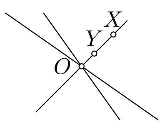
8. Пројективни простор

У овој лекцији упознаћемо се са пројективном геометријом, неким од начина њеног увођења као и са неким од њених основних особина.
Прво ћемо увести појам пројективног простора. Постоји неколико различитих (међусобно еквивалентних) приступа увођењу овог појма, а ми ћемо сада представити један од њих.

Нека је O тачка афиног простора $\mathbb{R}^{n+1}$. Посматрајмо координатни систем у $\mathbb{R}^{n+1}$ у ком је тачка O координатни почетак. Нека је p произвољна права која садржи тачку O.



Ако су X и Y две тачке те праве различите од O тада су вектори $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY}$ колинеарни. Зато, ако су $(x_1, \dots, x_{n+1})$ и $(y_1, \dots, y_{n+1})$, редом, афине координате тачака X и Y онда постоји $\lambda \in R$, различито од нуле, такво да је $\lambda(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1})$.

При том, бар једна координата тачке X (односно тачке Y) је различита од нуле, а права p је једнозначно одређена једном својом тачком различитом од O.

Дефиниција

Нека је $\sim$ релација на скупу $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ дата на следећи начин. Нека је $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim (y_1, \ldots, y_{n+1})$ ако постоји $\lambda \in R, \lambda \neq 0$, такво да је

$$\lambda(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (y_1, \ldots, y_{n+1}).$$

Тада је $\sim$ релација еквиваленције. Количнички скуп $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ називамо **реалним пројективним простором** димензије n и означавамо $\mathbb{R}P^n$.

Елементи пројективног простора су класе еквиваленције $(n+1)$-торки $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \neq 0$ и називамо их **тачкама**.

С обзиром да су $(n+1)$-торке из једне класе међусобно сразмерне, тачки пројективног простора придружујемо $(n+1)$-торку $(x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1})$ и називамо је **хомогеним координатама** дате тачке.

Уочили смо да све $(n+1)$-торке $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ из исте класе еквиваленције припадају истој афиној правој кроз O. Зато и пројективни простор $\mathbb{R}P^n$ можемо сматрати и скупом свих правих у $\mathbb{R}^{n+1}$ које садрже дату фиксирану тачку O.

Ако је $X(x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1})$ тачка пројективног простора, можемо јој придружити и вектор одговарајуће афине праве $\overrightarrow{X} = \lambda(x_1, \ldots, x_{n+1})$, за неко фиксирано $\lambda \neq 0$.

У аналогији са овом конструкцијом, нека је π произвољни афини потпростор димензије $(k+1)$ који садржи тачку O. Скуп свих афиних правих које садрже O и припадају π чине пројективни простор димензије k који је при том, подскуп простора $\mathbb{R}P^n$.

Називамо га k-димезионим **пројективним потпростором** простора $\mathbb{R}P^n$. Специјално, ако је $k = 1$ тај потпростор називамо **пројективном правом**, а ако је $k = n - 1$, за такав потпростор кажемо да је **пројективна хиперраван** простора $\mathbb{R}P^n$.

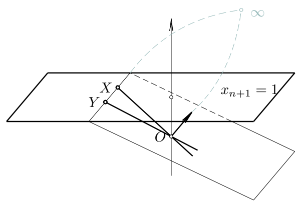
Дефиниција

Тачке $A_1(1:0:\cdots:0)$, $A_2(0:1:0:\cdots:0)$, ..., $A_{n+1}(0:\cdots:0:1)$ и $B(1:1:\cdots:1)$ називамо **базним тачкама**.

Дефиниција

За неких $k \leq n+1$ тачака $M_1, \ldots, M_k$ пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ кажемо да су у **општем положају** ако су вектори $\overrightarrow{M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_k}$ линеарно независни.

Проширена афина раван. Посматрајући пројективни простор као скуп правих кроз O можемо доћи и до друге интерпретације овог појма.
Нека је $\mathbb{R}^n$ афина хиперраван у $\mathbb{R}^{n+1}$ која не садржи тачку O.



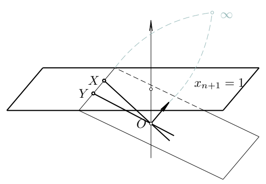
Постоји афини координатни систем у $\mathbb{R}^{n+1}$ такав да дата хиперраван има једначину $x_{n+1} = 1$.
Нека је, даље, σ дводимензиона афина раван која сече $\mathbb{R}^n$ по афиној правој.

Нека су $X(x_1, \dots, x_n, 1)$ и $Y(y_1, \dots, y_n, 1)$ две тачке те праве. Оне одговарају пројективним тачкама $(x_1 : \dots : x_n : 1)$ и $(y_1 : \dots : y_n : 1)$. Ако је $Z(z_1, \dots, z_n, 1)$ још једна тачка афине равни $\mathbb{R}^n$, тада су Y, Y, Z колинеране ако и само ако су вектори $(x_1, \dots, x_n, 1)$, $(y_1, \dots, y_n, 1)$ и $(z_1, \dots, z_n, 1)$ зависни.

Раван σ садржи афину праву кроз O (односно пројективну тачку) која је у афином смислу паралелна $\mathbb{R}^n$. Та афина права је одређена не-нула вектором $(v_1, \dots, v_n, 0)$. Уочимо да су, при том, вектори $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n, 0)$ и $(v_1, \dots, v_n, 0)$ колинеарни.

Сада можемо дати још једну интерпретацију пројективног простора $\mathbb{R}P^n$.
Ако пројективна тачка $\widetilde{X}$ има последњу координату различиту од нуле, односно ако одговарајућа афина права сече афину хиперраван $\mathbb{R}^n$ у некој афиној тачки X, тада тој пројективној тачки $\widetilde{X}$ придружујемо афину тачку X. Ако су $(x_1 : \dots : x_{n+1})$ пројективне координате тачке $\widetilde{X}$, онда тачка X има афине координате $(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1)$ (и обрнуто).

Ако афини потпростор димензије $(k+1)$, који одређује k-димензиони пројективни потпростор $\widetilde{\pi}$, сече $\mathbb{R}^n$ по афином потпростору π онда k-димензионом пројективном потпростору $\widetilde{\pi}$ придружујемо π. При том важи да је $\widetilde{X} \in \widetilde{\pi}$ ако и само ако је $X \in \pi$.



Ако пројективна тачка за своју последњу хомогену координату има 0, односно, ако је одговарајућа права одређена вектором $(v_1, \dots, v_n, 0)$ тада она (афино) не сече хиперраван $\mathbb{R}^{n+1}$.

Зато морамо формално допунити $\mathbb{R}^n$ тачкама које одговарају пројективним тачкама $(v_1 : \dots : v_n : 0)$ и које ћемо звати **бесконачно далеким**.

При том, пројективна тачка $(v_1 : \cdots : v_n : 0)$, односно одговарајућа афина права кроз O, припада свим афиним равнима σ чија директриса садржи вектор $(v_1, \ldots, v_n, 0)$. Све ове равни секу $\mathbb{R}^n$ по (афино) паралелним правама. Дакле, две (афино) паралелне праве у $\mathbb{R}^n$ имају (пројективно) заједничку бесконачно далеку тачку.
Све бесконачно далеке тачке припадају (афино) хиперавни $\widetilde{\alpha} : x_{n+1} = 0$, која је афино паралелна $\mathbb{R}^n$. Зато, у пројективном смислу, све бесконачно далеке тачке припадају једној пројективној хиперравни α, одређеној са $\widetilde{\alpha}$, коју називамо **бесконачно далеком**.

Сада можемо рећи и да је $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n \cup \alpha$.
При том, ако су $(x_1, \ldots, x_n)$ афине координате тачке из $\mathbb{R}^n$ онда су њене пројективне $(x_1 : \cdots : x_n : 1)$. Бесконачно далеке тачке имају последњу хомогену координату 0.
При том су тачке $(x_1 : \cdots : x_n : 1)$, $(y_1 : \cdots : y_n : 1)$ и $(v_1 : \cdots : v_n : 0)$ колинеарне ако и само ако су вектори $(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n, 0)$ и $(v_1, \ldots, v_n, 0)$ сразмерни.

Примедба *Приметимо да појам бесконачно далеких тачака зависи од избора хиперравни која не садржи тачку O. Са пројективног становишта "коначне" и бесконачно далеке тачке се не разликују.*

Променом координатног система (афиних или хомогених координата, свеједно) тачке коју су биле бесконачне могу постати коначне и обрнуто, као што ћемо видети.

Уочимо да неке од претходних дефиниција, рецимо базних тачака, зависе од избора афиног координатног система, у којем је дата тачка O координатни почетак, а дата хиперраван $\mathbb{R}^n$ има једначину $x_{n+1} = 1$.
Једна афина промена кордината простора $\mathbb{R}^{n+1}$ за коју је O инваријантна тачка дата је формулама $X' = AX$, где је A реална квадратна матрица димензије $(n+1)$ и $\det A \neq 0$.
Ова промена координата индукује и промену пројективних координата тачака. С обзиром да су хомогене координате одређене до на коефицијент сразмерности λ, добијамо да је тада промена пројективних координата простора $\mathbb{R}P^n$ дата са

$$\lambda X' = AX, \quad \det A \neq 0.$$

Пројективни потпростор простора $\mathbb{R}P^n$ димензије $(n-1)$ је одређен одговарајућом афином хиперравни π простора $\mathbb{R}^{n+1}$ која садржи тачку O. Зато π има афину једначину $u_1x_1 + \dots u_{n+1}x_{n+1} = 0$.
Тачка $X(x_1, \dots, x_{n+1})$ припада тој хиперравни ако и само ако вектор $\overrightarrow{OX} = (x_1, \dots, x_{n+1})$ припада директриси те хиперравни, односно ако и само ако тачка $(x_1 : \dots : x_{n+1})$ припада одговарајућем пројективном потпростору. Зато је уједно и једначина пројективне хиперравни

$$u_1x_1 + \dots u_{n+1}x_{n+1} = 0,$$

где за бар једно i важи да је $u_i \neq 0$.
С обзиром да је са $\lambda u_1x_1 + \dots \lambda u_{n+1}x_{n+1} = 0$ дата иста хиперраван, можемо јој доделити хомогене координате $u^t = [u_1 : \dots : u_{n+1}]$. Матрично једначину хиперравни записујемо

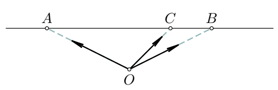
$$u^tX = 0.$$

С обзиром да је свака хиперраван представљена хомогеном $(n+1)$-торком, као што је и свака пројективна тачка то значи да и свако тврђење које важи за тачке можемо преформулисати мењајући реч тачка речју хиперраван, припада речју садржи,... и добити поново тврђење пројективне геометрије. Овај принцип називамо **принципом дуалности.**
Такође и следеће тврђење следи директно из дефиниције пројективног потпростора.

Теорема

Сваке две хиперравни се секу по пројективном потпростору димензије $(n-2)$.

Дворазмера. Нека су A и B две пројективне тачке и p права њима одређена. Тада произвољна пројективна тачка C припада правој p ако и само ако је вектор $\overrightarrow{C}$ линеарна комбинација вектора $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$, односно,



ако постоје α и β такви да је $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$. При том, важи да је $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Уочимо и да је $k\alpha\overrightarrow{A} + k\beta\overrightarrow{B}$ такође вектор који одговара тачки C, односно да су α и β одређени до на коефицијент сразмерности.

Ако је $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ тада је $B = C$ односно $A = C$. Ако $\alpha \neq 0$ онда за $k = \frac{1}{\alpha}$ добијамо да је један од вектора колинеарних са $\overrightarrow{C}$ једнак $\overrightarrow{A} + \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{B}$.
Ако су A, B, C коначне разне тачке, тада постоји $\lambda \in R$ такво да је $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, па важи да је $\overrightarrow{OC} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, те је

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}. \tag{1}$$

Нека су сада $C \neq D$ тачке праве p различите од A и B и нека је $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{D} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$. Тада је сваки од коефицијената $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ различит од нуле, а с обзиром да је $C \neq D$ важи и да је $\frac{\beta}{\alpha} \neq \frac{\delta}{\gamma}$.

Дефиниција

Број $(A, B; C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}$ називамо **дворазмером** тачака A, B, C, D.

Уочимо да дефиниција дворазмере не зависи од избора вектора $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{D}$, односно, да се за векторе $k_1\overrightarrow{A}$, $k_2\overrightarrow{B}$, $k_3\overrightarrow{C}$, $k_4\overrightarrow{D}$, $k_1k_2k_3k_4 \neq 0$ добија исти резултат. Такође, како су тачке C и D различите следи и да је $(A, B; C, D) \neq 1$.
Нека су A, B, C, D коначне тачке. Тада директно следи из (1) да је

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}},$$

те видимо и афини смисао дворазмере.

Следећа тврђења директно следе из дефиниције дворазмере.

Тврђење

Нека су A, B, C, D четири разне, колинеарне тачке. Тада важи:
а) $(A, B; C, D) = (C, D; A, B)$
б) $(A, B; C, D) = \frac{1}{(A, B; D, C)}$.

Тврђење

Нека су A, B и C три разне колинеарне тачке и $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0, 1$. Тада постоји јединствена тачка D таква да је $(A, B; C, D) = \lambda$.

Доказ. Ако је $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ тада је тачка D одређена са $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \frac{\beta}{\alpha\lambda}\overrightarrow{B}$. □

Дефиниција

Четири разне колинеарне тачке A, B, C и D су **хармонијски спрегнуте** или **хармонијски конјуговане** ако је $(A, B; C, D) = -1$. Тада пишемо $H(A, B; C, D)$.

Нека су A, B, C, D разне колинеарне тачке. Тада постоје коефицијенти β и δ такви да је

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}, \quad \overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}.$$

Тада је дворазмера $(A, B; C, D) = \beta : \delta$. Зато су тачке A, B, C, D хармонијски спрегнуте ако и само ако је $\beta + \delta = 0$.

Пример *Нека су дате тачке $A(x_1 : 1)$ и $B(x_2 : 1)$ једне пројективне праве, и нека је $C(\frac{x_1+x_2}{2} : 1)$ еуклидско средиште дужи AB. Пронађимо тачку D такву да је $H(A, B; C, D)$. Важи да је $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$. Нека је $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$. Тада су тачке хармонијски спрегнуте ако и само ако је $1 + \delta = 0$, односно $\delta = -1$. Дакле тачка D је одређена вектором $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = (x_1 - x_2, 0)$, односно има хомогене координате $(x_1 - x_2 : 0) = (1 : 0)$, те је D бесконачно далека тачка те праве.*