О ПОЛАРНО-КОЊУГОВАНИМ ТРАНСФОРМАЦИЈАМА.

НАПИСАО

Др. Богдан Гавриловић.

Узећу два конична пресека. Пунктуалне еквације тих пресека нека су ово:

$$S_1 \equiv a_x^2 = 0, \quad S_2 \equiv b_x^2 = 0.$$

Та два пресека сећи ће се у четири тачке, а сви конични пресеци што пролазе кроз те четири тачке одређиваће један пунктуалан прамен коничних пресека. Тај прамен ћу често звати праменом (S_1S_2), а еквација сваког пресека тога прамена је у опште овог облика:

$$S_1 + kS_2 = 0.$$

Између тих пресека изметнуће се у систему двеју правих свега три пресека. Те праве биће, као што се зна, заједничке секанте кривих прамена (S_1S_2): то ће бити коњуговане стране оног тетрастигмата, чија су темена четири заједничке тачке A, B, C, D основних коничних пресека S_1 и S_2.

Означимо сад делимични извод функције S_i по промењивој x_k са $S_i^{(k)}$, па нека је

$$P_1 \equiv S_1^{(1)} y_1 + S_1^{(2)} y_2 + S_1^{(3)} y_3 = 0,$$

а

$$P_2 \equiv S_2^{(1)} y_1 + S_2^{(2)} y_2 + S_2^{(3)} y_3 = 0.$$

Те две еквације представљају две потпуно оређене поларе: прва полару неке тачке $P(x_1, x_2, x_3)$ према основном пресеку S_1 поменутог пунктуалног прамена, а друга полару те исте тачке према основном пресеку S_2 тога прамена. Сем тога ће еквација

$$P_1 + kP_2 \doteq 0$$

представљати полару те исте тачке P према пресеку, који је у прамену $(S_1 S_2)$ одређен параметром k. Тих полара има бесконачно много, али ће се оне све сећи у једној тачци: у оној тачци Q, у којој се секу поларе P_1 и P_2. Исто ће тако тачци Q као полу одговарати у прамену $(S_1 S_2)$ бесконачно много полара, а све те поларе сећи ће се у тачци P. Те тачке P и Q биће дакле коњуговани полови према прамену $(S_1 S_2)$. Ако сад права PQ сѐче један пресек прамена $(S_1 S_2)$ у тачкама a и α, други један пресек у тачкама b и β, трећи у тачкама c и γ и т. д., онда ће према Десарговој теореми ти пресеци на правој PQ одређивати инволуцију

$$(a\alpha,\ b\beta;\ c\gamma,\ \cdots),$$

па како су двојне напремице $(PQa\alpha)$, $(PQb\beta)$, $(PQc\gamma)$, $\cdots$ једнаке, а уз то хармонијске:

$$(PQa\alpha) = (PQb\beta) = (PQc\gamma) = \cdots = -1,$$

то ће тачке P и Q бити двојне тачке поменуте инволуције. По томе се види, да су тачке P и Q према прамену $(S_1 S_2)$ у сасвим одређеном сродству.

Познато је, да се Штајнер[1]) много бавио о томе сродству и Штајнер је сам показао, како се помоћу тог сродства могу испитивати особине алгебарских кривих. Поменућу још и ово: 1-во, да је то сродство потпуно утврђено тек кад се знају четири заједничке тачке A, B, C, D пресекâ S_1 и S_2; 2-го, да у опште по томе сродству свакој тачци одговара само једна једина тачка у равни. Но у овоме има и изузетака, а то се види по овоме. Сви пресеци прамена (S_1S_2) имају један заједнички аутополаран троугао; то ће бити дијагоналан троугао тетрастигмата $ABCD$. Све тачке ма које стране тог аутополарног троугла биће коњуговане са оним теменом тога троугла, које лежи према тој страни[2]). Стога су коњуговане тачке теменâ аутополарног троугла неодређене.

Како се у тачци $Q(y_1, y_2, y_3)$ секу поларе P_1 и P_2, то ће бити

$$y_1 : y_2 : y_3 = \begin{vmatrix} S_1^{(2)} & S_1^{(3)} \\ S_2^{(2)} & S_2^{(3)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} S_1^{(3)} & S_1^{(1)} \\ S_2^{(3)} & S_2^{(1)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} S_1^{(1)} & S_1^{(2)} \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} \end{vmatrix}$$

и тим напремицама било би поменуто Штајнерово сродство алгебарски утврђено: оно је рационално сродство другога степена. Ако се дакле нека тачка (y_1, y_2, y_3) буде кретала по правој

---

[1]) **Steiner.** *Systemat. Entwickelung der Abhängigkeit geom. Gestalten* etc. Werke t. I. p. 417.

[2]) **Schröter.** *Theorie der Kegelschnitte*, p. 301.

$$A_1 \equiv u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 = 0,$$

онда ће тачка (x_1, x_2, x_3) описати овај коничан пресек:

$$N_1 \equiv \begin{vmatrix} S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Тај пресек ће пролазити кроз три дијагоналне тачке тетрастигмата $ABCD$ и још кроз других осам потпуно одређених тачака *(eleven point conic)*[1], а облик N_1 биће једна од двадесет познатих Горданових конкомитаната[2].

Исто ће се тако нека друга права

$$A_2 \equiv v_1y_1 + v_2y_2 + v_3y_3 = 0$$

том трансформацијом преобразити у пресек

$$N_2 \equiv \begin{vmatrix} S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

тако, да ће се прамен

$$A_1 + kA_2 = 0$$

правих Штајнеровом трансформацијом преобразити у пунктуалан прамен

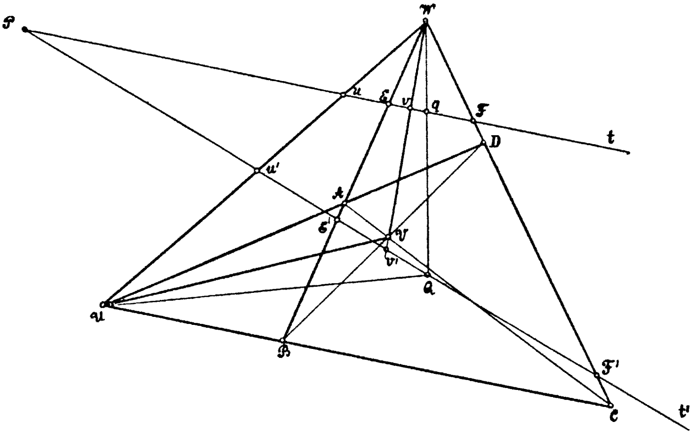
$$N_1 + kN_n = 0$$

---

[1] **John Wellesley Russell.** *Pure Geometry*, 1893. p. 211.

[2] Види моју *Аналитичну Геометрију*, св. II. p. 909.

коничних пресека. Ако је дакле тачка Q теме прамена (A_1A_2), онда ће темена изведеног прамена (N_1N_2), бити ове четири тачке: тачка P у којој се секу поларе тачке Q и три дијагоналне тачке U, V, W тетрастигмата $ABCD$.



Сл. 1.

Узмимо сад три тачке U, V, W и претпоставимо, да те тачке нису колинеарне. Те тачке могли бисмо сматрати као три темена неког дијагоналног троугла. Јасно је да има бесконачно много тетрастигмата, којима би троугао UVW могао бити дијагоналан троугао. Али ако сем тачака U, V, W узмемо још две тачке P и Q, и ако претпоставимо да су те тачке коњуговани полови, онда ћемо доказати *да има само један једини тетрастигмат према коме ће тачке U, V, W бити дијагоналне тачке, а тачке P и Q коњуговани полови.*

Да бих то доказао, мораћу пре тога доказати ову теорему:

Теорема. *Ако су две тачке коњуговани полови према неком тетрастигмату, онда ће свака права,* *која пролази кроз једну од тих двеју тачака сећи две супротне стране тетрастигмата у двојним тачкама једне потпуно одређене инволуције.*

Нека су (сл. 1.) тачке P и Q коњуговани полови, па повуцимо кроз P трансверзалу Pt. Та трансверзала сече супротне стране AB и CD тетрастигмата $ABCD$ у тачкама E и F, дијагоналу WU у тачци u, дијагоналу WV у тачци v, а праву WQ у тачци q. Сем те трансверзале Pt повући ћемо и трансверзалу Pt' и добићемо на тој трансверзали низ тачака P, u', E', v', Q, F'. Но како су тачке P и Q коњуговани полови, то ће бити

$$(E'F'PQ) = -1.$$

С друге стране су опет и тачке u' и v' хармонијски коњуговане према тачкама E' и F', па је стога и

$$(E'F'u'v') = -1.$$

То значи, да су тачке E' и F' већ двојне тачке инволуције $(PQ, u'v')$. Но како је очевидно

$$(E'F'PQ) = (EFPq)$$

а

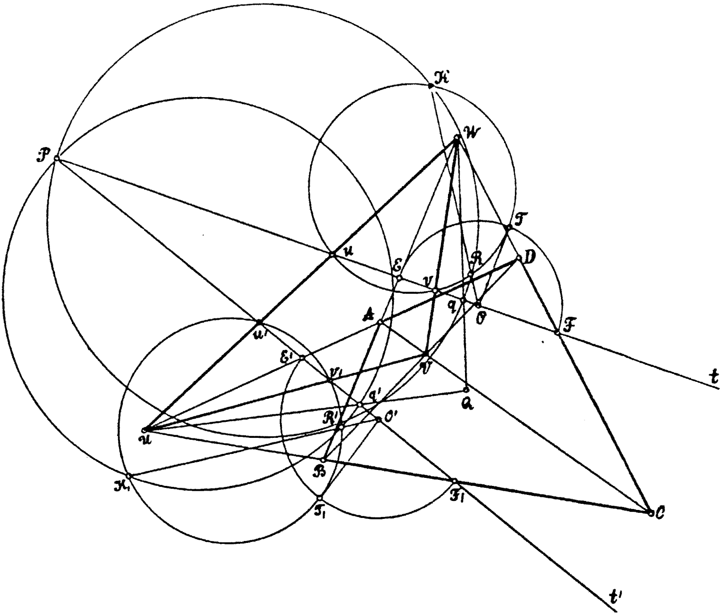
$$(E'F'u'v') = (EFuv),$$

то ће бити и

$$(EFPq) = (EFuv) = -1,$$

а то ће рећи да су и тачке E и F двојне тачке одређене инволуције (Pq, uv). Тим смо доказали оно, што смо тврдили.

Према томе ћемо лако доказати, да је тетрастигмат *ABCD* потпуно одређен чим се знају две коњуговане тачке и сва три темена дијагоналног троугла.



Сл. 2.

Узмимо на име да су (сл. 2.) тачке *U*, *V*, *W* темена дијагоналног троугла, а тачке *P* и *Q* коњуговани полови, па повуцимо ма у ком правцу трансверзалу *Pt*. Та трансверзала ће сећи зраке прамена *W*(*PQUV*) у тачкама (*Pquv*). Тада ће према мало час поменутој теореми тачке (*Pq*, *uv*) одређивати једну инволуцију. Двојне тачке те инволуције биће тачке *E* и *F*, и те тачке ће већ морати лежати на оним двема супротним странама тетрастигмата *ABCD*, које се секу у дијагоналној тачци *W*. Праве *WE* и *WF* биће према томе већ две стране тетрастигмата *ABCD*.

Повуцимо даље још и трансверзалу Pt'. Та трансверзала ће сећи зраке прамена $U(PQWV)$ у тачкама $(Pq'u'v')$. Те тачке одређују инволуцију $(Pq', u'v')$, а двојне тачке E' и F' те инволуције лежаће на оним двема супротним странама тетрастигмата $ABCD$, које се секу у дијагоналној тачци U. Тим смо добили још две стране UE' и UF' тетрастигмата $ABCD$. Те четири праве WE, WF, UE', UF' одређују међутим темена A, B, C, D само једном тетрастигмату, а тим смо доказали оно, што смо и тврдили.

Опишимо сад око тачака U, V, W и P један коничан пресек. Ако су поново са P и Q означени коњуговани полови, а са U, V, W темена дијагоналног троугла, онда ће тетрастигмат $ABCD$ бити потпуно одређен, *па ће према томе бити одређена и она права, из које је поларно коњугованом трансформацијом постао коничан пресек* $UVWP$. Но како у томе сродству може с тачком P бити ма која тачка у равни, то је јасно, *да ће у равни бити у опште бесконачно много правих, које ће се преобразити у један једини сталан коничан пресек* $UVWP$.

Кад је пресек $UVWP$ нацртан, и кад се зна, да је тачка Q коњугована с тачком P, онда се права, из које је постао тај пресек, одређује овако. Пресек $UVWP$ сећи ће страну AD тетрастигмата $ABCD$ у некој тачци R и у дијагоналној тачци U. На страни AD биће очевидно само једна тачка хармонијски коњугована с тачком R према тачкама A и D. Ту тачку ћемо означити са S. Тада ће QS бити она права, из које је поларно коњугованом трансформацијом постао пресек $UVWP$.

Уочимо сад ова два прамена правих линија:

$$A_1 + kA_2 = 0, \quad A_1' + kA_2' = 0.$$

Та два прамена, као два пројективна прамена, образоваће један коничан пресек $S = 0$. С друге стране ће се прамен

$$A_1 + kA_2 = 0$$

Штајнеровом трансформацијом преобразити у пунктуалан прамен

$$S_1 + kS_2 = 0$$

коничних пресека, а прамен

$$A_1' + kA_2' = 0$$

у прамен

$$S_1' + kS_2' = 0$$

коничних пресека. Ако прамене

$$S_1 + kS_2 = 0, \quad S_1' + kS_2' = 0$$

будемо сматрали као пројективне, онда ће очевидно место тачака, у којима се секу спрегнути пресеци та два прамена, бити једна крива четвртога реда. Еквација те криве је

$$S_1S_2' - S_2S_1' = 0.$$

Но као што поларно коњугованом трансформацијом постаје из праве коничан пресек, исто тако том трансформацијом постаје из коничног пресека једна одређена крива четвртога реда. Претпоставимо дакле, да се том трансформацијом пресек $S = 0$ изменио у криву

$$K = 0$$

четвртога реда. Тада се може доказати, *да еквације*

$$K = 0 \quad и \quad S_1S_2' - S_2S_1' = 0$$

представљају једну и исту криву четвртога реда. — Крива $K = 0$ мора на име пролазити кроз дијагоналне тачке U, V, W[1], а и пресеци $S_1 + kS_2 = 0$ и $S_1' + kS_2' = 0$ пролазе кроз те три тачке. Сем тога се ти пресеци секу још у једној тачци P. Та тачка P је међутим коњугована с оном тачком Q, у којој се секу спрегнути зраци $A_1 + kA_2 = 0$ и $A_1' + kA_2' = 0$, а тим је доказано оно, што смо тврдили.

Вратимо се сад поново оном коничном пресеку, који поларно коњугованом трансформацијом постаје из неке дате праве (uvw) и запитајмо се, *у којима ће тачкама тај пресек сећи ту праву.*

Да бисмо одговорили на то питање, претпоставићемо да права (uvw) пролази кроз тачку Q и да је с том тачком према прамену $S_1 + kS_2 = 0$ коњугована тачка P. Тада ће према Десарговој теореми тачке P и Q бити двојне тачке инволуције тачака, у којима трансверзала PQ сече прамен $S_1 + kS_2 = 0$. С друге стране ће опет очевидно свака крива изведеног прамена $N_1 + kN_2 = 0$ сећи трансверзалу PQ у двема тачкама; у томе прамену $N_1 + kN_2 = 0$ је и онај пресек, о коме је у овај мах реч, и *тај ће пресек*, као што ћемо одмах доказати, *сећи трансверзалу PQ баш у двојним тачкама P и Q поменуте инволуције.* Сви пресеци изведеног прамена пролазиће на име кроз дијагоналне тачке U, V, W и сем тога кроз коњугован пол P, али ће између тих пресека само један једини пролазити и кроз тачку Q и тај је пресек место полова праве PQ према свима пресецима прамена $S_1 + kS_2 = 0$, т. ј. тај пресек је управо лик праве

---

[1] **Durège.** *Curven dritter Ordnung*, p. 125.

PQ. Што вреди за праву PQ, вредиће, разуме се, у опште ма за коју другу праву у равни. *Свака таква права измениће се поларно коњугованом трансформацијом у један потпуно одређен коничан пресек, који ће ту праву сећи у двојним тачкама оне инволуције, коју на тој правој одређује првобитни прамен* $S_1 + kS_2 = 0$.

То правило применићемо одмах и добићемо веома важне резултате. Тога ради претпоставићемо, да су нам дата два пројективна прамена — један прамен правих и један пунктуалан прамен коничних пресека. Онај први прамен зваћу *линеарним праменом*, а онај други *квадратним праменом.* Тада ће, као што је познато, место тачака, у којима некакав елеменат линеарног прамена сече онај елеменат квадратног прамена који му по пројективном сродству одговара, бити једна крива трећега реда. Та крива ће пролазити кроз теме линеарног прамена и кроз четири заједничке основне тачке квадратног прамена, а то ће рећи кроз четири темена оног тетрастигмата, који одређују заједничке тачке свих коничних пресека тога прамена. Ако је на име

$$A_1 + kA_2 = 0$$

еквација првога, а

$$S_1 + kS_2 = 0$$

еквација другога прамена, онда ће еквација поменуте криве трећега реда бити ово:

$$A_1S_2 - A_2S_1 = 0.$$

Та се еквација[1] сматра као основна еквација у теорији пројективних особина кривих линија трећега реда, а према свему, што досад поменусмо, одредићемо изближе ту криву овако.

Написаћемо Ламеову еквацију, која одговара датом пунктуалном прамену коничних пресека:

$$\Delta + k\Theta_1 + k^2\Theta_2 + k^3\Delta' = 0.$$

Ако су сад k_1, k_2, k_3 корени те еквације, онда ће коњуговане заједничке секанте прамена $S_1 + kS_2 = 0$ бити тачно аналитички одређене овом системом еквација:

$$S_1 + k_1S_2 = 0,\quad S_1 + k_2S_2 = 0,\quad S_1 + k_3S_2 = 0,$$

и тада ће очевидно бити потпуно одређене и четири основне тачке оног тетрастигмата, кроз које пролазе сви пресеци датога прамена. Те четири тачке означићу са U, V, W, P. Даље, нацртаћу и прамен $A_1 + kA_2 = 0$ правих линија и *претпоставићу, да је прамен* (S_1S_2) *коничних пресека поларно коњугованом трансформацијом изведен из линеарног прамена* (A_1A_2). *Тога ради ћу сматрати тачке* U, V, W *за дијагоналне тачке неког тетрастигмата и узећу, да је тачка* P *коњугована са теменом* Q *прамена* (A_1A_2). Тада ће том дијагоналном троуглу UVW одговарати један потпуно одређен тетрастигмат $ABCD$. Тај тетрастигмат биће у неку руку *поларно коњугован тетрастигмат* квадратног прамена (S_1S_2) према линеарном прамену (A_1A_2) или, *recte*, према његову темену Q, и тако ћу га ја и звати. Према ономе, што сам доказао, може се сад одредити не само тај поларно коњуговани

---

[1] **Durège.** l. c. p. 138.

тетрастигмат $ABCD$ према коме ће тачке P и Q бити коњуговани полови и уз који ће се прамен (A_1A_2) и преобразити у прамен (S_1S_2), већ ће се моћи тачно одредити и онај зрак прамена (A_1A_2), из кога је поларно коњугованом трансформацијом изведен ма који коничан пресек прамена (S_1S_2). Тада ћемо одређивати тачке поменуте криве трећега реда овако. Повући ћемо из темена Q ма у ком правцу један зрак. Тај зрак сећи ће наспрамне стране AD и BC поларног тетрастигмата у тачкама a и a', а наспрамне стране AB и DC у тачкама b и b'. Те тачке одређују на поменутом зраку инволуцију (aa', bb'): *двојне тачке те инволуције биће две тачке криве трећега реда*, а те две тачке могу се, као што је познато, лако одредити. И тако ће сваком зраку линеарног прамена (A_1A_2) одговарати две двојне тачке. Кад је инволуција хиперболична, онда ће те две тачке бити различите и реалне; кад је инволуција параболична, онда ће те тачке бити поново реалне, али не ће бити различите, па ће с тога *зраци, на којима пресеци прамена (S_1S_2) одређују параболичну инволуцију, бити тангенте криве линије трећега реда.* Напротив, кад је инволуција елиптична, онда су двојне тачке имагинарне, т. ј. онда зрак прамена (A_1A_2) не ће сећи онај коничан пресек прамена (S_1S_2), који је из тога зрака изведен поларно коњугованом трансформацијом. Добили смо дакле ову теорему:

Теорема. *Крива линија трећега реда јесте као творевина двеју пројективних слика — једног линеарног и једног квадратног пунктуалног прамена — место двојних тачака потпуно одређених инволуторних низова; носиље тих низова пролазе кроз теме линеарног прамена, а саму инволуцију одређују тачке, у којима ма која права линеарног прамена сече су-*

протне стране поларно коњугованог тетрастигмата квадратног пунктуалног прамена.

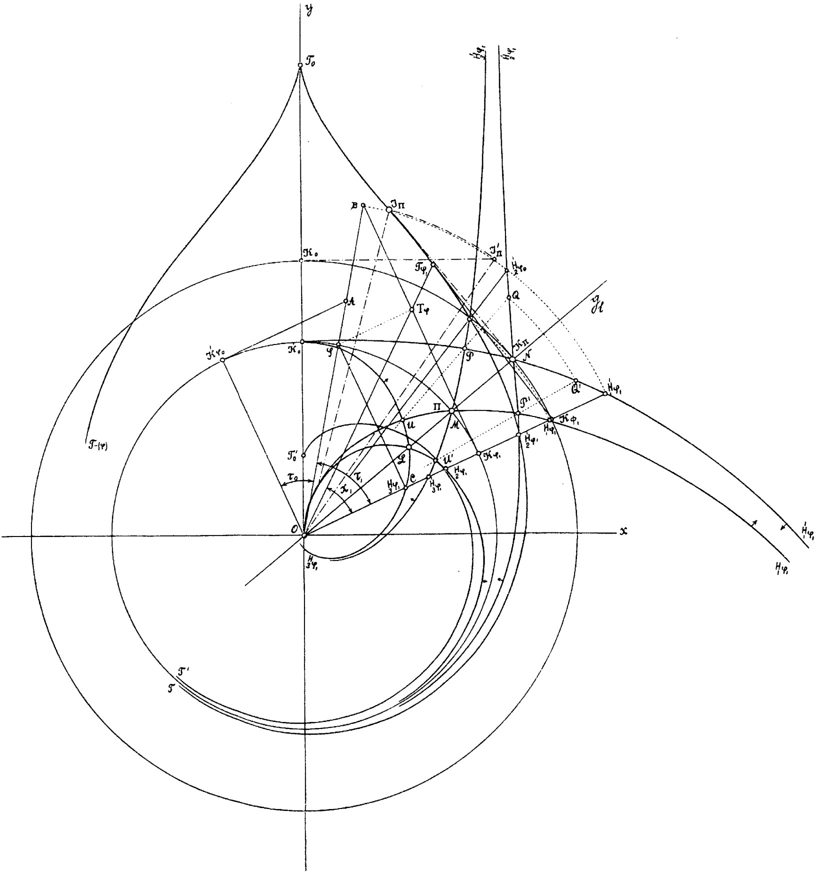
Тој теореми одговара по начелу корелације ова теорема:

Теорема. *Крива линија треће врсте јесте као творевина двеју пројективних слика — једног линеарног низа и једног квадратног тангенцијалног прамена — обвојница двојних зракова потпуно одређених инволуторних праменова; темена тих праменова леже на носиљи линеарнога низа, а саму инволуцију одређују зраци, што спајају ма коју тачку линеарног низа са супротним теменима поларно коњугованог тетраграма квадратног тангенцијалног прамена.*

Кад се тако схвате криве линије трећега реда, онда се по самим пројективним особинама поларно коњугованог тетрастигмата, које се поменутим трансформацијама ни у чему не ремете, види, да ће те криве морати пролазити кроз коњуговане тачке P и Q и сем тога и кроз дијагоналне тачке U, V, W тога тетрастигмата.

Обратно, по начелу корелације, а и по хармонијским особинама поларно коњугованог тетраграма, могли бисмо опет без даљег доказивања тврдити, да ће криве линије треће врсте морати додиривати коњуговане поларе p и q и дијагонале u, v, w тога тетраграма.

Београд
15. маја 1901. г.



y
T₀
$H'_1\varphi_1$
$H'_2\varphi_1$
B
Tπ
T'π
K₀
$H'_2\varphi_0$
Tφ₁
A
Tφ
Q
𝒢ℋ
K'₀
K'φ₀
φ
P
Kπ
N
Q'
H'φ₁
Π
P'
M
Kφ₁
$H_1\varphi_1$
U
$H'_2\varphi_1$
T'₀
L
U'
Kφ₁
$H_2\varphi_1$
τ₀
τ₁
x₁
$H_3\varphi_1$
C
$H'_3\varphi_1$
T-(φ)
O
x
$H_3\varphi_1$
$H'_1\varphi_1$
$H_1\varphi_1$
T'
T