DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA 15/16, domaći 1

Data je sfera $S^3 \subset R^4 = C^2$ sa $S^3 = \{(z,w) |\ \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}$ i preslikavanje $f : S^3 \to S^2$ sa $f(z,w) = (z\overline{w} + w\overline{z}, iw\overline{z} - iz\overline{w}, z\overline{z} - w\overline{w})$.

1. Pokazati da je f dobro definisano.
2. Zapisati atlas sfere S^3 dobijen pomoću stereografskih projekcija.
3. Pokazati da je f diferencijabilno preslikavanje koristeći karte stereografskih projekcija.
4. U odgovarajućim koordinatnim bazama izraziti df.
5. Naći bar jedno kovektorsko polje σ na S^2 koje je nula u tačno jednoj tački.
6. Odrediti $df^*(\sigma)$.
7. Odrediti jedan globalni pokretni reper X_1, X_2, X_3 na S^3 i izračunati $[X_1, X_2], [X_2, X_3], [X_3, X_1]$.
8. Da li postoji vektorsko polje Y na S^2 takvo da su X_1 i Y $f-$povezana? Obrazložiti.
9. Neka je $p \in S^2$ proizvoljna tačka. Pokazati da je $f^{-1}(p)$ veliki krug sfere S^3.
10. Pokazati da je (S^3, S^2, f) diferencijabilno raslojenje sa vlaknom S_1. Da li je trivijalno?

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA 15/16, domaći 2

1. Neka je $\mathcal{M}$ prostor realnih kvadratnih matrica ($\mathcal{M} = R^{n^2}$). Dato je preslikavanje $f : \mathcal{M} \to R$ sa $f(X) = \det X$. Pokazati da je f diferencijabilno i odrediti njegov rang u tačkama $A \in \mathcal{M}$ takvim da je $f(A) = 1$ i zaključiti da je $f^{-1}(1) = M$ podmnogostrukost $\mathcal{M}$. Odrediti $T_A M$ i specijalno $T_E M$ gde je E jedinična matrica.

2. Neka je $T^2 \subset R^3$ dvodimenzioni torus zadat standardnom parametrizacijom
$$\{((r\cos y + a)\cos x, (r\cos y + a)\sin x, r\sin y)\}$$
i S_0 centralna simetrija prostora R^3 u odnosu na koordinatni početak. Pokazati da grupa $G = \{id, S_0\}$ dejstvuje na torus slobodno i diskretno. Mnogostrukost T^2/G naziva se Klajnova flaša. Dato je preslikavanje $f : R^2 \to R^4$ sa
$$f(x, y) = ((r\cos y + a)\cos 2x, (r\cos y + a)\sin 2x, r\sin y\cos x, r\sin y\sin x)$$
koje indukuje preslikavanje T^2 u R^4. Pokazati da ono indukuje i smeštanje Klajnove flaše u R^4.

3. Neka je M mnogostrukost, X vektorsko polje na M, $f \in \mathcal{F}(M)$ i $p \in M$. Pokazati da je
$$(XF)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f \circ Fl_t^X)(p) - f(p)).$$

4. U prostoru R^3 sa standardnim koordinatama data su vektorska polja $X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ i $Y = (x-y)z\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)z\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}$.
   (a) Odrediti skup tačaka u kojima X_1 i Y razapinju dvodimenzionu distribuciju $\mathcal{D}$.
   (b) Pokazati da je $\mathcal{D}$ involutivna distribucija. Naći diferencijabilnu funkciju ρ takvu da vektorska polja X_1 i $X_2 = Y + \rho X_1$ komutiraju.
   (c) Naći integralnu mnogostrukost distribucije $\mathcal{D}$ kroz tačku (x_0, y_0, z_0) i odrediti njenu implicitnu jednačinu u datim koordinatama. Koja je površ u pitanju?

5. Dati primer vektorskog polja na mnogostrukosti za koje postoji nekonstantna maksimalna integralna kriva čija slika nije jednodimenziona podmnogostrukost date mnogostrukosti (videti Primedbu 3.23 u knjizi).

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA 15/16, domaći 3.

1. Znamo da preslikavanje $g : R^3 \to R^5$ dato sa $g(x, y, z) = (\sqrt{3}yz, \sqrt{3}zx, \sqrt{3}xy, \sqrt{3}\frac{x^2-y^2}{2}, \frac{1}{2}(x^2+y^2-2z^2))$ indukuje ulaganje RP^2 u $S^4 \subset R^5$ (ulaganje Veronezea, videti zadatak 3.13 i beleške sa vežbi). Pokazati da je ovo ulaganje $RP^2 \subset S^4$ konformno i minimalno.

2. Neka je ϕ diferencijabilna funkcija $\phi : M \to R$, gde je (M, g) Rimanova mnogostrukost i ∇ njena Levi-Čivita povezanost. Tada postoji vektorsko polje V (gradijent funkcije ϕ) na M takvo da je $g(X, V) = X(\phi)$ za svako v. polje X.
a) Pokazati da je sa $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}(X(\phi)Y + Y(\phi)X - g(X, Y)V)$ data simetrična koneksija $\overline{\nabla}$ na M.
b) Pokazati da je $\overline{\nabla}$ Levi-Čivita koneksija metrike $e^{\phi}g$.
c) Neka je $M = R^3$ i g standardna metrika, a $\phi : R^3 \to R$ dato sa $\phi(x, y, z) = x$. Odrediti odgovarajuće vektorsko polje V, kao i Kristofelove simbole koneksije $\overline{\nabla}$ u standardnom koordinatnom reperu.
d) Neka je $\alpha : (0, +\infty) \to R^3$ kriva data sa $t \mapsto (t, 0, 0)$. Odrediti sliku vektora $(1, 0, 0)_{(0,0,0)}$ pri paralelnom pomeranju u koneksiji $\overline{\nabla}$ duž α u tački $(t, 0, 0)$.
e) Odrediti geodezijske krive koneksije $\overline{\nabla}$.

3. Neka je g standardna produkt metrika na $S^1 \times R$ i $p = (1, 0, 0)$. Odrediti eksplicitno $\exp_p$.

4. Neka je M_1 podmnogostrukost od (M, g) i $\gamma : I \to M$ geodezijska kriva takva da je $\gamma(I) \subset M_1$.
a) Ako je, za $p \in M_1$, $\Pi \subset T_pM_1$ dvodimenziona ravan takva da $T_\gamma|_p \in \Pi$ onda je $K_1(\Pi) \leq K(\Pi)$, gde su K_1 i K sekcione krivine Levi-Čivita koneksija mnogostrukosti M_1 i M. Dokazati.
b) Razvojna površ u R^3 je nepozitivne krivine. Dokazati. (Razvojna površ je ona za koju kroz svaku njenu tačku postoji prava koja cela pripada toj površi).

5. Neka je M_1 podmnogostrukost Rimanove mnogostrukosti (M, g), R-krivina Levi-Čivita koneksije ∇ mnogostrukosti M, h druga fundamentalna forma u odnosu na normalno raslojenje, $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M_1)$, $\xi \in NM_1$, ∇^1 indukovana koneksija na M_1.
a) (Kodacijeva jednačina) Važi $R(X, Y, Z, \xi) = g(\nabla_X h(Y, Z) - h(\nabla^1_X Y, Z) - h(Y, \nabla^1_X Z), \xi) - g(\nabla_Y h(X, Z) - h(\nabla^1_Y X, Z) - h(X, \nabla^1_Y Z), \xi)$. Dokazati.
b) Verifikovati formulu za $S^2 \subset R^3$.