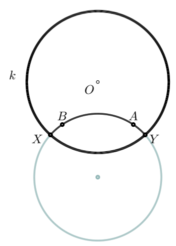
16. Метрика у Поенкареовом диск моделу



Дефиниција

Нека су A, B h-тачке и X и Y бесконачно далеке тачке праве која садржи тачке A и B, такве да тачка B припада h-полуправој AX. Растојање у Поенкареовом диск моделу је дато са $d_h(A, B) = \ln|\frac{AX}{AY} : \frac{BX}{BY}|$.

Следеће тврђење остављамо без доказа.

Тврђење

Пресликавање d_h јесте функција растојања.

Нека је $\widetilde{I}$ уопштени круг ортогоналан на апсолуту. С обзиром да уопштена инверзија $\psi_{\widetilde{I}}$ слика h-праву у h-праву, чува h-распоред тачака и дворазмеру, директно следи и наредно тврђење.

Тврђење

Нека је $\mathcal{I}$ h-изометрија, A и B две h-тачке и $\mathcal{I}(A) = A', \mathcal{I}(B) = B'$. Тада је $d_h(A, B) = d_h(A', B')$.

Пример *Нека је A h-тачка чија је комплексна координата z и O центар апсолуте. Нека су X и Y бесконачно далеке тачке h-праве OA такве да тачка A припада полуправој OY. Тада је $AX = 1 + |z|$, $AY = 1 - |z|$, $OX = OY = 1$. Веза између хиперболичког растојања d и еуклидског $|z|$ тачака O и A дата са $d = d_h(O, A) = \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$.*

Пример ...*Тада је и*
$$|z| = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}, \tag{1}$$
односно $|z| = \tanh \frac{d}{2}$, *тј.* $d = 2 \operatorname{arctanh} |z|$.

Теорема

Нека су z_1 и z_2 координате h-тачака A и B. Тада је
$$d_h(A, B) = 2 \operatorname{arctanh} \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \overline{z_2}}\right|.$$

Доказ. Нека је S_l h-рефлексија којом се тачка A слика у центар апсолуте O. Дата је формулом $S_l(z) = \frac{z_1}{\overline{z_1}} \frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{z_1 \overline{z} - 1}$, а тачка $S_l(B) = B'$ има координату $b' = \frac{z_1}{\overline{z_1}} \frac{\overline{z_2} - \overline{z_1}}{z_1 \overline{z_2} - 1}$.

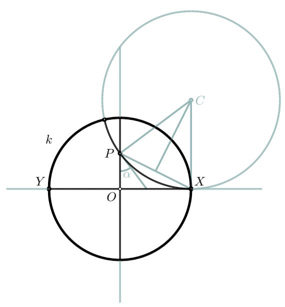
Тада је $|b'| = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \overline{z_2}|}$, па је
$$d_h(A, B) = d_h(O, B') = 2 \operatorname{arctanh} |b'| = 2 \operatorname{arctanh} \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \overline{z_2}|}.$$

□

Пример *Нека је* $M \neq O$ *h-тачка са комплексном координатом* z *и* M_1 *h-средиште дужи* OM_1*, са координатом* z_1*. С обзиром да је* $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$ *важи да је* $|z| = \frac{2|z_1|}{1 + |z_1|^2}$*, односно* $|z_1| = \frac{1 - \sqrt{1 - |z|^2}}{|z|}$.

Угао паралелности.

Нека су p и q две h-праве међусобно ортогоналне у центру апсолуте O.



Тада су и уопштени кругови $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ (еуклидски) праве нормалне у O. Нека је $P \in q$ h-тачка. Нађимо h-праве које сардже тачку P и паралелне су p. Нека су X и Y бесконачно далеке тачке h-праве p. Ако је h-права r паралелна p тако што $X \in \widetilde{r}$, тада је $\widetilde{r}$ или права која садржи O, односно $r = p$ или круг чији центар C припада правој кроз X параленој $\widetilde{q}$.

С обзиром да $P \neq p$, $\widetilde{r}$ је еуклидски круг. При том, тачка C припада и симетрали дужи PX, па постоји јединствен круг $\widetilde{r}$ који испуњава тражене услове.

Како се h праве p и q h-рефлексијом S_q, односно еуклидском рефлексијом $S_{\widetilde{q}}$ сликају у себе, а h-полуправа OX у h-полуправу OY, следи да постоји и јединствена h-права r_1 кроз P паралелна p тако што је Y њена бесконачно далека тачка.

Нека су A и a редом h-тачка и h-права и A' подножје h-нормале која садржи тачку A на h-праву a. Како постоји h-рефлексија S_l којом се тачка A' слика у центар апсолуте O, а особине као колинеарност, ортогоналност и паралелност су инваријантне за h-рефлексије, праве које садрже тачку A и паралелне су a сликају се у праве које садрже $S_l(A)$ и паралелне су p.

Takође, уочимо да праве r и r_1 одређују оштре углове са правом q који су међусобно h-симетрични у односу на q, односно једнаки и при том, на јединствен начин одређени са $d_h(P, O)$. Ова особина је очувана h-рефлексијом S_l.

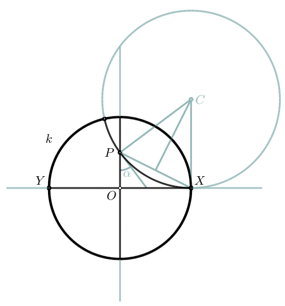
Зато важи следећа теорема.

Теорема

Нека су A и a h-тачка и h-права. Ако тачка A не припада правој a, онда постоје тачно две h праве које садрже A и паралелне су a. При том је симетрала угла којег r и r_1 одређују, а који садржи праву a уједно нормална на a. Ако тачка A припада правој a, права a је јединствена права инцидентна са A и паралелна a.

Дефиниција

Нека тачка A не припада h-правој a, и нека су A и r подножје нормале из A на a и h-права која садржи A и паралелна је a. Оштар угао који одређују праве AA' и r назива се **углом паралелности** за растојање $d = d_h(A, A')$. Пресликавање $\Pi : R^+ \to (0, \frac{\pi}{2})$ којом се d слика у одговарајући угао паралелности је функција **Лобачевског**.



Нека је p h-права кроз центар апсолуте са бесконачном тачком X, P h-тачка таква да је h-права PO нормална на p и C центар еуклидског круга $\widetilde{r}$ таквог да r садржи P и припада параболичком прамену са центром у X. Еуклидски троугао CPX је једнакокраки. Нека је угао при врху једнак 2ϕ.

Он је у кругу $\widetilde{r}$ централни над тетивом PX, па је угао $\angle OXP$, као угао између тетиве и тангенте једнак ϕ. Тангента у тачки P на $\widetilde{r}$ разлаже угао $\angle OPX$ на два угла. Један је угао између h-правих OP и r, означимо га са α, а други је такође угао између тетиве и тангенте круга $\widetilde{r}$, па је једнак ϕ. Зато је $2\phi + \alpha = \frac{\pi}{2}$.

При том, из правоуглог еуклидског троугла OPX видимо да важи $PO = \tan\phi = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}$. Ако је $d = d_h(O, P)$, тада је $OP = \frac{e^d-1}{e^d+1}$, одакле је $e^d \tan\frac{\alpha}{2} = 1$. С обзиром да је $\alpha = \Pi(d)$ добијамо да важи $e^{-d} = \tan\frac{\Pi(d)}{2}$, односно

$$\Pi(d) = 2\arctan(e^{-d}). \tag{2}$$

Примедба *Уочимо да за $d \to 0^+$ важи $\Pi(d) \to \frac{\pi}{2}^-$, угао паралелности у хиперболичком смислу тежи углу паралелности у еуклидском смислу. Зато можемо сматрати да се у хиперболичкој равни на врло малим растојањима реализује еуклидска геометрија.*

На основу формуле (2) директно следи тврђење.

Тврђење

Функција Лобачевског је монотоно опадајућа, односно важи:

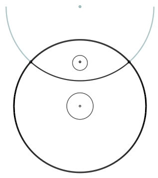
$$d_1 > d_2 \Leftrightarrow \Pi(d_1) < \Pi(d_2).$$

Дефиниција

Нека је A h-тачка и $\mathfrak{X}$ прамен правих. Уколико је $\mathfrak{X}$ елиптички прамен претпостављамо да A није његов центар. Скуп свих тачака осносиметричних тачки A у односу на праве прамена $\mathfrak{X}$ је **епицикл**.

Лако следи да је један епицикл одређен са:
- три своје различите тачке,
-(или) праменом $\mathfrak{X}$ и било којом својом тачком.

Нађимо епицикле Поенкареовог диск модела према типу прамена.
Круг. Нека је $\mathfrak{X}$ елиптички прамен са центром h-тачком M. У рефлексијама у односу на h-праве прамена $\mathfrak{X}$ тачка M је инваријантна, те епицикл представља скуп тачака h-равни X таквих да је $d_h(X,M) = d_h(A,M)$. Њега називамо h-**кругом** $k_h(M,d)$, M је центар круга, а $d = d_h(A,M)$ полупречник тог круга.



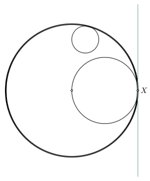
Претпоставимо да је $O = M$. Тада је $\mathfrak{X}$ прамен правих кроз O, а h-рефлексије су рестрикције еуклидских рефлексија у односу на еуклидске праве кроз O. Зато је h-круг са центром у O који садржи тачку A и еуклидски круг са центром у O. Ако је r хиперболички полупречник круга, еуклидски полупречник је $\frac{e^r-1}{e^r+1}$.
Претпоставимо сада да је $M \neq O$. Нека је даље S_l h-рефлексија којом се тачка M слика у O. С обзиром да је растојање инваријанта за h-рефлексије, h-круг са центром у M који садржи A слика се у h-круг са центром у O који садржи $A' = S_l(A)$. Зато је тражени h-круг слика еуклидског круга са центром у O који садржи A' у h-рефлексији S_l.
Уопштена инверзија $\psi_{\widetilde{l}}$ слика круг који не садржи центар инверзије у круг, па је тражени h-круг k_h, уједно и еуклидски круг. Међутим, како инверзија не слика центар круга у центар круга, еуклидски центар круга k_h се не поклапа са тачком M.

Орицикл.

Нека је $\mathfrak{X}$ параболички прамен са центром у бесконачно далекој тачки X. Епицикл одређен параболичким праменом назива се **орицикл.**
Нека је $M = O$, а X бесконачно далека тачка са комплексном координатом 1. h-праве прамена са центром X су одређене еуклидском правом OX и еуклидским круговима чији центри припадају еуклидској правој $x_1 = 1$. Ако је C центар једног таквог круга $\widetilde{l}$ са координатом $c = 1 + \imath b$, одговарајућа h-рефлексија је дата са $S_l(z) = \frac{c\bar{z}-1}{\bar{z}-\bar{c}}$, а тачка $O' = S_l(O)$ има координату

$$x_1 + \imath x_2 = \frac{1}{\bar{c}} = \frac{1}{1+b^2}(1+\imath b).$$

Зато ако тачка припада датом орициклу онда припада и еуклидском кругу $k_1 : (x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}$. Круг k_1 додирује апсолуту k у тачки X. Обратно, за сваку тачку скупа $(x_1, x_2) \in k_1 \setminus \{X\}$ постоји $b \neq 0$ такво да је $x_1 = \frac{1}{1+b^2}, x_2 = \frac{b}{1+b^2}$. Зато је дати епицикл $k_1 \setminus \{X\}$. Означимо овај орицикл са χ_0.



Ако је $M \neq O$, постоји h-рефлексија којом се тачка M слика у O, а центар датог прамена, тачка Y у неку другу бесконачно далеку тачку X_1. Даље, уколико је $X_1 \neq X$, постоји ротација хиперболичке равни око тачке O (која је у овом случају рестрикција еуклидске ротације око O) којом се тачка X_1 слика у X, док је, наравно, O инваријантна.
Дакле, постоји h-изометрија којом се тражени орицикли слика у χ_0 и обрнуто, тражени орицикл је слика χ_0 у некој h-изометрији. h-изометрија је рестрикција инверзивног пресликавања које слика k_1 у еуклидски круг који додирује апсолуту.

Дакле, орицикл је скуп тачака еуклидског круга који додирује апсолуту у некој тачки Y, без тачке Y. Уочимо и да смо показали да је сваки орицикл h-изометричан орициклу χ_0.
Зато важи следеће тврђење.

Теорема

Свака два орицикла су међусобно h-изометрична.

Еквидистанта. Епицикл одређен хиперболичким праменом $\mathfrak{X}$ називамо **еквидистантом**. Ако је l основица тог прамена, тада је l и **основица еквидистанте**. Ако су M и N две h-тачке те еквидистанте тада h-симетрала дужи MN припада прамену $\mathfrak{X}$. Ако су M_0 и N_0 h-ортогоналне пројекције тачака M и N на l тада је $d_h(M, M_0) = d_h(N, N_0)$. Зато је еквидистанта скуп тачака које се налазе са исте стране праве l и које су под једнако удаљене од l. **Висина** еквидистанте је $d = d_h(M, M_0)$.

Нека је $p : x_2 = 0$ h-права кроз O и $\widetilde{l}(C, r)$ круг који одређује h-праву l ортогоналну на p. Тада је $OC = \sqrt{1 + r^2}$. Нека је $\mathfrak{X}$ прамен хиперпаралелних правих ортогоналних на l, а X и Y бесконачно далеке тачке праве l. Поред h-праве p овом прамену припадају h-праве одређене еуклидским круговима ортогоналним на k и $\widetilde{l}$.

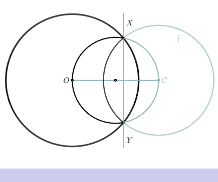
Круг $\widetilde{m}(C_1, R)$ је ортогоналан на k и $\widetilde{l}$ ако и само ако његов центар C_1, са координатом c, припада радикалној оси за k и $\widetilde{l}$, односно правој XY (ван дужи XY) и ако је његов полупречник $R^2 = |c|^2 - 1$.

Радикална оса има једначину $x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$, а тачке X и Y координате $(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \pm\frac{r}{\sqrt{1+r^2}})$, па центар C_1 има координате $(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+r^2}})$, где је $|b| > r$. Слика тачке O у h-рефлексији у односу на овим дефинисану h-праву је има комплексну координату $\frac{1}{\bar{c}} = \frac{\sqrt{1+r^2}}{1+b^2}(1 + ib)$.

Како је $b = x_2/x_1$ следи да слике тачке у у h-рефлексијама у односу на праве прамена $\mathfrak{X}$ припадају скупу тачака описаним једначином $x_1 = \frac{x_1^2\sqrt{1+r^2}}{x_1^2+x_2^2}$ тј.

$$(x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 + r^2})^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}(1 + r^2),$$

односно еуклидском кругу k_1 са пречником OC, коме припадају и тачке X и Y. Сама еквидистанта је отворени лук XY круга k_1 који припада h-равни $\mathbb{D}^2$. Ако је $\widetilde{l}$ права, тада слике тачке O у h-рефлексијама припадају h-правој l, те је скуп тачака еквидистанте одређене тачком O и праменом $\mathfrak{X}$ пресек еуклидског круга одређеног тачкама X, Y и O и h-равни.



Слично као и у случају орицикла, с обзиром да су h-ротације и h-рефлексије рестрикције инверзивних пресликавања која сликају уопштене кругове у уопштене кругове можемо закључити следеће. Ако је хиперболички прамен одређен h-правом l са бесконачно далеким тачкама X и Y, тада је еквидистанта са основицом l која садржи тачку M пресек уопштеног круга еуклидске равни који садржи X, Y, M и $\mathbb{D}^2$.