DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA, treći domaći zadatak 2016/17

1. Neka je $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ difeomorfizam mnogostrukosti sa povezanostima bez torzije. Kriva α je uopštena geodezijska ako važi $\nabla_{T_\alpha} T_\alpha = \rho(t) T_\alpha$. Identifikujući f povezana vektorska polja na M i $\overline{M}$ neka je $P(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$.

   (a) Pokazati da je P simetrično i $\mathcal{F}(M)$-bilinearno preslikavanje.

   (b) Pokazati da je $P(X, Y) = \psi(Y)X + \psi(X)Y$ gde je ψ kovektorsko polje.

   (c) Koristeći polja koordinatnog repera pokazati da je $\psi(X) = \frac{1}{n+1} Tr(Y \mapsto P(X, Y))$.

2. Neka je ∇ standardna koneksija u R^3, x, y, z standardne koordinate, a $\langle , \rangle$ skalarni proizvod. Neka je $\phi(X) = \langle X, \frac{\partial}{\partial_z} \rangle$ i $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \phi(X)Y + \phi(Y)X$.

   (a) Pokazati da je $\overline{\nabla}$ koneksija. Da li je simetrična?

   (b) Odrediti Kristofelove simbole i geodezijske krive koneksije $\overline{\nabla}$.

   (c) Data je kriva $\gamma : (1, +\infty) \to R^3$ sa $\gamma(t) = (t, \sin t, \ln t)$. Naći vektorsko polje X paralelno duž γ takvo da je $X_{\gamma(1)} = (1, 0, 0)$.

   (d) Odrediti krivine koneksije $\overline{\nabla}$, $\overline{R}(X, Y)Z$ gde su $X, Y, Z \in \{\frac{\partial}{\partial_x}, \frac{\partial}{\partial_y}, \frac{\partial}{\partial_z}\}$.

3. Data je rotaciona površ u R^3 $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$, $f : R^+ \to R$.

   (a) Odrediti prvu fundamentalnu formu površi.

   (b) Odrediti f za koje je preslikavanje σ konformno.

   (c) Naći minimalne rotacione površi.

   (d) Pokazati da su meridijani ($v = const$) uopštene geodezijske krive.

4. a) Neka je $f : M \to N$ lokalna izometrija, $p \in M, p_1 = f(p)$. Pokazati da je $f \circ exp_p = exp_{p_1} \circ df_p$, tamo gde su izrazi definisani.
   b) Neka su $f_1, f_2 : M \to N$ dve lokalne izometrije, gde je M povezana mnogostrukost, takve da postoji tačka p za koju važi $f_1(p) = f_2(p)$ i $df_{1p} = df_{2p}$. Pokazati da je tada $f_1 = f_2$.

5. U prostoru R^3 date su površi
   i) $M_1 = \{f(t, \theta) = (t \sin\theta, t \cos\theta, lnt) | t > 0, \theta \in R\}$
   ii) $M_2 = \{g(t, \theta) = (t \cos\theta, t \sin\theta, \theta) | t > 0, \theta \in R\}$.

   (a) Pokazati da su sekcione krivine ovih površi u tačkama $f(t, \theta)$ i $g(t, \theta)$ jednake $-\frac{1}{1+t^2}^2$.

   (b) Pokazati da ne postoji lokalna izometrija koja slika neku otvorenu okolinu u površi M_1 u neku otvorenu okolinu u površi M_2.