O PFAFIJANIMA.

NAPISAO

Dr. BOGDAN GAVRILOVIĆ.

(Preštampano iz 143. knjige „Rada" jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti.)

U ZAGREBU

TISAK DIONIČKE TISKARE

1900.

Pozato je da se Cayley mnogo bavio o ispitivanju osobina koso simetričnih determinanata. Između ostaloga dokazao je Cayley,[1] da je koso simetrična determinanta parnoga stepena kvadrat nekog potpuno određenog polinoma. Taj polinom je važna funkcija elemenata pomenute koso simetrične determinante, važna po tome, što se takve funkcije javljaju u Integralnom Računu u znamenitoj Pfaff-ovoj problemi. Mi ćemo taj polinom bilježiti sa P i zvaćemo ga po Cayley-u pfafijanom.

Uočimo sada ovu koso simetričnu determinantu parnoga stepena:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3,2n-1} & a_{3,2n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & \cdots & a_{4,2n-1} & a_{4,2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1,1} & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & a_{2n-1,4} & \cdots & 0 & a_{2n-1,2n} \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & a_{2n,4} & \cdots & a_{2n,2n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

[1] *Cayley:* Sur les déterminants gauches. Journal für die reine und angew. Mathem. t. XXXVIII. i Collected mathem. Papers, t. I. p. 410.

Jasno je da je u toj determinanti Δ prvi minor elementa prve vrste i prve kolone takođe koso simetrična determinanta. Ako je sad α_{ik} prvi minor elementa a_{ik} te determinante, t. j. ako je α_{ik} jedan potpuno određen drugi minor prvobitne koso simetrične determinante, onda se ta determinanta može ovako izraziti: [1]

$$\Delta = \left(\sum a_{1i}\sqrt{\alpha_{i1}}\right)^2$$

$$= \left(a_{12}\sqrt{\alpha_{22}} + a_{13}\sqrt{\alpha_{33}} + \ldots + a_{1,\,2n}\sqrt{\alpha_{2n,\,2n}}\right)^2, \qquad (1)$$

a po tome se vidi da je pfafijan P linearna funkcija elemenata prve vrste determinante Δ. Taj pfafijan predstavlja se ovim simbolom:

$$P = \left.\begin{array}{cccccc} a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1,\,2n-1} & a_{1,\,2n} \\ & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2,\,2n-1} & a_{2,\,2n} \\ & & a_{34} & \ldots & a_{3,\,2n-1} & a_{3,\,2n} \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & a_{2n-2,\,2n-1} & a_{2n-2,\,2n} \\ & & & & & a_{2n-1,\,2n} \end{array}\right| . \qquad (2)$$

Glavni član toga pfafijana je

$$a_{12} \quad a_{34} \quad a_{56} \quad \ldots \quad a_{2n-1,\,2n}.$$

U tome članu ima n elemenata, t. j. pfafijan P je pfafijan n-toga reda.

Zamislimo sad da smo u matrici pfafijana P preko elemenata a_{13}, a_{14}, $\ldots$ $a_{1,\,2n-1}$, $a_{1,\,2n}$ povukli prave linije pravcem glavne dijagonale njegove. Te prave zvaćemo zajedno sa glavnom dijagonalom prosto dijagonalama, a sve te dijagonale podijelićemo u dvije vrste: u neparne i u parne dijagonale. Neparne dijagonale biće glavna dijagonala i sve one dijagonale što prelaze preko elemenata a_{14}, a_{16}, $\ldots$ $a_{1,\,2i}$, $\ldots$, a parnim dijagonalama

[1] *Baltzer:* Theorie und Anwendung der Determinanten, p. 45.

zvaćemo dijagonale što prelaze preko elemenata a_{13}, a_{15}, ... $a_{1,2i+1}$, ... Po toj definiciji vidi se na prvi pogled ovo: kad je u nekog elementa a_{ik} zbir $i+k$ kazaljaka neparan broj, onda taj elemenat leži na neparnoj dijagonali i obratno, ako je zbir $i+k$ kazaljaka elementa a_{ik} paran broj, onda preko elementa a_{ik} mora prelaziti parna dijagonala. Ako dakle nazovemo elemenat a_{ik} parnim elementom pfafijana P, kad je zbir $i+k$ paran broj, a neparnim elementom, kad je $i+k$ neparan broj, onda ćemo smjeti tvrditi, da će svi parni elementi ležati na parnim, a svi neparni na neparnim dijagonalama.

Na primjer, pfafijan

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ & f & g & h & i \\ & & j & k & l \\ & & & m & n \\ & & & & p \end{vmatrix}$$

ima tri neparne i dvije parne dijagonale.

Promijenimo sad u matrici pfafijana P prvo znake svima elementima neparnih dijagonala. Tada ćemo dobiti ovaj pfafijan:

$$P' = \begin{vmatrix} -a_{12} & a_{13} & -a_{14} & \dots & a_{1,2n-1} & -a_{1,2n} \\ & -a_{23} & a_{24} & \dots & -a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ & & -a_{34} & \dots & a_{3,2n-1} & -a_{3,2n} \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & -a_{2n-2,2n-1} & a_{2n-2,2n} \\ & & & & & -a_{2n-1,2n} \end{vmatrix}$$

Promijenimo li obratno u matrici pfafijana P znake svima elementima parnih dijagonala, onda ćemo dobiti ovaj pfafijan:

$$P'' = \begin{vmatrix} a_{12} & -a_{13} & a_{14} & \dots & -a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ & a_{23} & -a_{24} & \dots & a_{2,2n-1} & -a_{2\cdot 2n} \\ & & a_{34} & \dots & -a_{3,2n-1} & a_{3,2n} \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_{2n-2,2n-1} & -a_{2n-2,2n} \\ & & & & & a_{2n-1,2n} \end{vmatrix}.$$

*

Pita se, kako stoje transformovani pfafijani P' i P'' prema prvobitnom pfafijanu P.

Da bih na to pitanje odgovorio, moraću obići Jacobi-jevu[1] interpretaciju simbola (2) i zamijeniću je drugom jednom, kojoj osnovu treba tražiti u razvijenom obliku (1) determinante Δ.

Prije svega pomenuću 1-vo, da u svakom članu pfafijana P ima kao i u osnovnom članu njegovu svega n elemenata i 2-go, da se u svakom članu javlja svaka između kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$, ali svaka samo jedanput. Ako je dakle sa $ijkl \ldots rs$ označena neka pemutacija tih kazaljaka, onda će u opće svaki član u razvijenom obliku pfafijana P morati biti ovog oblika:

$$\pm\, a_{ij}\, a_{kl} \ldots a_{rs}, \tag{3}$$

ali odmah treba primijetiti da obratno svi ti proizvodi (3) ne će biti članovi pfafijana P. Na primjer, zna se da je

$$\left.\begin{matrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{34} \end{matrix}\right| = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}.$$

U razvijenom obliku toga pfafijana ima svega tri člana, a u tim članovima javljaju se samo ove tri permutacije kazaljaka:

$$1\ 2\ 3\ 4, \qquad 1\ 3\ 2\ 4, \qquad 1\ 4\ 2\ 3$$

ili ove tri:

$$3\ 4\ 1\ 2, \qquad 2\ 4\ 1\ 3, \qquad 2\ 3\ 1\ 4.$$

To znači da se sve permutacije kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$ ne javljaju u pfafijanu P, već samo neke između tih permutacija. Te permutacije dobijao je Jacobi određenim cikličkim permutovanjem i dokazao je[2] da ih svega ima

$$N = (2n - 1)\,(2n - 3) \ldots 5 \,.\, 3 \,.\, 1$$

[1] *Jacobi:* Theoria novi multiplicatoris systemati aequat. different. Werke, t. IV. p. 420.
[2] *Jacobi,* ibid. p. 421.

i tim brojem N bio bi određen i broj svih članova u razvijenom obliku pfafijana n-toga reda.

Moja interpretacija simbola (2) biće sad ovo: Da bih dobio sve permutacije kazaljaka, koje se javljaju u članovima pfafijana P, poći ću sa osnovne permutacije $1\ 2\ 3 \ldots 2n$ tih kazaljaka i spojiću elemenat 1 najprije s elementom 2, pa onda s elementom 3, ... i na posljetku s elementom $2n = m$. Tim putem dobiću ove sklopove:

$$1\,2, \quad 1\,3, \quad \ldots \quad 1m.$$

Pri tome ću ostale elemente osnovne permutacije ostaviti u prvobitnom rasporedu njihovu. Tada će svakom sklopu $1i$ odgovarati jedna permutacija ostalih $(2n - 2)$ elemenata osnovne permutacije. Tu permutaciju zvaću **komplementarnom permutacijom** sklopa $1i$. Tako bi n. pr. komplementarna permutacija sklopa $1\,2$ bila $3\,4 \ldots m$; komplementarna permutacija sklopa $1\,3$ bila bi $2\,4 \ldots m$ i t. d. Iza svakog takvog sklopa $1i$ napisaćemo sad komplementarnu mu permutaciju i dobićemo tada svega $m - 1 = 2n - 1$ permutacija elemenata $1, 2, 3, \ldots 2n$:

$$1\,2\,3\,4\,5 \ldots m, \quad 1\,3\,2\,4\,5 \ldots m, \ldots\ldots \tag{4}$$

Sad ćemo iz svake komplementarne permutacije izvesti nov jedan niz permutacija i to po istom onom pravilu, po kome smo i malo čas izvodili permutacije (4) iz osnovne permutacije $1\,2\,3 \ldots m$. Tada ćemo n. pr. iz permutacije $3\,4\,5 \ldots m$ dobiti ovih $m - 3$ permutacija:

$$3\,4\,5\,6\,7 \ldots m, \quad 3\,5\,4\,6\,7 \ldots m, \quad \ldots \quad \ldots \tag{5}$$

i sve te permutacije ćemo napisati iza sklopa $1\,2$. Dalje ćemo iz komplementarne permutacije $2\,4\,5\,6 \ldots m$ dobiti ovih $m - 3$ permutacija:

$$2\,4\,5\,6\,7 \ldots m, \quad 2\,5\,4\,6\,7 \ldots m, \quad \ldots \quad \ldots$$

i sve ćemo ih napisati iza sklopa $1\,3$ i t. d.

Permutacije

$$5\,6\,7 \ldots, \quad 4\,6\,7 \ldots, \quad \ldots \quad \ldots$$

bile bi komplementarne permutacije komplementarnih permutacija. S toga bismo te permutacije mogli zvati komplementarnim permutacijama drugoga reda, a samo permutovanje komplementarnim permutovanjem. Na taj način dobili bismo već

$$(m-1)(m-3)=(2n-1)(2n-3)$$

različitih permutacija kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$. Sad bismo opet po istom pravilu iz svake komplementarne permutacije drugoga reda mogli izvesti svega $m-5$ novih permutacija. Te permutacije ćemo opet napisati iza onog sklopa, uz koji se nalazila ta komplementarna permutacija i dobićemo tada svega

$$(m-1)(m-3)(m-5)=(2n-1)(2n-3)(2n-5)$$

permutacija kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$. Tako bismo stvarali komplementarne permutacije viših redova i na posljetku bismo komplementarnim permutovanjem dobili sve one permutacije kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$ koje se javljaju u pfafijanu P, a broj njihov bio bi očevidno N.

Neka su nam na primjer date kazaljke $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Tada ćemo dobiti ove permutacije:

$$1\,2\,3\,4\,5\,6,\quad 1\,3\,2\,4\,5\,6,\quad 1\,4\,2\,3\,5\,6,\quad 1\,5\,2\,3\,4\,6,\quad 1\,6\,2\,3\,4\,5.$$

Komplementarne permutacije su u ovaj mah

$$3\,4\,5\,6,\quad 2\,4\,5\,6,\quad 2\,3\,5\,6,\quad 2\,3\,4\,6,\quad 2\,3\,4\,5,$$

a iz ovih se komplementarnim permutovanjem dobivaju ove permutacije:

$$\begin{array}{lll}
3\,4\,5\,6, & 3\,5\,4\,6, & 3\,6\,4\,5 \\
2\,4\,5\,6, & 2\,5\,4\,6, & 2\,6\,4\,5 \\
2\,3\,5\,6, & 2\,5\,3\,6, & 2\,6\,3\,5 \\
2\,3\,4\,6, & 2\,4\,3\,6, & 2\,6\,3\,4 \\
2\,3\,4\,5, & 2\,4\,3\,5, & 2\,5\,3\,4.
\end{array}$$

Komplementarne permutacije drugoga reda su u ovaj mah

$$5\,6,\quad 4\,6,\quad 4\,5,\quad 3\,6,\quad 3\,5,\quad 3\,4,$$

a te permutacije nemaju više svojih komplementarnih permutacija. Ako dakle permutaciju $1\,i\,j\,k\,r\,s$ $(i=2, 3, 4, 5, 6;\ j, k, r, s=3,$

4, 5, 6) označimo sa 1i (jkrs), onda će nam jasno biti da ćemo u ovaj mah komplementarnim permutovanjem dobiti ove permutacije:

$$\begin{array}{llll} 1\,2 & (3\,4\,5\,6, & 3\,5\,4\,6, & 3\,6\,4\,5), \\ 1\,3 & (2\,4\,5\,6, & 2\,5\,4\,6, & 2\,6\,4\,5), \\ 1\,4 & (2\,3\,5\,6, & 2\,5\,3\,6, & 2\,6\,3\,5), \\ 1\,5 & (2\,3\,4\,6, & 2\,4\,3\,6, & 2\,6\,3\,4), \\ 1\,6 & (2\,3\,4\,5, & 2\,4\,3\,5, & 2\,5\,3\,4). \end{array}$$

S toga su članovi u razvijenom obliku pfafijana

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{56} \end{array} \right|$$

ovo:

$$\begin{array}{lll} a_{12}\,a_{34}\,a_{56}, & a_{12}\,a_{35}\,a_{46}, & a_{12}\,a_{36}\,a_{45} \\ a_{13}\,a_{24}\,a_{56}, & a_{13}\,a_{25}\,a_{46}, & a_{13}\,a_{26}\,a_{45} \\ a_{14}\,a_{23}\,a_{56}, & a_{14}\,a_{25}\,a_{36}, & a_{14}\,a_{26}\,a_{35} \\ a_{15}\,a_{23}\,a_{46}, & a_{15}\,a_{24}\,a_{36}, & a_{15}\,a_{26}\,a_{34} \\ a_{16}\,a_{23}\,a_{45}, & a_{16}\,a_{24}\,a_{35}, & a_{16}\,a_{25}\,a_{34}. \end{array}$$

Znak, koji pojedini članovi imaju u razvijenom obliku pfafijana P, određuje se po broju inversija, a po ovom pravilu: a k o j e u permutacijama dobivenim komplementarnim permutovanjem broj inversija paran, onda članovi u kojima se javljaju takve permutacije imaju pozitivan znak u razvijenom obliku pfafijana; u suprotnom slučaju je znak članova negativan. Na primjer, u posljednjem, malo čas pomenutom pfafijanu, javlja se član $a_{12}\,a_{35}\,a_{46}$ sa znakom minus, a član $a_{12}\,a_{36}\,a_{45}$ sa znakom plus.

Da vidimo sad šta će biti sa pfafijanom P, kad se u matrici njegovoj promijene bilo znaci svih elemenata neparnih, bilo znaci svih elemenata parnih dijagonala. Pfafijan dobiven prvom transformacijom označićemo ponovo sa P', a onaj drugi sa P''.

To pitanje riješićemo sad lako, samo ćemo pri tome posebice morati proučiti ova dva slučaja.

Slučaj I. Neka je zbir kazaljaka paran broj, pa uočimo neku permutaciju $1ijkrs \ldots tu$ $(i = 2, 3, \ldots 2n;\ j, k, \ldots t, u = 3, 4, \ldots 2n)$ kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$. Tu permutaciju ćemo podijeliti na n ovakvih sklopova:

$$1i, \quad jk, \quad rs, \quad \ldots \quad tu. \tag{6}$$

Svaki takav sklop predstavljaće očevidno par kazaljaka u onom članu pfafijana, koji odgovara permutaciji $1ijkrs \ldots tu$, pa kako je zbir svih kazaljaka paran broj, to će se u sistemi (6) javljati paran broj sklopova, a to će reći, da će u ovom slučaju pfafijan P morati biti parnoga reda. Razredimo sad sklopove sisteme (6) u dva razreda: u razred parnih, i u razred neparnih sklopova. Pri tome ćemo parnim sklopom zvati sklop, kad je zbir elemenata toga sklopa paran broj, a kad je zbir tih elemenata neparan broj, onda ćemo i sklop zvati neparnim sklopom. Ako je sad sklop $1i$ paran, onda će i zbir

$$(j + k) + (r + s) + \ldots + (t + u)$$

biti paran broj i obratno, ako je sklop $1i$ neparan, onda će i zbir ostalih kazaljaka biti neparan broj. To znači da i u jednom i u drugom slučaju ima u sistemi (6) paran broj parnih i paran broj neparnih sklopova. Drugim riječima, u svakom članu pfafijana parnoga reda ima paran broj parnih i paran broj neparnih elemenata. Kako međutim parne dijagonale prelaze u matrici pfafijana P preko parnih, a neparne preko neparnih elemenata, to se očevidno nijedan član pfafijana P ne će promijeuiti, kad se u njemu promijene bilo znaci svih parnih, bilo znaci svih neparnih elemenata. To znači da je u ovaj mah

$$P = P' = P''.$$

Dobili smo dakle ovu teoremu:

Teorema I. Kad se u matrici nekog pfafijana parnoga reda promijene znaci bilo svima elementima parnih, bilo svima elementima neparnih dijagonala, onda pfafijan nikako ne mijenja svoju vrijednost.

Slučaj II. Neka je zbir kazaljaka neparan broj. U ovaj mah može se dokazati ovo: 1-vo, da je pfafijan P neparnog reda; 2-go, da u sistemu (6) ima neparan broj neparnih, a paran broj parnih sklopova, a to će reći da u svakom članu nekog pfafijana neparnog reda ima neparan broj neparnih, a paran broj parnih elemenata. Prema tome će svaki član toga pfafijana promijeniti svoj znak, ali vrijednost ne, kad se u njemu promijene znaci svih neparnih elemenata i obratno, nijedan član toga pfafijana nikako se ne će promijeniti, kad se u njemu promijene znaci svih parnih elemenata. To znači da je u ovaj mah

$$P' = -P.$$

a

$$P'' = P.$$

Otuda ove teoreme:

Teorema II. Kad se u matrici nekog pfafijana neparnog reda promijene znaci svima elementima neparnih dijagonala, onda se znak tome pfafijanu mijenja, ali vrijednost ne mijenja.

Teorema III. Kad se u matrici nekog pfafijana neparnog reda promijene znaci svima elementima parnih dijagonala, onda pfafijan nikako ne mijenja svoju vrijednost.

Sve te tri teoreme mogu se obuhvatiti ovom jednom teoremom:

Teorema. Kad se u matrici nekog pfafijana promijene znaci svima elementima neparnih dijagonala, onda pfafijan nikako ne će promijeniti svoju vrijednost ako mu je red bio paran, a promijeniće samo svoj znak ako mu je red bio neparan; a ako se u matrici promijene znaci svima elementima parnih dijagonala, onda se nikako ne će promijeniti niti pfafijan parnoga, niti pfafijan neparnoga reda.

Po tim teoremama je na primjer

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{array} = \begin{array}{ccc} -a & b & -c \\ & -d & e \\ & & -f \end{array} = \begin{array}{ccc} a & -b & c \\ & d & -e \\ & & f \end{array},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ & f & g & h & i \\ & & j & k & l \\ & & & m & n \\ & & & & p \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -a & b & -c & d & -e \\ & -f & g & -h & i \\ & & -j & k & -l \\ & & & -m & n \\ & & & & -p \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ & f & g & h & i \\ & & j & k & l \\ & & & m & n \\ & & & & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b & c & -d & e \\ & f & -g & h & -i \\ & & j & -k & l \\ & & & m & -n \\ & & & & p \end{vmatrix}.$$