О АНАЛИТИЧКИМ ИЗРАЗИМА НЕКИХ ФУНКЦИЈА.

написао Др. Богдан Гавриловић.

Са $f(z)$ и $g(z)$ означићу две једногране функције и претпоставићу да су те функције холоморфне у околини неке тачке a. Тада ће се те функције моћи развити у ред по Телорову обрасцу. Биће дакле

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots, \tag{1}$$

$$g(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots. \tag{2}$$

Први ред конвергираће у области ограниченој периферијом неког круга C, а други у области ограниченој периферијом круга C'. Ти кругови C и C' су концентрични, а средиште им је тачка a. Кад се $f(z)$ помножи са $g(z)$, добиће се нека нова функција $h(z)$:

$$h(z) = f(z)\,g(z).$$

Та функција $h(z)$ биће такођер холоморфна, јер се по познатој једној теореми Кошијевој $h(z)$ може овако изразити:

$$h(z) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(z-a)$$
$$+ (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(z-a)^2 + \cdots.$$

Функција $h(z)$ може се дакле изразити једним бесконачним редом овога облика:

$$h(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots. \qquad (3)$$

Нека је сад

$$a_i = A_i(\cos\alpha_i + i\sin\alpha_i),$$

$$b_i = B_i(\cos\beta_i + i\sin\beta_i),$$

$$c_i = C_i(\cos\gamma_i + i\sin\gamma_i),$$

а

$$z - a = R(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

па заменимо у редовима (1), (2) и (3) $a_0, a_1, \cdots,$ $b_0, b_1, \cdots, c_0, c_1, \cdots$ са $A_0, A_1, \cdots, B_0, B_1, \cdots, C_0, C_1 \cdots,$ а $z-a$ са R. Тада ћемо добити ова три реда:

$$A_0 + A_1R + A_2R^2 + \cdots,$$

$$B_0 + B_1R + B_2R^2 + \cdots,$$

$$C_0 + C_1R + C_2R^2 + \cdots.$$

Збирови тих редова нека су F, G, H, а збирови првих $(n+1)$ чланова њихових нека су $F_n, G_n, H_n,$ т. ј. нека је

$$F_n = A_0 + A_1R + A_2R^2 + \cdots + A_nR^n,$$

$$G_n = B_0 + B_1R + B_2R^2 + \cdots + B_nR^n,$$

$$H_n = C_0 + C_1R + C_2R^2 + \cdots + C_nR^n,$$

а

$$F = \lim F_n, \;\; G = \lim G_n, \;\; H = \lim H_n.$$

Помножимо сад F_n са G_n. Тада ћемо добити ово:

$$F_nG_n = A_0B_0 + (A_0B_1 + A_1B_0)R + (A_0B_2 + A_1B_1 + A_2B_0)R^2$$
$$+ \cdots + (A_0B_n + A_1B_{n-1} + \cdots + A_nB_0)R^n$$
$$+ (A_1B_n + A_2B_{n-1} + \cdots + A_nB_1)R^{n+1}$$
$$+ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots + A_nB_nR^{2n}.$$

Но како је

$$c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_ib_0,$$

то ће бити

$$C_i \leqslant A_0B_i + A_1B_{i-1} + \cdots + A_iB_0,$$

па је стога и

$$F_nG_n - H_n \geqslant (A_1B_n + A_2B_{n-1} + \cdots + A_nB_1)R^{n+1}$$
$$+ \cdots \qquad \cdots + A_nB_nR^{2n}.$$

Међутим је (**Harnack.** *Differential- und Integralrechnung*, p. 131.)

$$lim\,[(A_1B_n + A_2B_{n-1} + \cdots + A_nB_1)R^{n+1} + \cdots$$
$$+ A_nB_nR^{2n}] = 0,$$

па је стога и

$$lim\,(F_nG_n - H_n) \geqslant 0,$$

а то ће рећи да је

$$FG \geqslant H.$$

Отуда ово правило:

Правило. *Ако су F, G, H збирови редова*

$$A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + \cdots,$$

$$B_0 + B_1 R + B_2 R^2 + \cdots,$$

$$C_0 + C_1 R + C_2 R^2 + \cdots$$

састављених из модула чланова редова

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - a) + a_2 (z - a)^2 + \cdots$$

$$g(z) = b_0 + b_1 (z - a) + b_2 (z - a)^2 + \cdots,$$

$$h(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(z - a)$$
$$+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(z - a)^2 + \cdots,$$

онда је у опште

$$FG \geqq H.$$

Нека је сад

$$p(z) = [f(z)]^n.$$

Ако помножимо узастопце n пута ред (1) сам собом, добићемо један ред овог облика:

$$p_0 + p_1 (z - a) + p_2 (z - a)^2 + \cdots,$$

и тај ће ред, као што се непосредно види, представљати функцију $p(z)$. Биће дакле

$$p(z) = p_0 + p_1 (z - a) + p_2 (z - a)^2 + \cdots.$$

Означивши модуо комплексне количине p_i са P_i и заменивши у последњем реду сваки члан својим модулом, добићемо овај ред:

$$P = P_0 + P_1 R + P^2 R^2 + \cdots.$$

Према мало час поменутом правилу биће

$$F^n \geqq P,$$

а том релацијом је формулисано ово правило:

Правило. *Ако је са F означен збир реда*

$$A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + \cdots$$

састављеног из модула појединих чланова реда

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - a) + a_2 (z - a)^2 + \cdots,$$

а са P збир реда

$$P_0 + P_1 R + P_2 R^2 + \cdots,$$

састављеног из модула појединих чланова реда

$$[f(z)]^n = p_0 + p_1 (z - a) + p_2 (z - a)^2 + \cdots,$$

онда је

$$F^n \geqq P.$$

Уочимо сад две функције $F(z)$ и $G(z)$ и претпоставимо да су те две функције мероморфне у околини тачке $z = a$. Тада ће бити

$$F(z) = (z - a)^m f(z),$$
$$G(z) = (z - a)^n g(z).$$

У тим изразима су са $f(z)$ и $g(z)$ означене две у околини тачке a холоморфне функције, којима тачка a није нула.

Количник функција $F(z)$ и $G(z)$ моћи ће се дакле свакад у околини тачке a овако изразити:

$$\frac{F(z)}{G(z)} = (z - a)^{m-n} \frac{f(z)}{g(z)},$$

а по томе се види да ће облик аналитичког израза функције $\frac{F(z)}{G(z)}$ зависити од облика аналитичког израза функције $\frac{f(z)}{g(z)}$.

Нека је сад

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - a) + a_2 (z - a)^2 + \cdots,$$

$$g(z) = b_0 + b_1 (z - a) + b_2 (z - a)^2 + \cdots.$$

Ако се узме да је

$$b_{11} = -\frac{b_1}{b_0},\ b_{12} = -\frac{b_2}{b_0},\ b_{13} = -\frac{b_3}{b_0},\ \cdots$$

а

$$u = b_{11} (z - a) + b_{12} (z - a)^2 + b_{13} (z - a)^3 + \cdots, \quad (4)$$

онда ће бити

$$g(z) = b_0 (1 - u),$$

а

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{b_0} \cdot \frac{1}{1 - u}$$

или

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{b_0} (1 + u + u^2 + u^3 + \cdots).$$

По томе види да ће функција $\frac{1}{g(z)}$ бити аналитички потпуно одређена тек кад се зна природа бесконачног реда

$$1 + u + u^2 + u^3 + \cdots$$

или, боље рећи, природа дела његова

$$\varphi(z) = u + u^2 + u^3 + \cdots.$$

Помоћу једне Кошијеве теореме доказује се да је последњи ред апсолутно конвергентан, а ми ћемо то доказати помоћу мало час поменутих теорема овако. Подићи ћемо ред (4) на други, трећи, $\cdots$ степен и добићемо тада овај низ бесконачних редова:

$$\begin{array}{lll} u^2 = b_{22}(z-a)^2 + & b_{23}(z-a)^3 + \cdots & \cdots \\ u^3 = & b_{33}(z-a)^3 + \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots \end{array}$$

Функција $\varphi(z)$ може се дакле овако аналитички изразити:

$$\begin{aligned} \varphi(z) = b_{11}(z-a) + b_{12}(z-a)^2 + b_{13}(z-a)^3 + \cdots \cdots \\ + b_{22}(z-a)^2 + b_{23}(z-a)^3 + \cdots \cdots \\ + b_{33}(z-a)^3 + \cdots \cdots \\ + \cdots \cdots \end{aligned}$$

или

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} b_{ik}(z-a)^k. \tag{5}$$

У томе реду замениће́мо члан $b_{ik}(z - a)^k$ модулом $B_{ik}R^k$. Тада ћемо добити један нов ред, па нека је S збир тога реда:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} B_{ik} R^k. \tag{6}$$

Јасно је сад да ће у опште бити

$$mod\, \varphi(z) < S.$$

Заменимо сад и у реду (4) сваки члан својим модулом. Тада ћемо добити један нов ред. Збир тога реда означићемо са U. Но како је према нашем правилу

$$U^i \geqslant \sum_{k=i}^{\infty} B_{ik} R^k,$$

то ће бити и

$$S \leqslant U + U^2 + U^3 + \cdots$$

Међу тим је функција u холоморфна у околини тачке $z = a$; с друге стране је тачка a нула функције u. Стога ћемо око тачке a моћи описати неким колико му драго малим полупречником један круг тако, да у свима тачкама унутрашњег краја тога круга буде U мање од неке позитивне количине θ, чија је вредност мања од јединице. То значи да ће тада бити

$$U + U^2 + U^3 + \cdots < \frac{\theta}{1 - \theta};$$

стога је и

$$S < \frac{\theta}{1 - \theta},$$

а то ће рећи да је ред (6) конвергентан, т. ј. да је ред (5) апсолутно конвергентан. Према томе збир реда (5) не ће зависити од распореда његових чланова, а по томе се види да се функција $\varphi(z)$, а уз њу и функција $\frac{1}{g(z)}$, може у околини тачке a представити једним Телоровим редом. Та функција $\frac{1}{g(z)}$ биће дакле холоморфна у околини тачке a, па ће стога и функција $\frac{f(z)}{g(z)}$, као производ двеју холоморфних функција, морати бити холоморфна функција. Биће дакле

$$\frac{f(z)}{g(z)} = u_0 + u_1 (z - a) + u_2 (z - a)^2 + \cdots.$$

Да видимо сад, како ћемо одредити непознате коефицијенте $u_0, u_1, u_2, \cdots$ последњега реда. Помножимо тога ради тај ред редом

$$g(z) = b_0 + b_1 (z - a) + b_2 (z - a)^2 + \cdots.$$

Тада ћемо добити овај бесконачан ред:

$$b_0u_0 + (b_1u_0 + b_0u_1)(z-a) + (b_2u_0+b_1u_1 + b_0u_2)(z-a)^2 + \cdots \cdots$$

Тај ред ће морати представљати функцију $f(z)$ у неком потпуно одређеном крају равни. По методу неодређених коефицијената биће дакле

$$a_0 = b_0 u_0,$$

$$a_1 = b_1 u_0 + b_0 u_1,$$

$$a_2 = b_2 u_0 + b_1 u_1 + b_0 u_2,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_n = b_n u_0 + b_{n-1} u_1 + b_{n-2} u_2 + \cdots + b_0 u_n.$$

Та система еквација може се сматрати као система линеарних, нехомогених еквација по непознатима $u_0, u_1, u_2, \cdots u_n$. Решивши ту систему по непознатој u_n добићемо ово:

$$u_n = \begin{vmatrix} b_0 & 0 & \cdots 0 & a_0 \\ b_1 & b_0 & \cdots 0 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots b_0 & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} & \cdots b_1 & a_n \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} b_0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & \cdots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots b_0 & 0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots b_1 & b_0 \end{vmatrix}.$$

Но како је

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & \cdots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots b_0 & 0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots b_1 & b_0 \end{vmatrix} = b_0^{n+1},$$

биће и

$$u_n = \frac{(-1)^n}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Коефицијенти $u_0, u_1, u_2, \cdots$, *што се јављају у аналитичком изразу мероморфне функције* $\frac{f(z)}{g(z)}$ *могу се дакле изразити производом двеју количина. Једна између тих количина је некакав потпуно одређен, врло прост број, а друга је нека заоквирена ортосиметрична детерминанта, састављена по одређеном закону из коефицијената* $a_0, a_1, a_2, \cdots$ *и* $b_0, b_1, b_2, \cdots$ *она два реда, што представљају функције* $f(z)$ *и* $g(z)$.

Ти резултати могу се формулисати овом простом теоремом:

Теорема. *Кад је*

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots,$$

а

$$g(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots,$$

онда је

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0}{b_0} - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \frac{z-a}{b_0^2} + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} \frac{(z-a)^2}{b_0^3}$$

$$-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} \frac{(z-a)^3}{b_0^4} + \cdots \cdots$$

Кад је $f(z) = 1$, онда се детерминанта (7) своди (v. **Hadamard.** *Essai sur l'étude des fonctions* etc. Journ. de Liouville, 4° série, t. VIII. 1892.) на овај познат облик:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 \end{vmatrix},$$

а развијен облик те детерминанте налази се у једном раду *De Presle*-ову (*Développement du quotient de deux fonctions holomorphes.* Bullet. de la Soc. math. de France, 1890—1891. p. 114—115.).

Ако последњу детерминанту означимо овим симболом: $(b_1\ b_n)$, онда ће аналитички израз функције $\frac{1}{g(z)}$ бити ово:

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{b_0} - b_1 \cdot \frac{z-a}{b_0^2} + (b_1\, b_2) \cdot \frac{(z-a)^2}{b_0^3}$$

$$-(b_1 b_3) \cdot \frac{(z-a)^3}{b_0^4} + \cdots, \qquad (8)$$

а тај је ред овог облика:

$$\frac{1}{g(z)} = u_0 + u_1 (z-a) + u_2 (z-a)^2 + \cdots.$$

Стога ће према обрасцу (8) бити

$$g(z) = \frac{1}{u_0} - u_1 \cdot \frac{z-a}{u_0^2} + (u_1 u_2) \cdot \frac{(z-a)^2}{u_0^3} - (u_1 u_3) \cdot \frac{(z-a)^3}{u_0^4} + \cdots.$$

Но ми знамо да је

$$g(z) = b_0 + b_1 (z-a) + b_2 (z-a)^2 + \cdots;$$

стога ће бити

$$b_0 = \frac{1}{u_0}, \quad b_1 = -\frac{u_1}{u_0^2}, \quad b_2 = \frac{(u_1 u_2)}{u_0^3}, \quad b_3 = -\frac{(u_1 u_3)}{u_0^4}, \cdots,$$

па како је

$$u_0 = \frac{1}{b_0}, \quad u_1 = -\frac{b_1}{b_0^2}, \quad u_2 = \frac{(b_1 b_2)}{b_0^3}, \quad u_3 = -\frac{(b_1 b_3)}{b_0^4}, \cdots,$$

то је уједно и

$$\begin{vmatrix} -b_1 & (b_1 b_2) \\ 1 & -b_1 \end{vmatrix} = b_0 b_2,$$

$$\begin{vmatrix} -b_1 & (b_1b_2) & -(b_1b_3) \\ 1 & -b_1 & (b_1b_2) \\ 0 & 1 & -b_1 \end{vmatrix} = -b_0{}^2b_3$$

и т. д., а ти се изрази могу написати и овако:

$$\begin{vmatrix} b_1 & (b_1b_2) \\ 1 & b_1 \end{vmatrix} = b_0b_2,$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & (b_1b_2) & (b_1b_3) \\ 1 & b_1 & (b_1b_2) \\ 0 & 1 & b_1 \end{vmatrix} = b_0{}^2b_3$$

и т. д. Тим обрасцима је, као што се види, обележена једна лепа особина ортосиметричних детерминаната овога типа:

$$(b_1b_n) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-4} & b_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Београд
1. децембра 1899. год.