ћемо добити ову детерминанту:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Пита се сад, како стоји детерминанта D' према првобитној детерминанти Δ? На то питање моћи ћемо, као што ћемо одмах видети, врло лако одговорити. Помножимо само прву, другу, трећу, $\cdots$ n-ту врсту матрице (3) са -1. Тада ћемо добити једну детерминанту, чија ће матрица бити потпуно идентична с матрицом детерминанте D. Но како је детерминанта D' парнога степена, то се вредност њезина никако не ће променити услед поменуте измене у знацима њезиних елемената. То значи да је

$$D' = D.$$

Мало час смо међутим доказали да је

$$D = \Delta.$$

Стога је и

$$D' = \Delta,$$

а отуда ова теорема:

Теорема II. *Детерминанта парнога степена не мења никако своју вредност, кад се у матрици њезиној промене знаци свима елементима њезиних непарних дијагонала.*

Узмимо сада *да је дата детерминанта* Δ *непарнога степена, па променимо у матрици њезиној знаке свима елементима парних дијагонала.* Тада ћемо добити ову детерминанту:

$$D = \begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{31} & a_{32} & -a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

а како ће та детерминанта стајати према детерминанти Δ, то ћемо уочити овако. Означивши поново са $i\,j\,k\,l \cdots p$ неку пермутацију бројева $1, 2, 3, \cdots p$ моћи ћемо ма који члан у развијеном облику детерминанте Δ овако изразити:

$$P = \pm\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}\, a_{4l} \cdots a_{np}.$$

Не водећи рачуна о знаку, можемо одмах рећи да ће тај члан бити уједно и члан детерминанте D, а какав ће знак тај члан имати у детерминанти D, то ћемо овако одредити.

У овај мах има у члану P елемената, којима је прва казаљка паран број, свега $\frac{n-1}{2}$, а елемената, којима је прва казаљка непаран број, има свега $\frac{n+1}{2}$. Исто тако има у пермутацији $i\,j\,k\,l \cdots p$ свега $\frac{n-1}{2}$ парних, а $\frac{n+1}{2}$ непарних бројева.

Означимо сад са μ један од ових бројева:

$$\mu = 0, 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}$$

и претпоставимо да се уз непарне казаљке 1, 3, $\cdots$ јавља свега на број μ парних казаљака. Тада ће се уз остале непарне казаљке јављати свега $\frac{n+1}{2} - \mu$ непарних казаљака. Према томе ће се уз парне казаљке 2, 4, $\cdots$ јављати свега $\frac{n-1}{2} - \mu$ парних и свега μ непарних казаљака. То значи да међу елементима

$$a_{1i},\ a_{2j},\ a_{3k},\ a_{4l},\ \cdots\ a_{np}$$

детерминанте Δ има свега на број

$$\left(\frac{n+1}{2} - \mu\right) + \left(\frac{n-1}{2} - \mu\right) = n - 2\mu$$

елемената, што имају или обе казаљке непарне, или обе казаљке парне, а не треба сметати с ума да се само тим елементима и мења знак у матрици првобитне детерминанте. Но како је број $n - 2\mu$ непаран и кад је μ паран, и кад је μ непаран број, то је јасно да је у овај мах

$$p = -P,$$

а по томе се види, да ће сваком члану

$$\pm\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}\, a_{4l} \cdots a_{np}$$

детерминанте Δ одговарати у развијеном облику детерминанте D члан

$$\mp\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}\, a_{4l} \cdots a_{np},$$

што ће рећи да је у овај мах

$$D = -\Delta.$$

Отуда ова теорема:

Теорема III. *Кад се у матрици неке детерминанте непарног степена промене знаци свима елементима парних дијагонала, онда се знак тој детерминанти мења, а вредност не мења.*

На пример, детерминанте

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(2m-2)!} & \frac{1}{(2m-1)!} \\ 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(2m-3)!} & \frac{1}{(2m-2)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(2m-4)!} & \frac{1}{(2m-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

и

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & -\frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(2m-2)!} & -\frac{1}{(2m-1)!} \\ 1 & -\frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & -\frac{1}{(2m-3)!} & \frac{1}{(2m-2)!} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(2m-4)!} & -\frac{1}{(2m-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

су по апсолутној вредности једнаке, али се алгебарски разликују, јер је

$$\Delta = \frac{1}{(2m-1)!},$$

а

$$D = -\frac{1}{(2m-1)!}.$$

Променимо сада у матрици неке детерминанте непарнога степена знаке свима елементима непарних дијагонала. Тада ћемо добити ову детерминанту:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Помножимо елементе свих врста те детерминанте са -1. Тада ће се детерминанта D' преобразити у детерминанту (4), т. ј. у детерминанту D. Та детерминанта D' је међутим непарног степена. С тога ће се услед поменуте измене у знацима њезиних елемената променити знак детерминанти D'. То значи да је

$$D' = -D,$$

па како је

$$D = -\Delta,$$

биће јасно да је

$$D' = \Delta.$$

Добили смо дакле ову теорему:

Теорема IV. *Кад се у матрици неке детерминанте непарнога степена промене знаци свима елементима непарних дијагонала, онда детерминанта никако не мења своју вредност.*

Детерминанте (2), (3), (4) и (5) добиле би се, као што се јасно види, из матрице првобитне детерминанте Δ и кад би се у овој мењали знаци правцем споредне дијагонале. Стога о дијагоналама, повученим у том правцу, и о елементима који се на њима налазе, не ћемо ни водити рачуна, а све досад поменуте теореме моћи ћемо обухватити овом једном општом, основном теоремом:

Теорема. *Кад се у матрици неке детерминанте промене знаци свима елементима главне дијагонале и свима елементима осталих парних дијагонала, онда детерминанта никако не ће променити своју вредност ако јој је степен био паран, а промениће само свој знак, ако јој је степен био непаран; а ако се промене знаци свима елементима непарних дијагонала, онда никако не ће променити своју вредност нити детерминанта парнога, нити детерминанта непарнога степена.*

Пођимо даље и запитајмо се, како стоје кофактори елемената дате детерминанте $\Delta = |a_{1n}|$ према кофакторима елемената трансформованих детерминаната. Да бисмо на то питање одговорили, означићемо кофактор елемента a_{ik} у детерминанти $|a_{1n}|$ са A_{ik}, а кофактор елемента $\pm a_{ik}$ у трансформованој детерминанти D са α_{ik}.

Уочимо сад ову детерминанту:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\,k-1} & a_{1k} & a_{1,\,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,\,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,\,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ik} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,\,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,\,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,\,k-1} & a_{nk} & a_{n,\,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Та детерминанта стоји у врло тесној вези са детерминантом $\varDelta$, а на први поглед види се да је кофактор њезиног елемента a_{ik} исти онакав, какав је и кофактор елемената a_{ik} у првобитној детерминанти $\varDelta$. Стога ће бити

$$\varDelta' = a_{ik} A_{ik}.$$

Кад бисмо сад у матрици те детерминанте $\varDelta'$ променили било знаке елементима парних, било знаке елементима непарних дијагонала, онда бисмо уз ту детерминанту $\varDelta'$ у сваком таквом случају добили по једну нову детерминанту. Ту детерминанту означићемо са D'. Упоредивши кофактор елемента $\pm a_{ik}$ у првобитној трансформованој детерминанти D с кофактором тог истог елемента у новој трансформованој детерминанти D', видећемо да су ти кофактори потпуно једнаки.

Према свему томе може се тврдити ово: кад се мењају знаци елемената парних дијагонала, онда је

$$D' = (-1)^{i+k-1} \quad a_{ik}\, \alpha_{ik},$$

а кад се, обратно, мењају знаци елемената непарних дијагонала, онда је

$$D' = (-1)^{i+k} \; a_{ik}\, \alpha_{ik}.$$

Стога ће у првом случају бити

$$\frac{\varDelta'}{D'} = (-1)^{i+k-1} \frac{A_{ik}}{\alpha_{ik}}, \tag{6}$$

а у другом

$$\frac{\varDelta'}{D'} = (-1)^{i+k} \frac{A_{ik}}{\alpha_{ik}}. \tag{7}$$

Уочимо сад ова два случаја:

1-во. *Нека је детерминанта Δ парнога степена.* — Тада ће и детерминанта Δ' бити парнога степена. Према нашој основној теореми биће дакле

$$\Delta' = D'.$$

∴ Кад се у детерминанти парнога степена промене знаци елемената парних дијагонала, онда ће по обрасцу (6) морати бити

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k-1} A_{ik}$$

и, обратно, кад се у тим детерминантама промене знаци елементима непарних дијагонала, онда ће по обрасцу (7) морати бити

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k} A_{ik}.$$

Доказали смо дакле ову теорему:

Теорема. *Кад се у матрици неке детерминанте Δ парнога степена промене знаци или свима елементима парних, или свима елементима непарних дијагонала, онда се кофактор α_{ik} елемента $\pm a_{ik}$ трансформоване детерминанте добива, кад се кофактор A_{ik} елемента a_{ik} првобитне детерминанте помножи у првом случају модулом $(-1)^{i+k-1}$, а у другом модулом $(-1)^{i+k}$.*

На пример, кад се у детерминанти $\Delta = |a_{14}|$ промене знаци елемената парних дијагонала, онда је

$$|\alpha_{14}| = \begin{vmatrix} -A_{11} & A_{12} & -A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & -A_{22} & A_{23} & -A_{24} \\ -A_{31} & A_{32} & -A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & -A_{42} & A_{43} & -A_{44} \end{vmatrix}.$$

У супротном случају је

$$|\alpha_{14}| = \begin{vmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} & -A_{14} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} & -A_{34} \\ -A_{41} & A_{42} & -A_{43} & A_{44} \end{vmatrix},$$

а у оба случаја је према нашој основној теореми

$$|\alpha_{14}| = |A_{14}|.$$

У опште је, разуме се,

$$|\alpha_{1n}| = |A_{1n}|.$$

2-го. *Нека је детерминанта Δ непарнога степена.* — Тада ће и детерминанта Δ' бити непарног степена. Ако сад у тој детерминанти променимо знаке елементима парних дијагонала, онда ће према нашој основној теореми бити

$$\Delta' = -D',$$

а ако се у детерминанти Δ' промене знаци елемената непарних дијагонала, онда ће према тој теореми бити

$$\Delta' = D'.$$

По обрасцу (6) и по обрасцу (7) биће дакле и у једном и у другом случају

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k} A_{ik},$$

а тим обрасцем је формулисана ова теорема:

Теорема. *Кад се у матрици неке детерминанте непарног степена промене знаци било свима елементима парних, било свима елементима непарних дијагонала, онда се кофактор α_{ik} елемента $\pm a_{ik}$ транс-*

формоване детерминанте добива, кад се кофактор A_{ik} елемента a_{ik} првобитне детерминанте и у једном и у другом случају помножи модулом $(-1)^{i+k}$.

На пример, кад се у детерминанти $\Delta = |a_{13}|$ промене било знаци елемената парних, било знаци елемената непарних дијагонала, онда ће у оба случаја бити

$$|\alpha_{13}| = \begin{vmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = |A_{13}|.$$

У опште је и у овај мах

$$|\alpha_{1n}| = |A_{1n}|.$$

Кад се дакле мењају знаци елементима парних или непарних дијагонала било у матрицама детерминаната парнога, било у матрицама детерминаната непарнога степена, онда је свакад адјунгована детерминанта трансформоване детерминанте идентична с адјунгованом детерминантом првобитне детерминанте. Тај закључак је у осталом и непосредна логичка последица наше основне и друге једне у теорији адјунгованих детерминаната познате и важне теореме.

Београд
15. маја 1900. г.